

## КОНВЕКЦИЯ И ПЕРЕНОС ТЕПЛА В СФЕРИЧЕСКОМ СОСУДЕ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОМ ЖИДКОСТЬЮ, В УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕННОЙ ГРАВИТАЦИИ

С. А. НИКИТИН, В. И. ПОЛЕЖАЕВ

(Москва)

В работе [1] задача о естественной и термокапиллярной конвекции в сферическом сосуде, содержащем пузырь в условиях пониженной гравитации, т. е. при малых числах Бонда ( $Bo \ll 1$ ), рассмотрена в одном из предельных случаев, когда пузырь расположен в центре сосуда. Результаты [1] и опытные данные свидетельствуют, однако, о том, что при длительном подводе тепла извне в условиях пониженной гравитации наиболее вероятным должно быть положение пузыря у стенки сосуда. В данной работе, являющейся продолжением [1], изучается конвекция и перенос тепла в последнем случае. Рассматриваются возможные положения пузыря вверх и вниз сосуда относительно равнодействующей слабых массовых сил.

Показан вклад естественной и термокапиллярной конвекции в увеличение средней температуры свободной поверхности, определяющей рост давления в замкнутом сосуде при заданном потоке тепла. Сопоставляются темпы увеличения этой температуры в случаях, рассмотренных здесь и в работах [1-4], где дана более подробная библиография работ, посвященных изучению конвективного тепло- и массообмена в условиях пониженной гравитации.

**1. Постановка задачи.** К сфере, частично заполненной жидкостью и находящейся в ослабленном поле массовых сил, создающих ускорение  $g$ , подводится извне постоянный по времени и равномерно распределенный поток тепла (фиг. 1). Предполагается, что выполнено условие

$$Bo = \rho g R^2 / \sigma \ll 1$$

в соответствии с которым равновесная форма поверхности раздела близка к сферической ( $\rho$  — плотность жидкости,  $R$  — радиус сосуда,  $\sigma$  — поверхностное натяжение,  $Bo$  — число Бонда).

В неизотермической жидкости возможны движения гравитационного происхождения, связанные с изменением плотности в зависимости от температуры (естественная конвекция), и негравитационного происхождения, обусловленные изменением поверхностного натяжения в зависимости от температуры (термокапиллярная конвекция).

Предположения физического характера, связанные с формулировкой математической модели движения и переноса тепла в данной работе в основном те же, что и в [1, 2]. Ввиду медленности движений предполагается, что поверхность раздела недеформируема. Трением газа о жидкость пренебрегается. Как и в [1, 2], считается, что поток тепла от газа к жидкости равен нулю. Кипение жидкости не учитывается. Более полная модель процессов тепло- и массообмена (но для плоской поверхности раздела газ — жидкость) реализована в [3].

В сферической системе координат (фиг. 1, а) исходные уравнения конвекции в приближении Буссинеска для осесимметричных полей вихря  $\omega$ , функции тока  $\psi$ , температуры  $\theta$  запишем в следующем безразмерном

виде:

$$(1.1) \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\text{ctg } \varphi}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\omega}{r^2 \sin^2 \varphi} -$$

$$- \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \omega \left( \text{ctg } \varphi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) \right] \pm$$

$$\pm \text{Gr} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{r} \right), \quad \omega = \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi}{r}$$

$$(1.2) \quad \omega = \frac{1}{r \sin \varphi} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\text{ctg } \varphi}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \sin \varphi v_r, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -r^2 \sin \varphi v_\varphi,$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{\text{Pr} r^2} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \sin \varphi \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{\sin \varphi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right); \quad \theta = \frac{T - T^\circ}{qR} \lambda$$

Здесь  $T^\circ$  — начальная температура,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $\text{Gr} = g\beta R^4 q / \nu^2 \cdot \lambda$  — число Грасгофа, отнесенное к потоку тепла,  $\text{Pr} = \nu / a$  — число Прандтля.

Знаки  $\pm$  при подъемной силе в уравнении (1.1) соответствуют различным положениям поверхности раздела относительно направления массовых сил.

