

УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫТЕСНЕНИЯ СЛОЯ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

В. И. РУБЕЖАНСКИЙ

(Воронеж)

При извлечении нефти из пластов путем вытеснения ее другими жидкостями возникает вопрос устойчивости границы раздела. Для достижения равномерности профилей нагнетания на практике применяют, например, полимерные добавки для загущения вытесняющей жидкости или между вытесняющей и вытесняемой жидкостями вводят промежуточный слой, обладающий неньютоновскими свойствами.

В представленной работе в линейной постановке исследуется устойчивость поверхности раздела неньютоновских жидкостей, фильтрующихся по степенному закону. Капиллярные силы не учитываются. Получено условие устойчивости границы раздела двух неньютоновских жидкостей, а также показано влияние толщины промежуточного слоя на устойчивость. Оказалось, что при определенных параметрах движущихся жидкостей в пористой среде присутствие слоя необходимо, чтобы вытеснение было устойчивым.

Уравнение движения жидкости в пористой среде запишем в виде

$$(1) \quad 0 = -\nabla p + \rho g + R$$

Здесь ∇ — пространственный градиент, p — давление, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, R — плотность силы сопротивления, связанная со скоростью фильтрации ньютоновской жидкости формулой Дарси $R = -\mu V/k$, где V — скорость фильтрации, k — проницаемость среды, μ — динамическая вязкость жидкости. Эта зависимость применима для достаточно малых скоростей фильтрации.

В общем случае силу взаимодействия между пористой средой и протекающей жидкостью можно определить нелинейной относительно скорости фильтрации зависимостью [1]

$$(2) \quad R = -Vf(|V|)$$

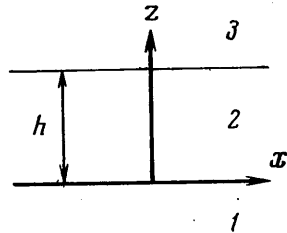
Используя (1), (2) и выражение одномерного движения жидкости степенной модели в пористой среде [2], запишем силу сопротивления в виде

$$(3) \quad R = -\frac{\Psi}{k} |V|^{n-1} V, \quad \Psi = \frac{K}{12} \left[3 \left(\frac{3n+1}{n} \right) \right]^n [72C'k\varepsilon]^{1/2(1-n)}$$

где n — показатель неньютоновского поведения жидкости, Ψ — параметр уровня вязкости, K — показатель консистенции, ε — пористость среды, C' — величина, учитывающая «извилистость» поровых каналов. Обработка экспериментальных данных течения различных жидкостей в пористой среде дает (см. [2]), что $C' = 25/12$ или $C' = 2.5$.

Уравнение движения степенной жидкости в пористой среде запишется теперь в форме

$$(4) \quad |V|^{n-1} V = -\frac{k}{\Psi} \nabla(p + \rho g z)$$



Фиг. 1

Это уравнение справедливо при малых скоростях фильтрации лишь некоторых [2] реальных сред.

Пусть система из трех неньютоновских жидкостей (фиг. 1) движется вертикально с постоянной скоростью. Промежуточный слой имеет конечную толщину h . Жидкости считаем несжимаемыми. Фильтрация каждой из жидкостей описывается следующими уравнениями:

$$(5) \quad |V_s|^{n_s-1} V_s = -\frac{k_s}{\Psi_s} \nabla(p_s + \rho_s g z), \quad \nabla \cdot V_s = 0$$

Величины, относящиеся к каждой из фаз, обозначены индексом $s=1, 2, 3$.

Рассмотрим плоский случай движения. Система уравнений (5) запишется в виде

$$(6) \quad \begin{aligned} |V_s|^{n_s-1} u_s &= -\frac{k_s}{\Psi_s} \frac{\partial p_s}{\partial x}, & |V_s|^{n_s-1} w_s &= -\frac{k_s}{\Psi_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial z} + \rho_s g \right) \\ \frac{\partial u_s}{\partial x} + \frac{\partial w_s}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

На границах раздела $z = \eta_j(x, t)$ ($j=1, 2$) должны выполняться кинематические и динамические условия

$$(7) \quad \epsilon \eta_{j,t} + u \eta_{j,x} - w = 0 \quad (j=1, 2), \quad p_s - p_2 = 0 \quad (s=1, 3)$$

Первое условие (7) означает, что частица, которая лежала однажды на поверхности $z - \eta_j(x, t) = 0$, остается на ней постоянно в течение всего движения. Во втором выражении (7) капиллярным давлением пренебрегается, как это часто делается в теории прямолинейно-параллельного движения.

