рекомендациям [8], при этом получено удовлетворительное согласие теоретических зависимостей (5) и (15) с экспериментальными данными для исследованных в [3] образцов шероховатых поверхностей.

Введение функции $\eta_0=\eta_0(\xi)$ в (7) позволяет в широких пределах влиять на распределение осредненной скорости течения вблизи стенки. Полученные в предположении $\eta_0\equiv 0$ профили скорости находятся в хорошем количественном соответствии с результатами расчетов по формулам работы [5]. Предположение $\eta_0\equiv\xi$ приводит к распределениям скорости $u^+=u^+(\eta, \xi)$, близким к полученным численным методом в [6]. Следует отметить, что формулы для профилей осредненной скорости (5), (8) и (15) значительно проще зависимостей, предложенных в [5, 6].

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
2. *Иоселевич В. А., Пилипенко В. Н.* Логарифмический профиль скорости при течении слабого полимерного раствора у шероховатой поверхности. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 6.
3. *Миллионщиков М. Д., Субботин В. И., Ибрагимов М. Х., Таранов Г. С., Кобзарь Л. Л.* Гидравлическое сопротивление и поля скорости в трубах с искусственной шероховатостью стенок. Атомная энергия, 1973, т. 34, вып. 4.
4. *Nikuradse J.* Strämunqsqesetze in rauhen Rohren. Forschung a. d. Geb. d. Ingenieurw., 1933, Forschungsheft Nr 361.
5. *Rotta J.* Das in Wandnähe gültige Geschwindiqkeitsqesetz turbulenter Strömungen. Inger Arch. 1950, Bd 18, H. 4.
6. *Van Driest E. R.* On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci. 1956, vol. 23, No. 11.
7. *Миллионщиков М. Д.* Турбулентные течения в пристеночном слое и в трубах. Атомная энергия, 1970, т. 28, вып. 3.
8. *Миллионщиков М. Д., Субботин В. М., Ибрагимов М. Х., Таранов Г. С., Кобзарь Л. Л.* Профили скорости в гладких и шероховатых трубах. (Препринт Физ.-энерг. ин-та, 417), Обнинск, 1973.
9. *Squire H. B.* Reconsideration of the theory of free turbulence. Phylos. Mag., 1948, vol. 39, No. 1.
10. *Granville P. S.* Frictional – Resistance and velocity similarity laws of drag – reducing dilute polymer solutions. J. Ship Res., 1968, vol. 12, No. 3.

УДК 532.526.4:536.24

К ТЕОРИИ ТЕПЛООБМЕНА В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ С ОТРЫВОМ

В. К. МИГАЙ

(Ленинград)

На базе решения одномерного уравнения турбулентной пульсационной энергии, предполагая линейное распределение касательного напряжения поперек потока при нулевом касательном напряжении на стенке, получены характеристики теплообмена.

Проблема теплообмена при отрывном обтекании имеет практическое значение для расчета интенсификаторов теплообмена, элементов теплообменников и плохо обтекаемых тел. Имеются в виду области, где $\partial u/\partial y|_w=0$, т. е. как области отрыва потока, так и области его присоединения.

В действительности в указанных областях поток нестационарен и трехмерен. Будем рассматривать течение, осредненное как во времени, так и по координате z (z – координата, нормальная к потоку и параллельная обтекаемой поверхности). При таком осреднении можно полагать, что в критических точках $\partial u/\partial y=0$.

Аналогия Рейнольдса, утверждающая пропорциональность трения на стенке тепловому потоку, не справедлива для областей отрыва потока, так как в этом случае $\partial u/\partial y=0$, а величина теплового потока в ряде случаев достигает значений, даже больших, чем в присоединенном потоке. Целесообразно использовать для расчета теплообмена в отрывных потоках уравнение баланса турбулентной энергии. Несмотря на то, что при отрывном обтекании напряжение трения на стенке равно нулю, интенсивность турбулентной энергии в потоке велика; последняя диффундирует в направлении к стенке и обусловливает, в частности, интенсивный теплообмен. Применительно к отрывному потоку одномерное уравнение баланса турбулентной энергии рассматривалось в [1], где анализировался предельный случай отрывного обтекания, когда во всем потоке отсутствовала генерация турбулентной энергии ($\tau du/dy=0$). Представляет интерес рассмотреть случай линейного распределения напряжения трения поперек потока с нулевым трением на стенке. Такое распределение, как указывается в [2], согласуется с экспериментальными данными для оторвавшихся потоков.

