

ТЕЧЕНИЕ АНОМАЛЬНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ  
МЕЖДУ ДВУМЯ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

Н. Г. БЕКИН, В. В. ЛИТВИНОВ, В. Ю. ПЕТРУШАНСКИЙ

(Ярославль)

Одна из важнейших задач теории переработки полимерных материалов — исследование течения термопластов в области деформации валковых машин. В работе проведен анализ такого процесса на основе уравнений для аномально-вязкой жидкости, включая уравнение энергии, в биполярной системе координат. Приведено аналитическое решение указанной системы уравнений, и результаты решения, полученного методами численного анализа с учетом зависимости реологических коэффициентов от температуры. Исследована зависимость максимальных приростов температуры в области деформации от скорости вращения валков, координаты входа материала в область деформации и реологических коэффициентов.

1. Рассмотрим стационарное течение несжимаемой аномально-вязкой жидкости между двумя вращающимися цилиндрическими валками. Этот процесс может быть описан системой дифференциальных уравнений, включающей в себя уравнение неразрывности, уравнение сохранения импульса и уравнение энергии

$$(1.1) \quad \nabla_i v^i = 0, \quad \rho v^j \nabla_j v^i =$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} &= -g^{ij} \nabla_j P + \nabla_j \tau^{ij} \\ &\lambda \nabla^i \nabla_i T - \rho c_v v^i \nabla_i T + \\ &+ \tau^{ij} e_{ij} = 0 \end{aligned}$$

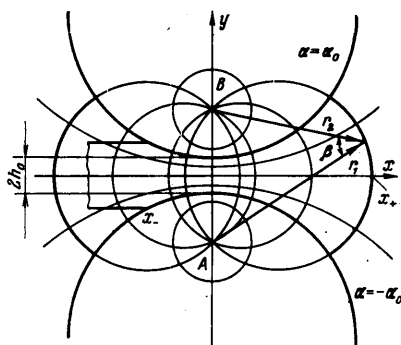
При этом предполагается, что свойства жидкости описываются реологическим уравнением (1.3) [1]

$$(1.3) \quad P^{ij} = -g^{ij} P + \tau^{ij}, \quad \tau^{ij} = \mu' e^{ij}$$

где  $P^{ij}$  — тензор напряжения,  $P$  — гидростатическое давление,  $\tau^{ij}$  — тензор вязких напряжений,  $e^{ij}$  — тензор скоростей деформации. В общем случае коэффициент  $\mu'$  — функция трех первых инвариантов тензора  $e^{ij}$  и параметров термодинамического состояния материала. Поскольку далее рассматривается плоская задача для несжимаемой жидкости, то первый и третий инварианты обращаются в нуль и коэффициент  $\mu'$  является функцией только  $I_2$  — второго инварианта  $e^{ij}$  и температуры. Примем далее модель Оствальда-де Вала, которая описывает поведение некоторых вязких материалов, например полиэтилена, каучуков, в довольно широком диапазоне изменения скоростей сдвига (четыре-пять десятичных порядков изменения амплитуды [2])

$$(1.4) \quad \tau^{ij} = \mu(T) |^{1/2} I_2 |^{1/2(n-1)} e^{ij}$$

Систему уравнений (1.1)–(1.4) запишем в биполярной системе координат (фиг. 1), поскольку при соответствующем выборе расстояния меж-



Фиг. 1

ду полюсами поверхности валков совпадут с координатными линиями:  $\pm\alpha_0$ , что существенно упрощает граничные условия. В биполярной системе координат рассматриваемая область деформации (фиг. 1) отображается в прямоугольную, что позволяет при численном решении пользоваться ортогональной сеткой с равномерным шагом по каждой из переменных. Координаты  $x$  и  $y$  декартовой системы связаны с  $\alpha$  и  $\beta$  биполярной системы следующим образом:

$$(1.5) \quad x = \frac{a \sin \beta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta}$$

Составляющие метрического тензора имеют вид

$$(1.6) \quad g_{\alpha\alpha} = g_{\beta\beta} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)^2} = h^2, \quad g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha} = 0$$

т. е. система координат ортогональна. Величины  $a$  и  $\alpha_0$  легко выражаются через геометрические параметры процесса  $R$  и  $h_0$ :  $a = \sqrt{2Rh_0}$ ,  $\alpha_0 = \ln \left( \frac{a+h_0}{a-h_0} \right)$ .