Введем функцию

$$\Phi_s(x, z, t) = \frac{k_s}{\Psi_s} (p_s + \rho_s g z) \quad (s=1, 2, 3)$$

Движение системы жидкостей с постоянной скоростью w_0 описывается соотношением

$$(8) \quad \Phi_s^\circ = -|w_0|^{n_s-1} w_0 z + b_s$$

где b_s — постоянные интегрирования.

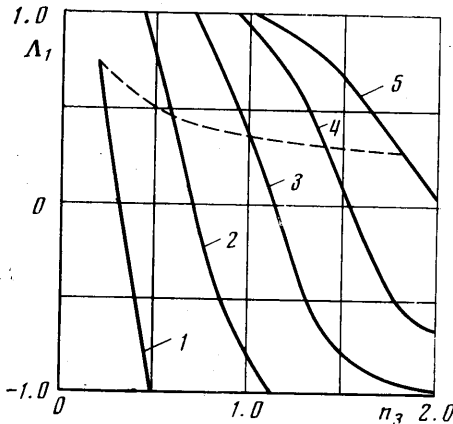
Для исследования устойчивости решения (8) относительно малых возмущений рассмотрим нестационарные решения уравнений (6), (7)

$$V_s = w_0 + V_s', \quad \Phi_s = \Phi_s^\circ + \Phi_s', \quad \eta_j = \eta_j^\circ + \eta_j' \quad (s=1, 2, 3; j=1, 2)$$

Тогда уравнения для возмущений примут вид

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \Phi_s'}{\partial x^2} + \frac{1}{n_s} \frac{\partial^2 \Phi_s'}{\partial z^2} = 0 \quad (s=1, 2, 3)$$

Осуществляя перенос граничных условий (7) на невозмущенные (плоские) поверхности раздела жидкостей, получим



Фиг. 2

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma \frac{\partial \eta_1'}{\partial t} &= -\frac{1}{n_1 |w_0|^{n_1-1}} \frac{\partial \Phi_1'}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{n_2 |w_0|^{n_2-1}} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \quad (z=0) \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} \epsilon \frac{\partial \eta_2'}{\partial t} &= -\frac{1}{n_3 |w_0|^{n_3-1}} \frac{\partial \Phi_3'}{\partial z} = \\ &= -\frac{1}{n_2 |w_0|^{n_2-1}} \frac{\partial \Phi_2'}{\partial z} \quad (z=h) \end{aligned}$$

$$\frac{\Psi_s}{k_s} \Phi_s' - \left(\frac{\Psi_s}{k_s} |w_0|^{n_s-1} w_0 + \rho_s g \right) \eta_j' =$$

$$(12) \quad \frac{\Psi_2}{k_2} \Phi_2' - \left(\frac{\Psi_2}{k_2} |w_0|^{n_2-1} w_0 + \rho_2 g \right) \eta_j' =$$

$$(s=1, 3; z = \eta_j^\circ - w_0 t / \epsilon)$$

Решение системы уравнений (9) — (12) будем искать в виде

$$(13) \quad \Phi_s' = [A_s \exp(m \sqrt{n_s} z) + B_s \exp(-m \sqrt{n_s} z)] \exp(\sigma t) \cos(mx) \quad (s=1, 2, 3)$$

где A_s, B_s — постоянные величины, σ — декремент возмущений, m — волновое число возмущений в направлении оси x , $A_3=B_1=0$ в силу затухания возмущений при $z \rightarrow -\infty$ и $z \rightarrow +\infty$ соответственно.

Возмущение поверхностей раздела жидкостей запишем в форме

$$(14) \quad z = a_1 \eta' (z=0), \quad z = h + a_2 \eta' (z=h), \quad \eta' = \exp(\sigma t) \cos(mx)$$

Здесь a_1, a_2 — произвольные константы.