Рассмотрим уравнение баланса турбулентной энергии, предложенное в [1, 3]

$$\frac{ak^{3/2}}{y}-b\frac{d}{dy}\left(k^{1/2}y\frac{dk}{dy}\right)-\frac{\tau}{\rho}\frac{du}{dy}=0 \tag{1}$$

Координата y направлена поперек потока и отсчитывается от стенки. Здесь первый член характеризует диссипацию турбулентной энергии в единице объема, второй – диффузию, третий – генерацию турбулентной кинетической энергии, k – кинетическая турбулентная энергия, равная

$$k={}^1/_2[\langle u'^2\rangle+\langle v'^2\rangle+\langle w'^2\rangle] \tag{2}$$

u', v', w' – компоненты пульсационных составляющих скорости, a – константа диссипации, b – константа диффузии.

Рассматривается несжимаемая жидкость с постоянными физическими свойствами.

Кинематическая турбулентная вязкость определяется выражениями

$$\tau/\rho=\nu_T\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

$$\nu_T=ck^{1/2}y \tag{4}$$

Последняя формула получена на основании анализа размерностей; c – безразмерная постоянная.

Полагаем

$$\tau/\rho=my \tag{5}$$

При $y=0$, $\tau=0$, что определяет отрыв потока.

Здесь m – константа.

Уравнение (1), с учетом (3) – (5) принимает вид

$$\frac{ak^{3/2}}{y}-b\frac{d}{dy}\left(yk^{1/2}\frac{dk}{dy}\right)-\frac{m^2y^2}{ck^{1/2}y}=0 \tag{6}$$

Линейная функция

$$k=my[c(a-{}^3/_2b)]^{-1/2} \tag{7}$$

удовлетворяет уравнению (6) и условию $k=0$ при $y=0$.

Рассмотрим двухслойную схему турбулентного потока: область влияния вязкости и турбулентное ядро. На границах вязкого слоя y_0 и турбулентного ядра y_1 имеем соответственно $k=k_0$ и $k=k_1$. Внешней границей турбулентного ядра y_1 будем считать такое расстояние от стенки, при котором нарушается линейное распределение величины k поперек пристеночного слоя. В районе области присоединения уровень турбулентной кинетической энергии вблизи стенки и, следовательно, величины ν_T повышены. Под величиной y_0 будем считать значение y, при котором имеет место такая же величина ν_T/ν, как и в гладкой трубе на границе турбулентной и промежуточных областей (безразмерная величина указанной границы $\eta=y v_* /\nu\sim40$). Поскольку уровень турбулентности в области присоединения выше, абсолютная величина y_0 будет меньше, чем в гладкой трубе. При $\eta=40$ для гладкой трубы имеем

$$\nu_T/\nu=16 \tag{8}$$

В соответствии с (7) получим

$$k_1/k_0=y_1/y_0 \tag{9}$$

Учитывая (4), (8), (9), имеем

$$c\sqrt{\frac{k_1}{y_1}}\,y_0^{3/2}=16\nu \tag{10}$$

Введя характерную скорость U и размер D, получим выражение для комплекса Uy_0/ν

$$\frac{Uy_0}{\nu}=\left(\frac{k_1^{1/2}}{U}\right)^{-2/3}\left(\frac{D}{y_1}\right)^{-1/3}\left(\frac{UD}{\nu}\right)^{1/3}\left(\frac{16}{c}\right)^{2/3} \tag{11}$$

Уравнение (11) выражает связь комплекса Uy_0/ν с геометрическими параметрами и характеристиками течения. Отметим, что формула (11) не содержит констант диффузии и диссипации в отличие от аналогичной связи, полученной в [1] при отсутствии генерации турбулентной энергии во всем потоке. Число St=Nu/Re Pr определяется из уравнения переноса тепла в турбулентном потоке [1]

$$q=\left(\frac{\nu}{\mathrm{Pr}}+\frac{\nu_T}{\mathrm{Pr}_T}\right)\rho c_p\frac{dt}{dy} \tag{12}$$

Здесь Pr_T – турбулентное число Прандтля, t – температура, ρ – плотность, c_p – теплоемкость. Полагая $q=q_w$, вследствие малой толщины слоя с основным падением температуры получим после преобразований

$$\mathrm{St}=\frac{\nu}{Uy_0}\frac{(\langle t\rangle-t_w)}{(t_{\max}-t_w)}\left(\int\limits_0^{y_1/y_0}\frac{d(y/y_0)}{1/\mathrm{Pr}+(\nu_T/\nu)(1/\mathrm{Pr}_T)}\right)^{-1} \tag{13}$$

Здесь локальное число St отнесено к среднему температурному напору $\Delta t=\langle t\rangle-t_w$.