Пусть  $u$  и  $v$  — физические компоненты скорости, ортогональные соответственно  $\alpha$  и  $\beta$ , тогда уравнения (1.1), (1.2) имеют вид

$$(1.7) \quad \frac{\partial}{\partial \beta}(hu) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(hv) = 0$$

$$(1.8) \quad \rho \left\{ (uh) \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{h} \right) + (vh) \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) + h \frac{\partial h}{\partial \beta} \left[ \left( \frac{u}{h} \right)^2 - \left( \frac{v}{h} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + 2h \frac{\partial h}{\partial \alpha} \frac{uv}{h} \right\} = - \frac{\partial P}{\partial \beta} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \tau_{\beta\alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} \tau_{\beta\beta} + 2\tau_{\beta\alpha} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} + (\tau_{\beta\beta} - \tau_{\alpha\alpha}) \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \beta}$$

$$(1.9) \quad \frac{\lambda}{h^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\rho c_v}{h} \left( u \frac{\partial T}{\partial \beta} + v \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \tau^{mn} e_{mn} = 0$$

$$(1.10) \quad e_{\beta\beta} = 2 \left( \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{v}{h} \frac{\partial h}{\partial \alpha} \right), \quad e_{\beta\alpha} = e_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{v}{h} \right)$$

Проекция второго уравнения (1.1) на ось  $\alpha$  и компонента  $e_{\alpha\alpha}$  получают перестановкой индексов  $\alpha$ ,  $\beta$  и компонент скорости  $u$ ,  $v$  в (1.8), (1.10).

Решение системы уравнений (1.7)–(1.9) рассматривается в приближении смазочного слоя, поскольку расстояние между поверхностями валков много меньше длины области деформации, а вязкость большинства промышленных термопластов такова, что инерционными членами в уравнении движения можно пренебречь (приведенное число Рейнольдса [3] имеет порядок  $10^{-3}$ – $10^{-4}$ ).

В качестве малого параметра можно взять отношение ширины области деформации к ее длине  $\varepsilon = \alpha_0/\beta'$ . Введем новые переменные  $\xi = \beta/\beta'$ ,  $\eta = \alpha/\alpha_0$  и разложим обе компоненты скорости по степеням малого параметра  $\varepsilon$  (для валков, используемых в промышленности,  $\alpha_0 \approx 0.04 \div 0.05$ ,  $\beta' \approx 2.5$ ,  $\varepsilon \approx 0.015 \div 0.02$ )

$$(1.11) \quad u = V(u_0(\xi, \eta) + \varepsilon u_1(\xi, \eta) + \dots), \quad v = V(\varepsilon v_1(\xi, \eta) + \dots)$$

Параметр  $h$  удобно разложить по степеням отношения  $(\operatorname{ch} \alpha - 1) / (1 - \cos \beta)$ , имеющего порядок  $\varepsilon^2$

$$h = \frac{a}{1 - \cos \beta} \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{1 - \cos \beta} + \dots \right)$$

Подставляя (1.12) в систему уравнений (1.7)–(1.9) и пренебрегая членами порядка выше  $\varepsilon$ , получим

$$(1.12) \quad \frac{\partial}{\partial \beta} (hu) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (hv) = 0$$

$$(1.13) \quad \frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \mu \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) \right|^n \operatorname{sign} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) \right] \right\}, \quad \frac{\partial P}{\partial \alpha} = 0$$

$$(1.14) \quad \frac{\lambda}{h^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{\rho c_v}{h} \left( u \frac{\partial T}{\partial \beta} + v \frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \mu \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) \right|^{n+1} = 0$$

Граничные условия для случая, когда скорость вращения валков одинакова и валки имеют одинаковый радиус, запишутся следующим образом:

$$(1.15) \quad P=0, \quad T=T_0 \quad (\alpha < |\alpha_0|, \beta = \beta_+) \quad T=T_1 \quad (\alpha = \pm \alpha_0, \beta \geq \beta_+)$$

$$(1.16) \quad P=0, \quad \partial P / \partial \beta = 0 \quad (\beta = \beta_-)$$