Выполнение условий (10) — (12) с использованием (14) приводит к характеристическому уравнению

$$\begin{aligned} & \alpha^2 [\operatorname{ch}(m\sqrt{n_2}h) (\lambda_1 \lambda_2 \sqrt{n_1 n_2} |w_0|^{n_1+n_2-2} + \lambda_2 \lambda_3 \sqrt{n_2 n_3} |w_0|^{n_2+n_3-2}) + \\ & + \operatorname{sh}(m\sqrt{n_2}h) (\lambda_2^2 n_2 |w_0|^{2n_2-2} + \lambda_1 \lambda_3 \sqrt{n_1 n_3} |w_0|^{n_1+n_3-2})] + \\ & + \alpha m [(A-B) \lambda_2 \sqrt{n_2} |w_0|^{n_2-1} \operatorname{ch}(m\sqrt{n_2}h) + (A \lambda_3 \sqrt{n_3} |w_0|^{n_3-1} - \\ & - B \lambda_1 \sqrt{n_1} |w_0|^{n_1-1}) \operatorname{sh}(m\sqrt{n_2}h)] - m^2 AB \operatorname{sh}(m\sqrt{n_2}h) = 0 \end{aligned}$$

$$(15) \quad \alpha = \sigma \varepsilon, \quad \lambda_s = \frac{\Psi_s}{k_s} \quad (s=1, 2, 3)$$

$$A = (\lambda_1 |w_0|^{n_1-1} - \lambda_2 |w_0|^{n_2-1}) w_0 + (\rho_1 - \rho_2) g,$$

$$B = (\lambda_3 |w_0|^{n_3-1} - \lambda_2 |w_0|^{n_2-1}) w_0 + (\rho_3 - \rho_2) g$$

Из уравнения (15) в предельном случае $h \rightarrow 0$ получаем выражение

$$(16) \quad \alpha (\lambda_1 \sqrt{n_1} |w_0|^{n_1-1} + \lambda_3 \sqrt{n_3} |w_0|^{n_3-1}) = m(B-A)$$

При $n_1=n_3=1$ это выражение переходит в известное соотношение [3, 4].

Из уравнения (16) следует, что перемещение границы раздела двух неньютоновских жидкостей устойчиво, если выполнено условие

$$(17) \quad \left(\frac{\Psi_3}{k_3} |w_0|^{n_3-1} - \frac{\Psi_1}{k_1} |w_0|^{n_1-1} \right) w_0 + (\rho_3 - \rho_1) g < 0$$

Рассмотрим следующий частный случай: пусть $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$. Если длина волны возмущений велика по сравнению с толщиной слоя, то из (15) находим два решения относительно $m w_0 / \alpha = \Lambda^{-1}$

$$(18) \quad \frac{1}{\Lambda_1} = \frac{\lambda_3 \sqrt{n_3} |w_0|^{n_3-1} + \lambda_1 \sqrt{n_1} |w_0|^{n_1-1}}{\lambda_3 |w_0|^{n_3-1} - \lambda_1 |w_0|^{n_1-1}} + \frac{mh}{\lambda_2 |w_0|^{n_2+3} (\lambda_3 |w_0|^{n_3-1} - \lambda_1 |w_0|^{n_1-1})^3} \times$$

$$\begin{aligned} & \times [2a_{123}(n_1 + \sqrt{n_1 n_3}) - 2a_{133}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2 - 2a_{213}(n_2 + \sqrt{n_1 n_3}) + 2a_{312}(n_3 + \sqrt{n_1 n_3}) + \\ & + a_{122}(n_2 - n_1) + a_{233}(n_2 - n_3)], \quad a_{ihs} = \lambda_i^2 \lambda_h \lambda_s |w_0|^{2n_i + n_h + n_s} \end{aligned}$$

$$(19) \quad \frac{1}{\Lambda_2} = \frac{\lambda_2 |w_0|^{n_2-1} (\lambda_3 |w_0|^{n_3-1} - \lambda_1 |w_0|^{n_1-1})}{mh (\lambda_3 |w_0|^{n_3-1} - \lambda_2 |w_0|^{n_2-1}) (\lambda_2 |w_0|^{n_2-1} - \lambda_1 |w_0|^{n_1-1})}$$

Отметим, что первое слагаемое в (18) можно получить из равенства (16) приравниванием в нем плотностей.

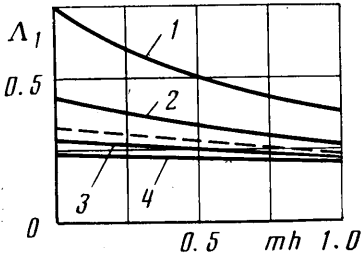
Выражения (18), (19) дают возможность выяснить влияние скорости движения, толщины промежуточного слоя, параметров степенных жидкостей и длины волны возмущений на устойчивость границ раздела. Как видно из (18), мода возмущений с декрементом α_1 близка к моде, которая существует при отсутствии промежуточного слоя; она является основной модой [5], вызывающей неустойчивость.

