

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯ ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕКОТОРЫХ ТЕЛ В ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. Л. ГОНОР

(Москва)

Устанавливаются простые соотношения локального типа для распределения скорости и давления на поверхности эллиптического цилиндра, эллипсоида вращения и произвольного трехосного эллипсоида в потоке несжимаемой жидкости. Показывается, что в точной постановке параметры течения в данной точке поверхности тела зависят только от местного угла встречи потока с элементом поверхности. В частности, для распределения скорости оказывается справедливой ньютоновская теория удара, широко применяемая в расчетах гиперзвуковых течений газа.

1. Рассмотрим плоское обтекание эллиптического цилиндра, заданного уравнением $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. Потенциал течения, направленного вдоль оси x со скоростью U_∞ , определяется выражением [1]

$$(1.1) \quad \varphi = U_\infty \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \left(\frac{a-b}{2} e^\xi + \frac{a+b}{2} e^{-\xi} \right) \cos \eta \quad (b < a)$$

Здесь ξ и η — эллиптические координаты, связанные соотношениями $x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta$, $y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. На поверхности тела $\operatorname{th} \xi = b/a$. Распределение давления на поверхности цилиндра можно определить с помощью интеграла Бернулли

$$(1.2) \quad C_p = \frac{p - p_\infty}{(\rho U_\infty^2 / 2)} = 1 - \frac{1}{U_\infty^2} (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) = 1 - \left(\frac{a+b}{a-b} \right) \frac{c^2 y^2}{a^2 b^4} / \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)$$

С другой стороны, если ввести в рассмотрение угол θ между направлением касательной к контуру тела и направлением потока (осью x), фиг. 1, то получим, что

$$(1.3) \quad \cos^2 \theta = y^2 b^{-4} \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)^{-1}$$

Сравнивая (1.2) и (1.3), приходим к важному результату

$$(1.4) \quad U = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)^{1/2} = k U_\infty \cos \theta, \quad k = k_1 (1 + \varepsilon) \quad \varepsilon = b/a$$

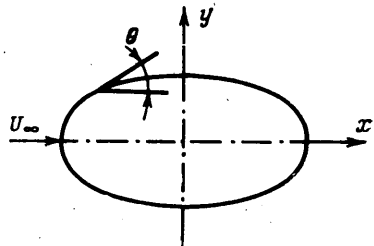
Здесь ε — относительная толщина эллипса.

Таким образом, скорость на поверхности тела U пропорциональна косинусу местного угла атаки. Подставляя (1.4) в (1.2), будем иметь для давления следующую формулу:

$$(1.5) \quad C_p = 1 - k^2 \cos^2 \theta$$

Аналогичное соотношение имеет место и для эллиптического цилиндра, сжатого в направлении набегающего потока.

2. Рассмотрим теперь обтекание эллипсоида вращения. Известное решение для этого класса тел получено на основе использования теории ньютоновского потенциала. Согласно [1] потенциал обтекания эллипсоида вращения вдоль оси x с меридиональным сечением, заданным



Фиг. 1

уравнением (1.1) в цилиндрической системе координат xu определяется следующим выражением:

$$\varphi = U_{\infty} \left(x + \frac{Ax}{2 - A_0} \right),$$

$$A = \frac{2\sqrt{1 - e^2}}{e^3} \left(\frac{1}{v} - \operatorname{arctg} \operatorname{tg} v \right),$$

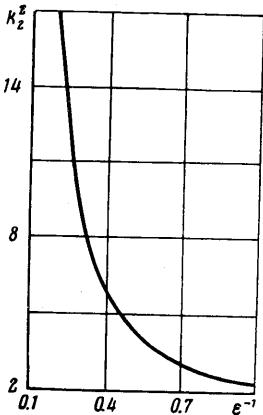
$$v = \sqrt{\frac{a^2 + \lambda}{b^2 - a^2}}$$

где λ — положительный корень уравнения $x^2/(a^2 + \lambda) + y^2/(b^2 + \lambda) = 1$, $A_0 = A|_{\lambda=0}$.

Производя выкладки, аналогичные плоскому случаю, представим коэффициент давления в следующем виде:

$$(2.1) \quad C_p = 1 - k_2^2 \left(1 - \frac{x^2}{(a^4/b^2) - e^2 x^2} \right),$$

$$k_2^2 = \frac{e^6}{(1 - e^2) (\operatorname{arc} \sin e - e\sqrt{1 - e^2})}$$



Фиг. 2

Если ввести угол θ между направлением потока и касательной к контуру тела (Фиг. 1), то легко показать, что выражение в круглых скобках (2.1) равно $\cos^2 \theta$. В результате приходим снова к соотношениям (1.4) — (1.6), в которых нужно положить $k = k_2$.

