

3. Ринкевичюс Б. С., Толкачев А. В. Оптический доплеровский измеритель скорости газовых потоков. Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 9.
4. Гарбузов В. М. Единая программа, составленная на алгоритмическом языке ФОРТРАН, для численного интегрирования уравнений двумерного пограничного слоя в ламинарной, переходной и турбулентной областях течения. Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1482.
5. Баронги, Либби. Профили скоростей в турбулентных сжимаемых пограничных слоях. Ракетная техника и космонавтика, 1966, т. 4, № 2.
6. Хорстман, Оуэн. Характеристики турбулентного сжимаемого пограничного слоя. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 1.
7. Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И. Теплообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.

УДК 532.542

НЕСТАЦИОНАРНОЕ НАПОРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА

Ю. М. БЛИТШТЕЙН, М. Г. ХУБЛЯРН

(Москва)

В работе [1] рассматривалось распространение волн возмущений в бесконечном вязкоупругом трубопроводе и приведены исходные уравнения, описывающие движение жидкости в трубопроводах из вязкоупругих материалов. В настоящей работе исследуется нестационарное движение жидкости в вязкоупругих трубах конечной длины. Этот вопрос для максвелловской модели стандартного линейного тела частично был исследован в [2, 3]. Ниже приводятся решения задачи движения жидкости в трубах постоянного диаметра и в трубопроводе, составленном из труб различного диаметра, рассмотрены конкретные модели материалов труб.

1. Дифференциальные уравнения, описывающие нестационарное движение жидкости в вязкоупругом трубопроводе, имеют вид [1]

$$(1.1) \quad -f_0 \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial t} + 2aM$$

$$\rho_0 f_0 \left(\frac{1}{K_0} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{2R_0}{\delta} G^* \frac{\partial P}{\partial t} \right) = - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$G^* \sigma(t) = G \left[\sigma(t) + \nu_\sigma \int_0^t G(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right]$$

Здесь M , P , ρ — средние в сечении массовый расход, плотность и давление соответственно; K_0 , δ — модуль упругости жидкости и толщина трубы соответственно; f_0 , R_0 , ρ_0 — начальные значения площади сечения, радиуса трубы и плотности жидкости соответственно; a — приведенный коэффициент трения жидкости; G , ν_σ и $G(t)$ — соответственно величина, обратная упругому модулю, дефект модуля и интегральное ядро ретардации.

Система уравнений (1.1) решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$(1.2) \quad t=0, \quad M=m(x), \quad P=p(x), \quad x=0, \quad P=\varphi(t)$$

$$x=l, \quad M+h \frac{\partial M}{\partial x} = \psi(t)$$

Здесь $m(x)$, $p(x)$, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — известные функции, h — положительный параметр, характеризующий регулировку расхода жидкости.

В пространстве преобразований Лапласа для $P(x, t)$ и $M(x, t)$ с учетом (1.1), (1.2) получаем следующие выражения:

$$(1.3) \quad M(x, s) = \omega \{ Q(s) \operatorname{ch} Kx - N(s) K [\operatorname{sh} K(l-x) + hK \operatorname{ch} K(l-x)] \} -$$

$$(1.4) \quad \begin{aligned} & -\omega K \operatorname{ch} Kx \left\{ \int_0^l F(\tau, s) [\operatorname{ch} K(l-\tau) + hK \operatorname{sh}(l-\tau)] d\tau \right\} + \\ & + \int_0^x F(\tau, s) \operatorname{ch} K(x-\tau) d\tau \\ P(x, s) = & \omega K^{-1} \{ Q(s) \operatorname{sh} Kx + N(s) K [\operatorname{ch} K(l-x) + hK \operatorname{sh} K(l-x)] \} - \end{aligned}$$