Расчеты значений Λ_1 проводились для $w_0 = 10^{-3}$ см/сек, $k_1 = k_2 = k_3 = 0.37$ дарси, $\varepsilon = 27\%$, $K_1 = 1$ спз·сек n_1-1 , $K_2 = 1.5$ спз·сек n_2-1 , $K_3 = 2$ спз·сек n_3-1 , $C' = 25/12$. Показатели консистенции выбраны такими, что в предельном случае ньютоновских жидкостей $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ режим вытеснения неустойчивый. Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

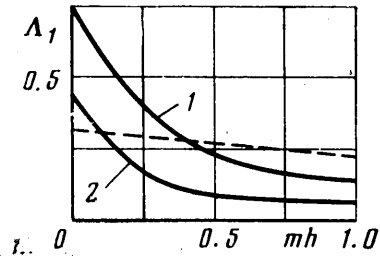
При отсутствии промежуточного слоя и $n_1 = n_3 = n$ граница раздела псевдопластических жидкостей более неустойчива, чем ньютоновских и дилатантных (фиг. 2; штриховая линия).

Хотя вытесняющая жидкость и более подвижна, можно указать для нее такие параметры неньютоновского поведения, что граница раздела будет устойчива. На фиг. 2 кривые 1–5 соответствуют значениям $n_1 = 0.2, 0.6, 1.0, 1.4, 1.8$.

При наличии промежуточного слоя, равных параметров $n_1=n_2=n_3=n$ и фиксированном волновом числе m увеличение толщины слоя h приводит к уменьшению декремента возмущений (фиг. 3), причем у псевдопластиков рост возмущений более быстрый, чем у дилатантных жидкостей. Кривые 1-4 соответствуют значениям $n = 0.2, 0.6, 1.4, 1.8$. На фиг. 3 штриховой линией изображена кривая изменения Λ_1 для ньютоновских жидкостей.



Фиг. 3



Фиг. 4

Если промежуточный слой состоит из ньютоновской жидкости $n_2=1$, то, как видно из сравнения графиков фиг. 3 и 4 (кривые 1, 2), для псевдопластиков $n_1=n_3=n=0.2, 0.6$ фактор изменения со временем резко уменьшается.

mh	Λ_1	n_1	n_2	n_3
0.0	1.1646	—	—	—
0.1	2.4705	0.2	0.4	0.4
0.15	5.6234	0.2	0.6	0.6
0.18	24.0003	0.2	1.0	0.6, 1, 1.4, 1.8
0.19	-268.672	0.2	1.4	0.6, 1, 1.4, 1.8
0.2	-20.362	0.6	1.0	1.0
0.4	-10.451	0.6	1.4	1.8
0.6	-0.5363	1.0	1.4	1.4
0.8	-0.3607	1.0	1.8	1.4, 1.8
1.0	-0.2717	1.4	1.8	1.8

Расчеты показали, что для $n_1 \neq n_2 \neq n_3$ и $mh \neq 0$ изменение декремента возмущений не имеет определенной тенденции. Возможна такая ситуация, что увеличение толщины слоя приводит к неустойчивости. Однако для других значений n , можно указать при фиксированном волновом числе такую толщину промежуточного слоя, что границы раздела будут устойчивы. Ниже приведены значения величины Λ_1 для $n_1=1$, $n_2=0.2$, $n_3=0.6$, и значения параметров неньютоновского поведения жидкостей в системе при $mh=0 \div 1$, для которых возмущения поверхностей раздела затухают.

Следовательно, в отличие от ньютоновских жидкостей перемещение границ раздела фаз с параметрами неньютоновости, указанными выше, устойчиво.

Автор благодарит В. Н. Николаевского за предложение темы исследования и А. Т. Листрова за постоянное внимание к работе.

Поступила 26 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. «Недра», М., 1970.
2. Savins J. G. Non-Newtonian flow through porous media. A review of rheologically complex flow phenomena likely to have a role in mechanisms responsible for behavior observed in non-Newtonian flow through porous media., *Indust. and Engng Chem.*, 1969, vol. 61, No. 10. (Рус. перев.: Неньютоновское течение в пористой среде. Обзор реологически сложных явлений, которые могут иметь значение для механизмов, обуславливающих поведение неньютоновской жидкости при ее движении через пористую среду. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей).
3. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. Roy. Soc.*, 1958, vol. A245, No. 1242.
4. Пулатовский В. П. Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
5. Raghavan R. A note on the stability of an immiscible liquid layer in a porous medium. *Quart. Appl. Math.*, 1974, vol. 31, No. 4.