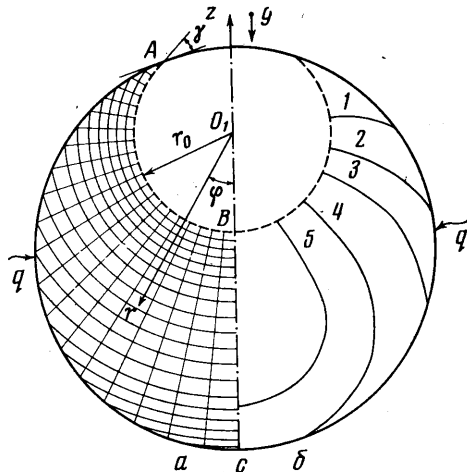
Граничные условия включают в себя условия прилипания ( $\psi=0$ ,  $\partial\psi/\partial n=0$ ) для скорости, условия второго рода  $\partial\theta/\partial n=1$  для безразмерной температуры на поверхности сферы и условия симметрии  $\psi=\omega=\partial\theta/\partial\varphi=0$ . На поверхности раздела условие для температуры  $\partial\theta/\partial n=0$ , динамическими условиями являются: равенство нулю нормальной составляющей скорости  $v_n=0$  и условие

$$(1.4) \quad \omega = \frac{\text{Mn}}{r_0} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r_0^2 \sin \varphi} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

определяющее термокапиллярные движения (см. также [1]). Здесь  $\text{Mn} = \sigma_0 \beta_0 R^2 q / \rho \nu^2 \lambda$  — число Марангони.

Критериальное уравнение для искомой средней температуры поверхности раздела имеет вид

$$(1.5) \quad \langle \theta_s \rangle = f(\text{Ra}, \text{Pr}, \text{Mn}, \text{Fo}, m, \gamma)$$



Фиг. 1

где  $m$  — степень заполнения сосуда жидкостью,  $\gamma$  — краевой угол смачивания,  $\text{Fo} = at/R^2$  — число Фурье.

2. Метод решения. Задача (1.1) — (1.4) решена методом сеток. Помимо известных трудностей численного решения уравнений Навье — Стокса, обсуждавшихся, в частности, в работах [1-4], в данном случае реше-

ние существенно осложняется из-за криволинейной геометрии области. Использована неравномерная разностная сетка, которая согласована с границей  $AC$  и строится с помощью координатных линий, выходящих из центра пузыря  $O_1$  и окружностей, которые проводятся из точек пересечения этих линий с границей  $AC$  (фиг. 1, *a*). Эта сетка ортогональна во внутренних узлах расчетной области и сравнительно проста. Недостаток, такой же как и для сетки, использованной в [4], состоит в том, что координатные линии неортогональны поверхности  $AC$  сферы; это приводит к дополнительным погрешностям в определении потока тепла, который рассчитывается по аналогии с [4] как равнодействующая потоков тепла  $q_r$  и  $q_\varphi$  по координатным линиям

$$(2.1) \quad q = \sqrt{q_r^2 + q_\varphi^2}$$

Для решения системы (1.1)–(1.3) на указанной сетке использована неявная разностная схема метода переменных направлений, подробно описанная в работе [1]. Модификация этой схемы в данной работе связана с использованием монотонной аппроксимации [5], которая в близкой ситуации применена ранее в [4]. Граничные условия для поля скорости аппроксимируются по аналогии с [1].

Основные расчеты выполнены на ЭВМ БЭСМ-4 на сетке  $21 \times 21$ . На начальном этапе процесса прогрева ( $Fo \leq 10^{-2}$ ) разностное решение проверялось по точному решению уравнения теплопроводности для сферы [6]. Проверки разностного решения при больших числах Фурье осуществлялись лишь интегрально. При  $Fo = 0.001$  невязка интегрального баланса, отнесенная к подводимому потоку тепла, при степени заполнения  $m = 0.88$  на сетке  $25 \times 25$  составляет 50% без учета конвекции. При  $Fo = 0.01$  величина невязки интегрального баланса равна 10%. Основная погрешность, определение которой затруднительно, связана, по-видимому, с расчетом переноса тепла в угловой зоне, в окрестности точки  $A$ . Отметим, что количественные результаты относятся к величине

$$(2.2) \quad \langle \Delta \theta_s \rangle = \langle \theta_s \rangle - \langle \theta_{s0} \rangle$$