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & -\omega \operatorname{sh} Kx \left\{ K^{-1} \int_0^l F(\tau, s) [\operatorname{ch} K(l-\tau) + hK \operatorname{sh} K(l-\tau)] d\tau \right\} + \\ & + K^{-1} \int_0^x F(\tau, s) \operatorname{sh} K(x-\tau) d\tau \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad K(s) = \{s(s+2a) [1+bc^2G(s)]\}^{1/2}c, \quad N(s) = \varphi(s) - s^{-1}p(0)$$

$$Q(s) = -\frac{1}{f_0} \left[(s+2a)\psi(s) - m(l) + \frac{f_0 p'(l)}{s} \right],$$

$$F(x, s) = \frac{1}{f_0} \frac{dm(x)}{dx} - \frac{1}{s} \frac{d^2p(x)}{dx^2}$$

$$b = 2\nu_0 R_0 \rho_0 \delta^{-1} G, \quad \rho_0 c^2 = K_0 \delta (\delta + 2R_0 K_0 G)^{-1}, \quad \omega^{-1} = \operatorname{ch} Kl + hK \operatorname{sh} Kl$$

На практике обычно нестационарное движение предшествует стационарному течению. В этом случае $m(x) = m_0$ и $p(x) = p_0 - 2am_0 f_0^{-1}x$. Тогда

$$F(x, s) = 0, \quad N(s) = \varphi(s) - \frac{p(0)}{s}, \quad Q(s) = \frac{(s+2a)}{f_0 s} [m_0 - s\psi(s)]$$

Анализ соотношений (1.3) – (1.6) показывает, что при условии однозначности в пространстве Лапласа ядра ретардации $G(s)$ полюсами для $M(x, s)$ и $P(x, s)$ кроме полюсов функций $\varphi(s)$, $\psi(s)$ и точки $s=0$ являются точки комплексной плоскости, удовлетворяющие уравнению $K(s) = i\mu_n$, $n=1, 2, \dots$, где μ_n – корни уравнения $(h\mu \operatorname{tg} \mu l = 1)$, которые, при конкретно выбранных h и l нетрудно подсчитать.

В дальнейшем предполагается, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ равны константам B и A соответственно. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – произвольные функции времени, то в силу линейности исходных уравнений и граничных условий можно применить интеграл Дюамеля, позволяющий перейти от скачкообразного вида граничных условий к произвольным функциям времени [4].

Для получения искомых выражений $P(x, t)$ и $M(x, t)$ необходимо задаться конкретным выбором материала трубы. При этом рассмотрим следующие модели [5].

1. Модель Максвелла характеризуется ядром, равным $\alpha\nu_0^{-1}$, где α – величина, обратная времени релаксации. При этом выражения для давления и расхода имеют следующий вид:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} P(x, t) = & P_0 - 2Aaf_0^{-1}x + [2a(m_0 - A) \operatorname{sh} \kappa x + f_0(B - P_0) \kappa Z(x)] (f_0 \kappa)^{-1} Z(0) - \\ & - 2e^{-(a+\theta)t} \left\{ (B - P_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n [(a+\theta) \sin \xi_n t + \xi_n \cos \xi_n t] [\cos \mu_n(l-x) + h\mu_n \sin \mu_n(l-x)]}{q_n \xi_n (\mu_n^2 + \kappa^2)} \right. \\ & \left. - \frac{(A - m_0)}{f_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(a^2 - \xi_n^2 - \theta^2) \sin \xi_n t + 2a\xi_n \cos \xi_n t] \sin \mu_n x}{q_n \xi_n (\mu_n^2 + \kappa^2)} \right\} \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \xi_n = & \sqrt{c^2 \mu_n^2 - (a-\theta)^2}, \quad \kappa = 2\sqrt{ad\alpha}, \quad \theta = dc^2\alpha \\ d = & b/2\nu_0, \quad q_n = [l + h + l^2 h^2 \mu_n^2] \sin \mu_n l \\ Z(x) = & \operatorname{ch} \kappa(l-x) + h\kappa \sin \kappa(l-x) \end{aligned}$$