Условие (1.16) служит для нахождения координаты выхода  $\beta_-$  и величины расхода. Второе граничное условие (1.16) удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [4]. Далее

$$(1.17) \quad u=V, \quad v=0 \quad (\alpha = \pm \alpha_0); \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u}{h} \right) = 0, \quad v=0 \quad (\alpha=0)$$

Зависимость реологических коэффициентов от температуры описывается уравнением

$$\mu(T) = \mu_0 \exp \{-b(T - T_0)\}, \quad n = n_0 \exp \{d(T - T_0)\}$$

где  $b, d$  — эмпирические коэффициенты [2].

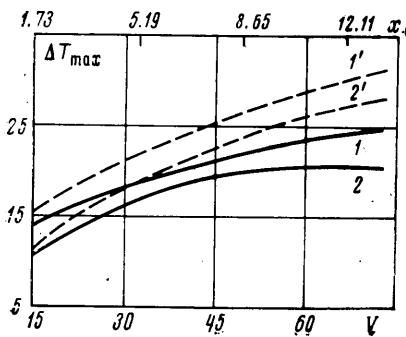
Решение системы уравнений (1.12)–(1.14) с граничными условиями (1.15)–(1.17) проводилось численно. Область деформации разбивалась двумерной сеткой, равномерной по каждой из переменных, с узлами  $(\alpha_i, \beta_j)$ . Решение искалось в узлах сетки в следующей последовательности: для некоторого фиксированного значения  $\beta$  ( $j = \text{const}$ ) по известному температурному распределению в этом сечении определялись гидродинамические параметры  $u_i^j, v_i^j, [\partial P / \partial \beta]^j$ , а затем для  $(j+1)$ -го слоя определялось распределение температуры из уравнения энергии (1.14), записанного в конечных разностях. Решение осуществлялось методом прогонки [5] последовательно в два этапа: сначала по рекуррентным формулам определялись прогоночные коэффициенты (прямая прогонка), а затем определялось распределение температуры (обратная прогонка) на  $(j+1)$ -м слое. Размерность сетки менялась от  $10 \times 100$  до  $100 \times 1000$ . Расчеты, представленные на фиг. 2, соответствуют сетке  $40 \times 200$ : дальнейшее измельчение шага не приводило к заметному повышению точности вычислений. Неизвестное значение координаты выхода  $\beta_-$  в первом приближении определялось при решении изотермической задачи (1.12), (1.13), а затем полученное значение уточнялось. На фиг. 2 и 3 изображено поведение максимальной температуры в области деформации в зависимости от скорости вращения валков (кривая 1), координаты входа материала  $x_+$  в область деформации (кривая 2), вязкости и индекса течения полимерного материала (кривые 3 и 4 соответственно). В качестве исходного рассматривался режим, при котором  $T_0 = T_1 = 40^\circ \text{C}$ , скорость вращения валков  $V = 38.0 \text{ см/сек}$ , радиус валков  $R = 30.5 \text{ см}$ , расстояние между валками  $2h_0 = 0.1 \text{ см}$ , реологические характеристики материала:  $n_0 = 0.2, \mu_0 = 4.15 \text{ кг} \cdot \text{сек}^n \cdot \text{см}^{-2}, b = 0.048, d = 0.005, x_+ = 5.19 \text{ см}$ .

При расчете варьировался один параметр, а остальные оставались фиксированными. Пунктиром приведены расчетные данные для изотермического режима.

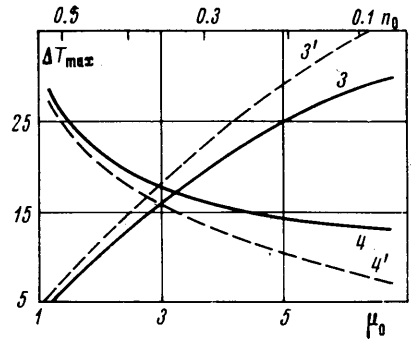
2. Представляет интерес аналитическое решение задачи, которое позволило бы делать предварительные оценки гидродинамических параметров и распределения температур в области деформации. Рассмотрим решение системы уравнений (1.12)–(1.14) в общем случае. Уравнение (1.12) проинтегрируем по  $\alpha$  с учетом граничного условия (1.17)

$$(2.1) \quad \int_0^{\alpha_0} (hu) d\alpha = Q = \text{const}$$

где  $2Q$  — расход материала. В выходном сечении  $h_* = h(\beta_-) = a/(1 - \cos \beta_-)$ . Благодаря второму условию (1.16) из (1.13) следует, что в выходном