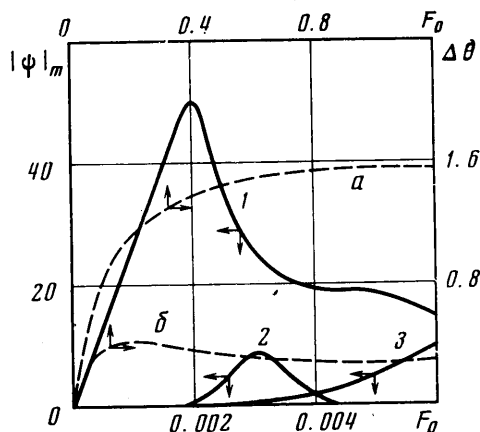
( $\langle \theta_{s0} \rangle$ ,  $\langle \theta_s \rangle$  – средние температуры свободной поверхности без учета конвекции и с учетом конвекции соответственно), при определении которой указанные погрешности в значительной мере исключаются.

**3. Особенности прогрева жидкости в режиме теплопроводности.** Этот режим прогрева может рассматриваться как предельный при  $Ra \rightarrow 0$ ,  $Mn \rightarrow 0$  и реализуется, например, при прогреве в условиях полной невесомости ( $g = 0$ ) в замкнутом сосуде с криогенной жидкостью, температура поверхности которой в результате фазовых переходов выравнивается. В отличие от рассматривавшихся случаев [1, 2, 4] задача теплопроводности здесь двумерна и сама по себе может быть объектом для исследования. Изотермы для одного из вариантов показаны на фиг. 1, *b* ( $m = 0.88$ ,  $Fo = 1.2$ ). Здесь  $1 - \theta = 5.6$ ,  $2 - \theta = \langle \theta_s \rangle = 5.25$ ,  $3 - \theta = 5$ ,  $4 - \theta = 4.7$ ,  $5 - \theta = 4.5$ .

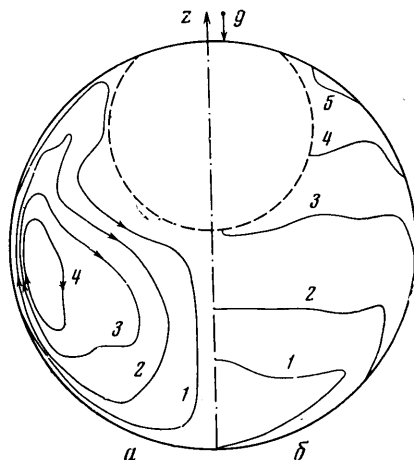
На фиг. 2 пунктирными линиями дано изменение во времени характерных тангенциальных ( $\Delta \theta_{AB}$  – линия *a*) и радиальных ( $\Delta \theta_{BC}$  – линия *b*) разностей температур. В силу геометрических особенностей наиболее нагрета угловая зона. Окрестность точки  $A$  (граница которой отмечена линией 2 на фиг. 1, *b*) перегрета – температура этой зоны выше средней температуры поверхности жидкости в данный момент времени; при прогреве криогенной жидкости в замкнутом сосуде с самонадувом такое состояние метастабильно и должно смениться интенсивным кипением. Распространение тепла в тангенциальном и радиальном направлениях характеризуется двумя временами прогрева жидкости (фиг. 2). Время уста-

повления квазистационарного (т. е. стационарного относительно разностей температур) режима для  $\Delta\theta_{BC}$  составляет  $Fo \sim 0.5$ ; по  $\Delta\theta_{AB}$  это время значительно больше. Перегрев угловой зоны, связанный с конфигурацией жидкости, и наличие значительной разности температур вдоль поверхности определяют особенности естественной и термокапиллярной конвекции.