Величина $(\langle t\rangle-t_w)/(t_{\max}-t_w)$, как показано в [4], слабо зависит от градиента давления. Ее можно аппроксимировать формулой, полученной для гладкой трубы

$$\frac{\langle t\rangle-t_w}{t_{\max}-t_w}=\frac{1.75}{8.5+\mathrm{Pr}}+1 \tag{14}$$

Учитывая (11), (13) и (14), будем иметь

$$\mathrm{St}=\left(\frac{16}{c}\right)^{-2/3}\left(\frac{y_1}{D}\right)^{-1/3}\left(\frac{\sqrt{k_1}}{U}\right)^{2/3}\times \tag{15}$$

$$\times\mathrm{Re}^{-1/3}\left(\frac{1.75}{8.5+\mathrm{Pr}}+1\right)\left(\int\limits_0^{y_1/y_0}\frac{d(y/y_0)}{1/\mathrm{Pr}+(\nu_T/\nu)(1/\mathrm{Pr}_T)}\right)^{-1}$$

Область влияния вязкости можно разбить на область собственного вязкого подслоя и промежуточную область. Как показано в [4], в сечении отрыва (присоединения) пограничного слоя безразмерная толщина вязкого подслоя

$$\eta_*^2=\left(\frac{y^2}{\nu}\frac{\partial y}{\partial y}\right)_{y=y_*}=57,\qquad \text{т. е.}\qquad \eta_*\sim 7.5$$

Поскольку величина η_* определена на основании двухслойной схемы (без учета промежуточной области), она несколько завышена. Принимаем для η_* стандартное значение $\eta=5$.

Полагаем, что при $y<y_0$ (в вязком подслое и в промежуточной области) величина ν_T/ν распределяется так же, как и в гладкой трубе: для подслоя $\nu_T/\nu=614(y/y_0)^4$, а для промежуточной области $\nu_T/\nu=8(y/y_0)-1$.

Интеграл в формуле (15) разобьем на три интеграла с пределами интегрирования по толщине подслоя, промежуточной области и турбулентному ядру.

Константа c в формуле (4) определена в [1] на основании сопоставления с выражением для турбулентной вязкости в области постоянного напряжения (присоединенный слой). По данным [1] $c=0.2$. Величину y_1/y_0 можно оценить исходя из следующих соображений. Распределение величины k, найденное экспериментально вблизи точки отрыва, свидетельствует о том [5], что линейность распределения величины k нарушается примерно в районе внешней границы в области постоянного напряжения ($\eta=400-500$). Таким образом, имеем для ориентировочной оценки

$$(16)\qquad \frac{y_1}{y_0}=\frac{\eta_1}{\eta_0}\sim\frac{400}{40}\sim 10$$

По последним данным в пристеночной области $\mathrm{Pr}_T\sim 0.9$.

Абсолютное значение y_1, видимо, не имеет смысла определять из условия (16) ввиду неопределенности значения v_* в этой области (в точке отрыва $v_*=0$). Область постоянного напряжения судя по данным [5] условно заканчивается на расстоянии (0.1–0.2) δ, где δ – толщина пограничного слоя. Для трубы имеем ориентировочно $y_1/D\sim 0.1$. Указанная оценка совпадает с рекомендацией для y_1/D, данной в [1] на

D_0/D_1	Re	Pr или Sc	St/St$_0$	n	Источник
2	10^4	0.72	3.24	−0.333	Формула (17)
3	10^4	0.72	5.58	−0.333	»
4	10^4	0.72	8.2	−0.333	»
2	10^5	0.72	2.38	−0.333	»
3	10^5	0.72	4.1	−0.333	»
4	10^5	0.72	6.02	−0.333	»
2	10^4	2500	3.73	−0.333	»
2	10^5	2500	2.74	−0.333	»
2	88500	1400	2.22	−0.35	Экспериментальные данные [9]
2	9050	1400	3.04	−0.35	То же
2	65300	2500	2.7	−0.35	»
2	10200	2500	3.66	−0.35	»
1.85	9620	0.72	3.7	−0.333	Экспериментальные данные [10]
1.85	66260	0.72	3.8	−0.330	То же
3	24800	3	6.7	−0.333	Экспериментальные данные [11]
2	102000	3.0	3.1	−0.330	То же

основании анализа экспериментальных данных. С учетом принятых значений параметров, выполнив элементарное интегрирование в формуле (15) (интегрирование по трем участкам) и аппроксимируя интеграл степенной функцией, получим

$$(17)\qquad \mathrm{St}=\frac{0.116\,(\sqrt{k_1}/U)^{0.67}\,\mathrm{Re}^{-0.333}}{0.324\,\mathrm{Pr}^{0.69}+0.095\,\mathrm{Pr}^{-1}}\left(\frac{1.75}{8.5+\mathrm{Pr}}+1\right)$$

Сравним результаты расчета по этой формуле с экспериментальными данными. Для теплообмена в задней критической точке при поперечном обтекании цилиндра воздушным потоком в работе [6] получено

$$(18)\qquad \mathrm{St}=0.1\,(UD/\nu)^{-0.333}$$

где U – скорость набегающего потока, D – диаметр цилиндра.