Фиг. 2



Фиг. 3

сечении средняя скорость совпадает со скоростью вращения валков. Величина расхода может быть определена следующим образом:

$$(2.2) \quad Q = \langle u \rangle h_* \alpha_0 = V h_* \alpha_0$$

Координата выхода определяется из первого граничного условия (1.16). Уравнение (1.13) дважды интегрируется и подставляется в (2.2), тогда уравнение для  $\partial P / \partial \beta$  имеет вид

$$(2.3) \quad V \alpha_0 h_* = \int_0^{\alpha_0} V h d\alpha - \int_0^{\alpha_0} h^2 \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \text{sign} \left[ \frac{\partial P}{\partial \beta} \right] d\alpha d\alpha$$

Поскольку  $h$  в рассматриваемом приближении зависит только от  $\beta$ , то

$$(2.4) \quad \frac{\alpha_0 V (h_* - h)}{h^2} = \int_0^{\alpha_0} \int_{\alpha}^{\alpha_0} \alpha^m \left| \frac{1}{\mu} \frac{\partial P}{\partial \beta} \right|^m \text{sign} \left[ \frac{\partial P}{\partial \beta} \right] d\alpha d\alpha$$

Решить (2.4) аналитическим путем не представляется возможным, так как  $m$  и  $\mu$  — функции температуры.

Допустим, что реологические коэффициенты  $n$  и  $\mu$  от температуры не зависят. В этом приближении распределение давления в области деформации получается, если проинтегрировать (2.4), помня, что  $\partial P / \partial \beta$  — функ-

ция  $\beta$

$$(2.5) \quad P = \frac{\mu V^n (m+2)}{\alpha_0^{m+1}} \int_{\beta_*}^{\beta} \left| \frac{h-h_*}{h^2} \right| \text{sign}(h-h_*) d\beta$$

а обе компоненты скорости определяются следующим образом:

$$(2.6) \quad u = V \left( 1 - \frac{(h-h_*) (m+2) (\alpha_0^{m+1} - \alpha^{m+1})}{h(m+1) \alpha_0^{m+1}} \right)$$

$$v = \frac{V \alpha (\alpha_0^{m+1} - \alpha^{m+1}) h_{\beta}'}{(m+1) \alpha_0^{m+1} h}$$

Рассмотрим уравнение (1.6). Оценка числа Пекле показывает, что отношение величины конвективного переноса тепла и переноса в результате теплопроводности материала составляет величину порядка  $10^2 \div 10^3$  [3].

Таким образом, рассматриваемую область деформации для материалов, обладающих низкой теплопроводностью, можно условно разбить на две зоны [6]. В первой зоне, исключая область, непосредственно примыкающую к валку, баланс энергии поддерживается в основном конвективным переносом тепла вдоль потока и диссипативным выделением тепла. Во второй зоне, непосредственно примыкающей к валку, — тепловом пограничном слое, градиенты температуры значительны и теплопроводность играет существенную роль.

Введем безразмерные координаты, скорости и температуру

$$\xi = \frac{\beta - \beta_-}{\beta_- - \beta_+} = \frac{\beta - \beta_+}{\beta'}, \quad \eta = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad u^{\circ} = \frac{u}{V}, \quad v^{\circ} = \frac{v}{V}, \quad \theta = \frac{T - T_*}{T_0 - T_*}$$