В дальнейшем решения задач будут приведены при нулевых начальных условиях.
 2. Модель Фойгта характеризуется интегральным ядром следующего вида:
 $G(t) = v_0^{-1} [\alpha e^{-\alpha t} - \delta(t)]$, где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. При этом выражения для $P(x, t)$ и $M(x, t)$ в пренебрежении малыми величинами $(1 - bc^2 v_0^{-1})$ получаем

$$(1.9) \quad M(x, t) = A - 2A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(z+a)t] y_n \cos \mu_n x}{q_n \mu_n \eta_n} - \\ - 2B f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(z+a)t] [\sin \mu_n (l-x) + h \mu_n (l-x)]}{\mu_n^2 \eta_n c^2 (\alpha - 2a) \{ [2\alpha a^2 + c^2 \mu_n^2 (a - \alpha)] \operatorname{sh} \eta_n t - 2a \eta_n \operatorname{ch} \eta_n t \}^{-1}}$$

$$(1.10) \quad P(x, t) = B - \frac{2aAx}{f_0} - \\ - 2B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(z+a)t] [\cos \mu_n (l-x) - h \mu_n \sin \mu_n (l-x)] y_n}{q_n \mu_n \eta_n} + \\ + 2 \frac{A}{f_0 \alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp[-(z+a)t] \{ [2a^2 \alpha + c^2 \mu_n^2 (a - \alpha)] \operatorname{ch} \eta_n t + 2a \eta_n \alpha \operatorname{ch} \eta_n t \}}{q_n \mu_n^2} \\ z = \frac{c^2 \mu_n^2}{2\alpha}, \quad \eta_n = \left[\left(a + \frac{c^2 \mu_n^2}{2\alpha} \right)^2 - c^2 \mu_n^2 \right]^{1/2}, \quad y_n = (a+z) \operatorname{sh} \eta_n t + \eta_n \operatorname{ch} \eta_n t$$

3. Для модели стандартного линейного тела с экспоненциальным ядром $e^{-\alpha t}$ точные решения поставленной задачи имеют вид

$$(1.11) \quad M = A - 2A \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \left\{ \left[s \frac{dK^2}{ds} \right]^{-1} e^{st} \right\}_{s=s_{kn}} \frac{\mu_n \cos \mu_n x}{q_n} - \\ - 2B \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \left\{ \left[s(s+2a) \frac{dK^2}{ds} \right]^{-1} e^{st} \right\}_{s=s_{kn}} \frac{\mu_n^2 [\sin \mu_n (l-x) - h \mu_n \cos \mu_n (l-x)]}{q_n}$$

$$(1.12) \quad P = B - \frac{2aAx}{f_0} + \\ + 2B \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \left\{ \left[s \frac{dK^2}{ds} \right]^{-1} e^{st} \right\}_{s=s_{kn}} \frac{\mu_n [\cos \mu_n (l-x) - h \mu_n \sin \mu_n (l-x)]}{q_n} + \\ + \frac{A}{f_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 \left\{ \left[s \frac{dK^2}{ds} \right]^{-1} (s+2a) e^{st} \right\}_{s=s_{kn}} \frac{i \sin \mu_n x}{q_n}$$

Здесь s_{kn} ($k=1, 2, 3$) — корни кубического уравнения

$$s^3 + s^2 (\alpha + bc^2 + 2a) + s [2a (\alpha + bc^2) + c^2 \mu_n^2] + \alpha c^2 \mu_n^2 = 0$$

4. Ядра, соответствующие сложным моделям, составленным из простых упругих и вязких элементов, представляют собой сумму экспоненциальных ядер

$$(1.13) \quad G(t) = \sum_{k=1}^l c_k \exp(-\alpha_k t)$$

где α_k — положительные отличные друг от друга величины.

Такому ядру будут соответствовать корни многочлена степени $i+2$, а выражения для $M(x, t)$ и $P(x, t)$, соответствующие этим корням, имеют вид (1.11) и (1.12) с изменением k от 1 до $l+2$.

2. Рассмотрим аналогичную задачу для составного трубопровода с диаметрами труб D_1 и D_2 . При этом для каждой из труб, входящей в трубопровод, верны уравнения движения жидкости (1.1), а в граничных условиях учитываются непрерывность давления и потока в сечении стыка труб $x=l$. Течение идеальной жидкости в упругих трубопроводах, составленных из труб различного диаметра, рассмотрено в [8].