4. Естественная и термокапиллярная конвекция в случае, когда пузырь находится в верхней части сосуда. Режимы конвекции рассмотрим при следующих значениях параметров:  $Ra=3 \cdot 10^7$ ,  $Mn=10^4$ ,  $Pr=3$ ,  $m=0.88$ ,  $\gamma=46^\circ$ ,  $Fo=6 \cdot 10^{-3}$ , что соответствует, например, хранению жидкости в хорошо теплоизолированном сосуде ( $q \sim 1$  вт/м<sup>2</sup>) с характерным размером  $R \sim 1$  м в условиях пониженной гравитации ( $g/g_0=10^{-5} \div 10^{-6}$ ).



Фиг. 2



Фиг. 3

Изменение во времени интенсивности конвекции — максимального значения функции тока  $|\psi|_m$ , иллюстрирующее режимы прогресса при наличии конвекции, дано сплошными линиями на фиг. 2 (1 — основное движение, 2 — вторичное движение в ядре, 3 — вторичное движение в угловой зоне).

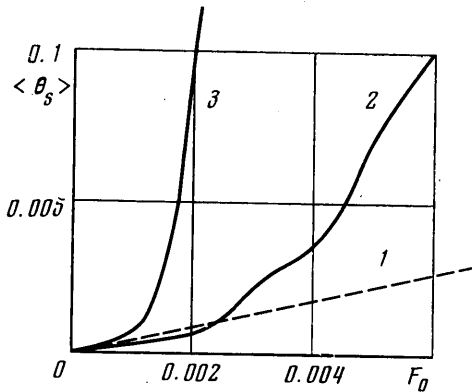
Линии тока и изотермы поля температур при числе  $Fo=6 \cdot 10^{-3}$  даны на фиг. 3, а (1- $\psi=1$ , 2- $\psi=4$ , 3- $\psi=7$ , 4- $\psi=10$ ) и фиг. 3, б (1- $\theta=0.05$ , 2- $\theta=0.1$ , 3- $\theta=0.2$ , 4- $\theta=\langle\theta_s\rangle=0.3$ , 5- $\theta=0.4$ ).

Влияние естественной конвекции связано с выносом тепла от всей нагреваемой поверхности сферы в верхнюю угловую зону с последующим подводом тепла к поверхности раздела. Действие термокапиллярной конвекции, интенсивность которой значительна благодаря большим разностям температур  $\Delta\theta_{AC}$ , сосредоточено в непосредственной близости от поверхности и связано с выравниванием температур. Как показывают результаты расчетов, оба этих типа конвекции в отдельности приводят к увеличению средней температуры поверхности раздела.

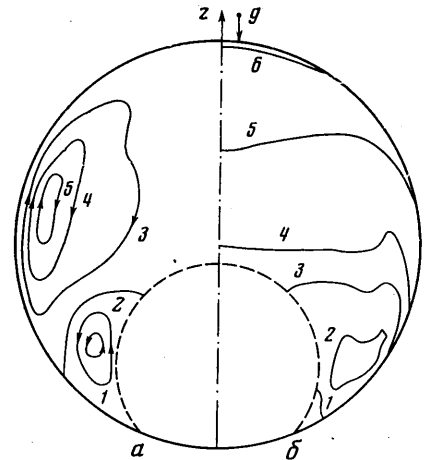
Так как направления токов естественной и термокапиллярной конвекции в данном случае (для жидкостей с отрицательным значением производной  $\partial\sigma/\partial T$ ) совпадают, то при совместном действии этих двух типов конвекции в случае, когда пузырь находится в верхней части сосуда, средняя температура поверхности раздела быстро возрастает.

Из фиг. 4 видно, что конвективный добавок, определяемый формулой (2.2), как и в рассмотренных ранее случаях [1-4], положителен (1- $\langle\theta_s\rangle$ , 2 — пузырь вниз, 3 — пузырь вверх).