Отметим совпадение показателя степени для числа Re в формулах (17) и (18).

Исходя из опытных данных для параметра $\sqrt{k_1}/U$ в приведенном случае можно принять значение 0.11. Тогда формула (17) будет иметь вид

$$(19)\qquad \mathrm{St}=0.081\mathrm{Re}^{-0.333}.$$

Расхождение невелико, если принять во внимание сложность проблемы и сделанные допущения.

В качестве второго примера рассмотрим теплообмен в трубе, в точке присоединения пограничного слоя за диафрагмой. Для определения величины $\sqrt{k_1}/U$ в этом случае рассмотрим схематично процесс развития струи за диафрагмой. Пусть D –

диаметр трубы, D_1 – внутренний диаметр диафрагмы, U и U_1 – соответствующие средние скорости. Непосредственно после диафрагмы к струе примыкает область возвратного течения, а скорость в струе равна U_1. По отношению к линии нулевой скорости разность скоростей равна $\Delta U_1 = U_1$. Принимая линейность профиля скорости, получим $du/dy \sim U_1/h$ (h – высота диафрагмы). Соответствующие пульсационные составляющие скорости равны $u' \sim l du/dy$. Полагая, что $l \sim h$ (постоянна, как для струи), имеем $u' = c_1 U_1$, $v' = c_2 U_1$, $w' = c_3 U_1$.

Кинетическая турбулентная энергия равна

$$k = {}^1/_2 (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) U_1^2 = c_4 U_1^2$$

Тогда $\sqrt{k_1}/U = cU_1/U$. При $U_1/U \to 1$ по данным [7] $\sqrt{k_1}/U \sim 0.25$

$$\sqrt{k_1}/U = 0.25 U_1/U = 0.25 (D/D_1)^2 \tag{20}$$

Здесь D – диаметр трубы, D_1 – диаметр диафрагмы.

Результаты расчетов по формуле (20) согласуются с опытными данными работы [8].

В таблице представлены результаты расчетов по формуле (17) с использованием формулы (20). Приведены также имеющиеся опытные данные различных авторов. Сравнение показывает, что в целом расчеты согласуются с опытом.

Следует отметить близкое соответствие показателей n в соотношении $\mathrm{St} \sim \mathrm{Re}^n$. Согласование с опытом имеет место и при больших числах Pr, когда существенное влияние на процесс теплообмена оказывает турбулентная вязкость в подслое, что апробирует, в частности, принятое выражение для ν_T/ν в вязком слое.

Для величины St_0 при больших числах Pr используется асимптотическая формула [12] $\mathrm{St}_0 = 0.04\sqrt{\lambda}\,\mathrm{Pr}^{-3/4}$, а при малых числах Pr принято $\mathrm{St}_0 = 0.023\mathrm{Re}^{-0.2}\mathrm{Pr}^{-0.6}$.

Поступила 14 II 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spalding D. B.* Heat transfer from turbulent separated flows. J. Fluid Mech., 1967, vol. 27, pt 1.
2. *Гинзбург И. П.* Теория сопротивления и теплопередачи. Л., Изд. ЛГУ, 1970.
3. *Prandtl L.* Über ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz. In: Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. cl., 1945, H. 6.
4. *Кутателадзе С. С., Леонтьев А. И.* Тепломассообмен и трение в турбулентном пограничном слое. М., «Энергия», 1972.
5. *Таунсенд А. А.* Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. *Richardson P. D.* Heat and mass transfer in turbulent separated flows. Chem. Engng Sci., 1963, vol. 18, No. 3.
7. *Aril M., Rouse H.* Experiments on two-dimensional flow over a normal wall. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt 2.
8. *Ede A. J., Hislop C. I., Morris R.* The effect on the local heat-transfer coefficient in a pipe of an abrupt disturbance of the fluid flow: abrupt convergence and divergence of diameter ratio 2/1. Proc. Inst. Mech. Engrs, 1956, vol. 170, No. 38.
9. *Runchal A. K.* Mass transfer investigation in turbulent flow downstream of sudden enlargement of a cireular pipe for very high Schmidt numbers. J. Heat and Mass Transfer, 1971, vol. 14, No. 6.
10. *Земаник, Дугалл.* Местный теплообмен за участком резкого расширения круглого канала. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Теплопередача, 1970, т. 92, № 1.
11. *Кралл, Спэрроу.* Турбулентный теплообмен в областях отрыва и присоединения потока и развития течения после присоединения в круглой трубе. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Теплопередача, 1966, т. 88, № 1.
12. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.