Таким образом, для эллипсоидов вращения справедлив закон распределения скорости и давления, зависящий только от местного угла встречи скорости потока в бесконечности с касательной, проведенной в данной точке меридионального контура поверхности.

На фиг. 2 представлена зависимость величины k_2^2 от удлинения тела $e^{-1} = a/b$ для случая сжатого эллипсоида. При переходе от эллипсоида к диску величина k_2 увеличивается, и распределение параметров для диска получается из формулы (1.5) предельным переходом при $k_2 \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow \pi/2$.

3. Примером пространственного течения с поперечным перетеканием потока является обтекание трехосного эллипсоида

$$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$$

Пусть поток жидкости со скоростью U_{∞} направлен вдоль оси x . Потенциал такого течения [1] определяется выражением

$$(3.1) \quad \varphi = xU_{\infty} \left[1 + \frac{K_3}{2} A(x, y, z) \right], \quad K_3 = 2/(2 - A_0)$$

$$A = abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)D},$$

$$D = \sqrt{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)}, \quad A_0 = A|_{\lambda=0}$$

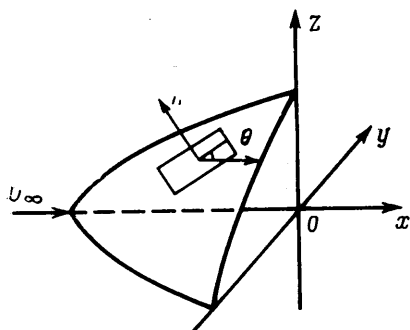
где λ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} - 1 = 0$$

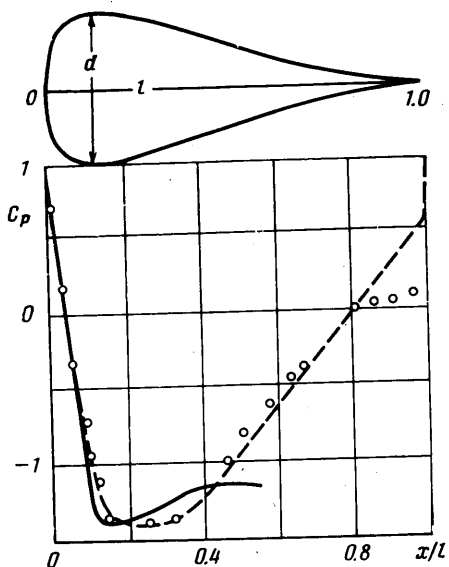
Вычислим теперь модуль скорости U на поверхности тела. Для этого составим производную вдоль направления единичного вектора s , лежащего в касательной плоскости к поверхности эллипсоида. Потенциал (3.1) удобно рассматривать как функцию двух переменных $\varphi(x, \lambda)$, тогда, учитывая, что $\lambda=0$ соответствует поверхности эллипсоида и $d\lambda/ds=0$, будем иметь

$$v_s = \frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = U_\infty \left(1 + \frac{K_3 abc}{2} \int_0^\infty \frac{du}{(a^2+u)D} \right) \frac{dx}{ds} \quad (\lambda=0)$$

Обозначая угол между направлением скорости набегающего потока и направлением вектора s через θ_s , получим, что $v_s = k_3 \cos \theta_s$. Выберем теперь направление вектора s вдоль направления скорости, тогда проекция v_s совпадает с величиной скорости U и имеет наибольшее из всех возможных значение. При этом угол θ_s принимает наименьшее значение θ , определяемое углом между направлением скорости набегающего потока и ее проекцией на касательную плоскость (фиг. 3). В результате для скорости и давления получим формулы (1.4), (1.5), в которых постоянная $k = \kappa_3 = 2/(2-A_0)$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Таким образом, установлено, что для класса эллипсоидных тел в плоском, осесимметричном и пространственном течениях распределение давления следует закону квадрата косинуса угла встречи потока с элементом поверхности тела в данной точке. Следует подчеркнуть, что в случае пространственного течения около трехосного эллипсоида скорость на поверхности тела есть функция двух переменных. Представление скорости в виде (1.5) позволило сократить число переменных до единицы.