Граничные условия предполагаются следующими:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} t=0, \quad M_1=0, \quad P_1=0, \quad M_2=0, \quad P_2=0 \\ x=0, \quad P_1=\varphi(t); \quad x=l, \quad P_1=P_2; \quad x=L, \quad M_2=\psi(t) \end{aligned}$$

Здесь L — длина всего трубопровода.

В пространстве преобразований Лапласа, например, для давления получаем следующие выражения:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} P_1(x, s) = \varphi(s) y_i^{-1} [\kappa_1 K_2 \operatorname{sh} K_1(l-x) \operatorname{sh} K_2(L-l) + \\ + K_1 \operatorname{ch} K_1(l-x) \operatorname{ch} K_2(L-l)] - (f_0^{(1)} y_i)^{-1} (s+2a) \psi(s) \operatorname{sh} K_1 x \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad \begin{aligned} P_2(x, s) = \frac{\psi(s) (s+2a_2) [-\kappa_1 K_2 \operatorname{sh} K_1 l \operatorname{ch} K_2(l-x) + K_1 \operatorname{ch} K_1 l \operatorname{sh} K_2(L-x)]}{f_0^{(2)} K_2 y_i} + \\ + \frac{\varphi(s) f_0^{(2)} K_1 K_2 \operatorname{ch} K_2(L-x)}{f_0^{(2)} K_2 y_i} \end{aligned}$$

$$(2.4) \quad \begin{aligned} y_i = \kappa_1 K_2 \operatorname{sh} K_1 l \operatorname{sh} K_2(L-l) + K_1 \operatorname{ch} K_1 l \operatorname{ch} K_2(L-l) \\ \kappa_1 = \frac{s+2a_1 f_0^{(2)}}{s+2a_2 f_0^{(1)}}, \quad K_i = \{s(s+2a_i) [1 + \nu_0 G(s)]\}^{1/2} c_i^{-1} \quad (i=1, 2) \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для тонкостенных труб $bc^2 \approx \nu_0$. Аналогичные соотношения трудно получить и для массового расхода жидкости.

Анализ (2.4) показывает, что для различных значений K_i нахождение обратного преобразования Лапласа встречает большие трудности математического и вычислительного характера. Поэтому естественно рассмотреть случаи, когда $a_1 = a_2$. Это соответствует следующим ограничениям для труб различных диаметров: $\lambda_1 R_1^{-3} = \lambda_2 R_2^{-3}$, где λ_1 и λ_2 — коэффициенты гидравлического трения.

При такого рода допущениях из (2.4) следует, что

$$(2.5) \quad K_1 \gamma = K_2, \quad \gamma = c_1 c_2^{-1}$$

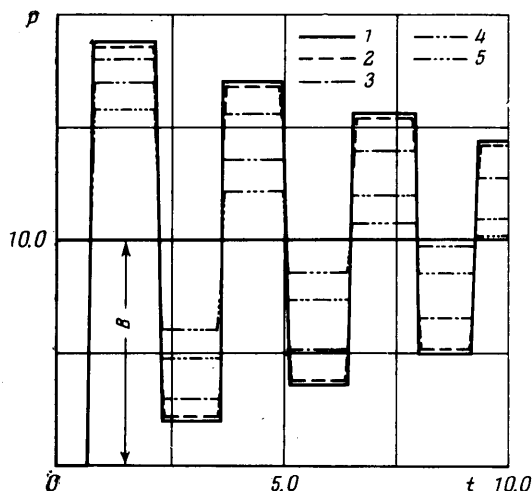
При условии (2.5) кроме полюсов функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, точки $s=0$ полюсами $P_1(x, s)$ и $P_2(x, s)$ являются все точки комплексной плоскости, удовлетворяющие уравнению $K_1 = i\mu_n$, где μ_n определяется из уравнения $f_0^{(2)} \gamma \operatorname{tg} \mu_n \operatorname{tg} \gamma(L-l) \mu_n = f_0^{(1)}$. Так же как и выше, в дальнейшем предполагается, что $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — константы, равные соответственно B и A .