**5. Пузырь в нижней части сосуда.** Это положение пузыря возможно, если силы плавучести уравновешиваются силами, возникающими при термокапиллярном обтекании пузыря. Типичная картина линий тока и изотерм поля температур для этого случая при совместном действии естественной и термокапиллярной конвекции дана на фиг. 5, а ( $1-\psi=-4$ ,  $2-\psi=0$ ,  $3-\psi=4$ ,  $4-\psi=8$ ,  $5-\psi=12$ ) и фиг. 5, б ( $1-\theta=\langle\theta_s\rangle=0.1$ ,  $2-\theta=0.05$ ,  $3-\theta=0.075$ ,  $4-\theta=0.1$ ,  $5-\theta=0.2$ ,  $6-\theta=0.3$ ) соответственно (значения остальных параметров те же, что и в п.4). В отличие от случая, рассмотренного в п.4, направления токов естественной и термокапиллярной конвекций противоположны. Вклад термокапиллярной конвекции



Фиг. 4



Фиг. 5

в случаях, рассматриваемых здесь и в п.4, один и тот же; основная особенность прогрева при расположении пузыря внизу состоит в том, что поверхность раздела находится как бы «в тени» по отношению к токам естественной конвекции, которые выносят тепло вверх. По характеру изотерм на фиг. 5, б видно, что при этом в верхней части сферы образуется типичная картина температурного расслоения (см. [1]). Благодаря этой особенности обтекания пузыря в начальный момент времени ( $Fo < 0,0025$ ) средняя температура поверхности  $\langle\theta_s\rangle$ , как видно из фиг. 4, может быть даже несколько ниже, чем температура  $\langle\theta_{s0}\rangle$  при отсутствии конвекции, т. е. конвективный добавок, определяемый формулой (2.2) отрицателен. Отметим, что из всех рассмотренных ранее случаев прогрева [1-4, 7] это пока единственный результат, относящийся к сравнительно редкому и кратковременному режиму обтекания «перевернутой» свободной поверхности. С течением времени, т. е. после развития циркуляции во всем объеме, температура  $\langle\theta_s\rangle$ , как видно из фиг. 4, становится выше  $\langle\theta_{s0}\rangle$ .

В заключение сопоставим темпы увеличения средней температуры поверхности жидкости при трех возможных положениях пузыря в сферическом сосуде по результатам данной работы и [1]. Наименьший темп увеличения температуры  $\langle\theta_s\rangle$  (или наименьшая «величина неравновесности»  $\langle\theta_s\rangle/\langle\theta\rangle$ ) реализуется при положении пузыря в центре сосуда: в режиме развитой конвекции при длительном прогреве температура  $\langle\theta_s\rangle$  в этом случае, согласно [1], близка к среднemasовой температуре  $\langle\theta\rangle$ . Наибольший темп увеличения температуры  $\langle\theta_s\rangle$ , как следует из фиг. 4, реализуется в случае, когда пузырь примыкает к стенке сосуда и

расположен сверху; промежуточное положение занимает случай, когда пузырь находится внизу сосуда.

Важно отметить, что темп увеличения температуры поверхности, т. е. величина  $\langle \theta_s \rangle / \langle \theta \rangle$  в случае  $Bo \rightarrow 0$  и при расположении пузыря сверху, как следует из сопоставления результатов работ [1-4, 7], при прочих равных условиях заметно выше, чем при больших числах  $Bo$  (плоская поверхность раздела газ — жидкость). При этом следует помнить, что все эти выводы получены в предположении, что перетоки тепла по оболочке сосуда и кипение жидкости отсутствуют.

Поступила 25 VIII 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кускова Т. В., Полежаев В. И. Численное исследование движения неизотермической вязкой жидкости, содержащей пузырь, в условиях пониженной гравитации. В сб. «Вычислительные методы и программирование», вып. 23, М., Изд-во МГУ, 1974.
2. Полежаев В. И. Термокапиллярная конвекция жидкости в цилиндрическом сосуде при заданном подводе тепла. В сб. «Некоторые применения метода сеток в газовой динамике», вып. 3, М., Изд-во МГУ, 1971.
3. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен в замкнутом осесимметричном сосуде с криволинейной образующей при наличии поверхности раздела фаз и фазовых переходов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 6.
4. Вальциферов Ю. В., Полежаев В. И. Конвективный теплообмен и температурное расслоение в сфере, полностью заполненной жидкостью, при заданном потоке тепла. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 5.
5. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
6. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М., «Высшая школа», 1967.
7. Полежаев В. И. Конвективное взаимодействие в цилиндрическом сосуде, частично заполненном жидкостью, при подводе тепла к боковой и свободной поверхностям и дну. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 4.