Представляет интерес выяснить направление скорости на поверхности эллипсоида. Нетрудно показать, что вектор скорости U с компонентами $k_3 U_\infty [(1-n_x^2), -n_x n_y, -n_x n_z]$, где n (n_x, n_y, n_z) — единичный вектор нормали ($n_x = \sin \theta$), направлен вдоль проекции вектора U_∞ на касательную плоскость. Таким образом, обтекание рассмотренных тел несжимаемой жидкостью можно интерпретировать для расчета поля скоростей в терминах ударной теории Ньютона. Именно, скорость на поверхности данного тела определяется абсолютно неупругим ударом частицы, набегающей со скоростью $U_1 = k U_\infty$. При этом теряется нормальная составляющая и сохраняется составляющая скорости, касательная к телу. Эта простая концепция может оказаться достаточно точной для широкого класса гладких тел. Постоянная k равна значению максимальной безразмерной скорости на поверхности тела. Для тел, близких по форме к эллипсоидам, значения k можно вычислять по формулам (1.4), (2.1), (3.1). Полученные соотношения справедливы как для лобовой поверхности, так и для затененной части тела, где имеется безотрывное обтекание. В виде примера на фиг. 4 сплошной линией представлены результаты распределения давления, вычисленные по формуле (1.5) для симметричного профиля Жуковского 40%-ной толщины. Пунктиром и точками показаны соответственно данные точной теории и экспери-

мента. Постоянная k_1 определялась из условия равенства максимальных скоростей. Как видно из сравнения, имеется удовлетворительное совпадение результатов на головной части профиля, хотя его форма весьма далека от эллипса.

В случае наличия угла атаки и скоса потока процедура определения поля течения следующая: общая скорость набегающего потока раскладывается на три составляющие. Для каждой составляющей определяется соответствующее поле скоростей на теле (с разными значениями постоянной k). Далее поля складываются, и по результирующему полю находится распределение давления.

В заключение отметим, что С. А. Чаплыгин [2], рассматривая обтекание парабола вращения показал, что для получающегося в этом случае течения имеет место формула (1.5) при $k=1$. В работе [2] при проведении преобразования координат для случая эллипсоида вращения фактически получена формула, аналогичная (1.4). Однако не было замечено, что на основе этой формулы можно упростить представление результатов, и она имеет место в общем случае для произвольного эллипсоида.

Автор признателен Г. Ю. Степанову и А. Г. Петрову за полезное обсуждение содержания работы.

Поступила 21 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
2. Чаплыгин С. А. К вопросу о вычислении силы сопротивления воздуха полету снарядов с различными очертаниями головной части. Собр. соч., т. 2. Л., Изд-во АН СССР, 1933.
3. Фабрикант Н. Я. Аэродинамика. М., «Наука», 1964.

УДК 533.6.011.34—3

ВИЗУАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КАРТИНЫ ТЕЧЕНИЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. М. БОЖКОВ, А. С. МОЗОЛЬКОВ, В. И. ПАЛАЕВ

(Москва)

Экспериментальные методы, в частности методы визуализации, позволяют достаточно подробно представить пространственное течение около тел сложной формы, расчет которого связан с рядом трудностей. В данной работе с помощью трех визуальных способов изучалось обтекание треугольного крыла в диапазоне скоростей набегающего потока $1 \div 90$ м/сек. Так как основную роль в формировании течения над поверхностью крыла играет отрыв потока и образование системы вихрей, то главной целью эксперимента было проследить в динамике физический процесс развития обтекания, приводящий к отрыву и вихреобразованию.

Для исследования была выбрана модель треугольного крыла с симметричным профилем и скругленной передней кромкой. Угол стреловидности 60° , центральная хорда $b=0.52$ м и размах $L=0.6$ м. Вдоль крыла на равном расстоянии друг от друга $Z=0.15b$ заподлицо с поверхностью размещались три электроподогревателя, позволяющие методом локального подогрева [1] наблюдать обтекание в трех сечениях, параллельных вектору скорости набегающего потока. Модель с помощью державки на вакуумной присоске устанавливалась в рабочей части квадратного сечения 1×1 м² малотурбулентной дозвуковой аэродинамической трубы под углами атаки $\alpha=0, 5, 10, 15, 20^\circ$ и углами рыскания $\beta=0, 6, -6^\circ$. Скорость набегающего потока могла непрерывно изменяться от 0 до 90 м/сек.

В конце рабочей части аэродинамической трубы размещалась стеклянная призма, позволяющая производить фотографирование и скоростную киносъемку через боко-