В качестве примера рассмотрим модель Максвелла ($G(t) = 2\eta \nu_0^{-1}$, где 2η — величина, обратная времени релаксации)

$$\begin{aligned} P_1 = \frac{B f_0^{(1)} Z_1(x) - 2aA \operatorname{ch} \kappa x}{f_0^{(1)} Z_1(0)} - 2c_1^2 e^{-(a+\eta)t} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \{ B c_n^{-1} [f_0^{(1)} \cos \mu_n(l-x) \cos \gamma \mu_n(L-l) - f_0^{(2)} \gamma \sin \mu_n(l-x) \sin \mu_n \gamma(L-l)] \times \\ \times [(a+\eta) \sin \xi_n t + \xi_n \cos \xi_n t] \mu_n + A c_n^{-1} \sin \mu_n x [2a \xi_n \cos \xi_n t + (a^2 - \alpha^2 - \xi_n^2) \sin \xi_n t] \} \\ P_2 = \frac{-2aAZ_1(x) + B f_0^{(2)} \gamma \kappa^2 \operatorname{ch} \gamma \kappa(L-x)}{f_0^{(2)} \gamma \kappa Z_1(0)} - \frac{2c_1^2}{f_0^{(2)}} e^{-(a+\eta)t} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \{ A c_n^{-1} [f_0^{(1)} \cos \mu_n l \sin \mu_n \gamma(l-x) - f_0^{(2)} \sin \mu_n l \cos \mu_n \gamma(l-x)] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times [2a\xi_n \cos \xi_n t + (a^2 - \alpha^2 - \xi_n^2) \sin \xi_n t] + Bc_n^{-1} \mu_n f_0^{(1)} f_0^{(2)} \gamma \cos \mu_n (L-x) \times \\ & \times [(a+\eta) \sin \xi_n t + \xi_n \cos \xi_n t] \\ c_n = & \{ \gamma [f_0^{(1)}(L-l) - f_0^{(2)}l] \cos \mu_n l \sin \mu_n (L-l) + \\ & + [f_0^{(2)}\gamma^2(L-l) + f_0^{(1)}l] \sin \mu_n l \cos \mu_n (L-l) \} \xi_n [(a+\alpha)^2 + \xi_n^2] \\ Z_1(x) = & [\kappa_1 \kappa \operatorname{sh} \kappa(l-x) \operatorname{sh} \gamma \kappa(L-l) + \kappa \operatorname{ch}(l-x) \operatorname{ch} \gamma \kappa(L-l)] \end{aligned}$$

Для оценки влияния вязкоупругих свойств трубопровода на волновой процесс по выражению (1.7) (случай $h=0$) составлена программа счета на ЭВМ «Минск-32». На графиках проведены результаты расчета гидравлического удара для модели Макс-



велла и для упругой трубы с учетом гидравлического трения при $P=B=10$ атм., $l=1000$ м, $a=0.075$ сек $^{-1}$, $c=1400$ м/сек ($1-\theta=0$ — упругая труба; $2-\theta=0.005$, $3-\theta=0.05$, $4-\theta=0.15$, $5-\theta=0.25$). Как видно из графиков, наследственные свойства материала трубы существенно влияют на затухание волнового процесса.

Здесь для всех сред величина c принимает условно одинаковое значение.

Поступила 17 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Блигштейн Ю. М., Хубларян М. Г. Распространение волн возмущений жидкости в бесконечно длинном вязкоупругом трубопроводе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 3.
2. Гинзбург И. П. Гидравлический удар в трубах из упруговязкого материала. Вестн. ЛГУ, 1956, вып. 3, № 13.
3. Громова Р. Ф. О гидравлическом ударе в упруговязких трубах. Уч. зап. Куйбышевск. пед. ин-та им. В. В. Куйбышева, 1958, вып. 21.
4. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1965.
6. Белик Н. П., Семенов В. А., Зельдина Э. А. К расчету гидравлического удара в однониточном сложном трубопроводе. В сб. «Гидромеханика», вып. 23. Киев. «Наукова думка», 1973.