тогда уравнение (1.14) будет иметь вид (величина  $T_*$  определяется ниже) [3]

$$(2.7) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} - \text{Pe} \frac{h}{h_*} u^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \text{Pe} \frac{\beta' h}{\alpha_0 h_*} v^{\circ} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \text{Pr Ec} f(\xi) \eta^{m+1} = 0$$

$$\theta = 1 \quad (\xi = 0), \quad \theta = \theta_1 \quad (\eta = \pm 1)$$

$$f(\xi) = \left( \frac{h}{h_*} \right)^{1-n} \left| 1 - \frac{h}{h_*} \right|^{n+1} (m+2)^{n+1}$$

$$\text{Pe} = \frac{\rho c_V h_* V \alpha_0^2}{\lambda \beta'}, \quad \text{Pr Ec} = \frac{(h_* \alpha_0)^{1-n} \mu V^{n+1}}{\lambda (T_0 - T_*)}$$

В силу симметрии задачи решение ищется только для верхней половины области деформации.

В первой зоне величиной  $\partial^2 \theta / \partial \eta^2$  можно пренебречь, если  $\text{Pe} \gg 1$ ; далее будем предполагать также, что  $\text{Pr Ec} \approx \text{Pe}$ , откуда определяется масштаб  $T_*$ . Компоненты скорости в ядре (см., например, [3]) заменим их средними по зазору значениями:  $\langle v \rangle = 0$ ;  $\langle u \rangle \alpha_0 h = V \alpha_0 h_*$ ,  $\langle u \rangle = V h_* / h$ . Тогда  $u^{\circ} = h_* / h$ ,  $v^{\circ} = 0$ . Уравнение (2.7), описывающее распределение температуры в первой зоне, будет иметь вид

$$(2.8) \quad \text{Pe} \frac{\partial \theta_c}{\partial \xi} = \text{Pr Ec} f(\xi) \eta^{m+1}$$

Принтегрировав по  $\xi$ , найдем распределение температуры в первой зоне  $\theta_c(\xi, \eta)$ .

Во второй зоне (тепловом пограничном слое) введем переменные

$$X = \xi, \quad Y = (1 - \eta) \sqrt{\text{Pe}}$$

Тогда уравнение (2.7) будет иметь вид

$$(2.9) \quad \text{Pe} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} - \text{Pe} \frac{h}{h_*} u^\circ \frac{\partial \theta}{\partial X} + \text{Pe} \frac{\beta' h v^\circ}{\alpha_0 h_* \sqrt{\text{Pe}}} \frac{\partial \theta}{\partial Y} + \text{Pr Ec} f(X) \left(1 - \frac{Y}{\sqrt{\text{Pe}}}\right)^{m+1} = 0$$

Компоненты скорости заменим их значениями вблизи границы:  $u^\circ = 1$ ,  $v^\circ$  найдем из (1.12)

$$v^\circ = -\frac{1}{Vh} \int_{\alpha}^{\alpha_0} (hV)_{\beta}' d\alpha = -\frac{h_x' \alpha_0 Y}{h \beta' \sqrt{\text{Pe}}}$$

Введем новые переменные  $(p, q)$ , чтобы освободиться от члена  $\partial \theta / \partial Y$  в уравнении (2.9)

$$(2.10) \quad p = Y h^{-1/\text{Pe}}, \quad q = \int_0^x h_* h^{-2/\text{Pe}-1} dX$$

При этом уравнение (2.9) перейдет в

$$(2.11) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2} - \frac{\partial \theta}{\partial q} + f(q) \left(1 - \frac{p h^{-1/\text{Pe}}}{\sqrt{\text{Pe}}}\right)^{m+1} = 0$$

$$\theta = 1 \quad (q=0), \quad \theta = \theta_1 \quad (p=0), \quad \theta = \theta_c \quad (p \rightarrow \infty)$$

Поскольку решение уравнения (2.11) описывает тепловые процессы в пограничном слое ( $p \approx 1$ ), то зависимость функции диссипации от поперечной координаты можно пренебречь.

Воспользуемся преобразованием Лапласа [7] по переменной  $q$  и положим  $\varphi = \theta - 1$

$$(2.12) \quad \Phi_{pp}'' - s\Phi + F(s) = 0, \quad F(s) = L[f(q)]$$

Общее решение этого уравнения

$$(2.13) \quad \Phi = \frac{F(s)}{s} + C_1(s) \exp(-\sqrt{s} p) + C_2(s) \exp(\sqrt{s} p)$$

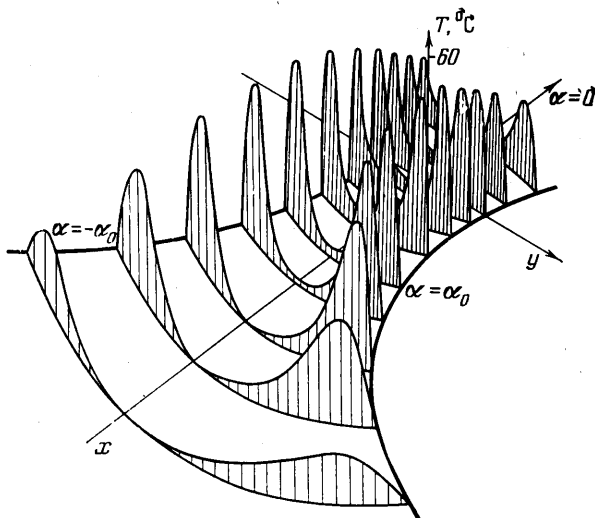
$C_2$  полагаем равным нулю, так как в противном случае решение будет неограниченно возрастать при  $p \rightarrow \infty$ . Постоянную интегрирования  $C_1(s)$  найдем из граничного условия при  $p=0$

$$(2.14) \quad \varphi = L^{-1} \left( \frac{F(s)}{s} + \left( \theta_1 - 1 - \frac{F(s)}{s} \right) \exp(-\sqrt{s} p) \right)$$

По таблицам находим оригиналы и, используя Дюамеля, напишем решение

$$(2.15) \quad \theta = 1 + \int_0^q f(q) dq + (\theta_1 - 1) \frac{p}{2\sqrt{\pi}q^3} \exp\left(-\frac{p^2}{4q}\right) - \\ - \int_0^q f(z) \operatorname{erfc}\left(\frac{p}{2\sqrt{q-z}}\right) dz$$

Распределение температур в области деформации для исходного режима (см. п. 1) приведено на фиг. 4 при условии равенства температур



Фиг. 4

поверхностей валков. В распределении температур наблюдаются значительные локальные приросты температуры вблизи поверхности валка, где велико диссипативное тепловыделение. Применительно к практической прокатке реальных пластиков это может привести к чрезмерному локальному перегреву материала и его разрушению. Сравнение расчетных величин, полученных путем численного решения и аналитическим методом, с экспериментальными данными [6] свидетельствует о допустимости используемых при решении упрощений.

Анализ распределения температуры в области деформации и зависимость прироста температуры от кинематических параметров (фиг. 2, 3) позволяют сделать вывод о необходимости учета тепловых процессов при определении характеристик течения аномально-вязких материалов между двумя вращающимися цилиндрами. Предположение об изотермическом характере течения приводит к ошибкам порядка 25% при расчете максимальных приростов температуры (фиг. 2), энергетических и силовых параметров.

Кроме того, такой подход не позволяет с достаточной степенью точности предсказывать сильно зависящие от температуры свойства термопласта после выхода из области деформации.

Заметим, что близкая по постановке задача рассматривалась в статье [8], однако исходная система уравнений отличалась, в частности, тем, что в уравнении энергии был отброшен член  $\gamma, \partial T / \partial y$ , кроме того координата выхода (отрыва)  $x_*$  не определялась в процессе решения.

В заключение авторы благодарят С. А. Регирера за критические замечания.

Поступила 12 VIII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Fredrickson A. G.* Principles and applications of rheology. Englewood Cliffs, N. Y., Prentice — Hall, 1964.
2. *Мак-Келви Д. М.* Переработка полимеров. М., «Химия», 1965.
3. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
4. *Петрушанский В. Ю., Бекин Н. Г., Сахаев А. И.* Исследование зависимости температурного поля в области деформации от технологических параметров процесса при каландровании резиновых смесей. Межвузовский сборник научных трудов. В сб. «Машины и технология переработки полимеров». Л., 1970.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
6. *Finston M.* Thermal effects in calendaring viscous fluids. J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, No. 1.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.
8. *Елизаров В. И., Сиразетдинов Т. К.* Течение неньютоновской жидкости в зазоре вращающихся цилиндров. Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1973, № 4.