

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА УСТАНОВЛЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА
НЕРАВНОВЕСНЫМ ПОТОКОМ

К. Г. САВИНОВ, В. П. ШКАДОВА

(Москва)

Настоящая статья имеет целью привести новые данные по расчету течения углекислого газа около конуса, затупленного по сфере. В связи с хорошими аэродинамическими характеристиками это тело привлекает в последнее время внимание многих исследователей [1, 2]. Излагается методика расчета неравновесных течений вблизи головной части затупленного тела, использующая в качестве основы свой метод установления и наиболее важные неравновесные свойства в дозвуковой области течения.

Отход ударной волны на оси симметрии для неравновесных течений и течений совершенного газа с различными показателями адиабаты κ , за ударной волной оказывается одинаковым, если совпадают значения интегральной плотности ρ' на оси [3, 4], где ρ' — интеграл от $\rho(\rho_\infty)^{-1}$ на отрезке $0 \leq \xi \leq 1$. Это позволяет для каждого конкретного случая полета M_∞ , p_∞ , T_∞ , R_0 выбирать «эффективное» значение κ^* , которое в определенном смысле моделирует неравновесное течение. Определяется κ^* из решения одномерной системы неравновесных уравнений в предположении линейного распределения расхода вдоль оси симметрии $\rho u = (\rho u)_\infty [1 - (x/\epsilon_0)]$. Методом итераций подбирается такое ϵ_0 , чтобы была удовлетворена универсальная зависимость $\epsilon_0 \rho' = k$ (в случае сферы, сегмента с углом полураствора 30° , конуса, затупленного по сфере, с углом полураствора 60° $k=0.8$ для гиперзвуковых течений [5]). При этом определяется ρ' . Эффективный показатель адиабаты κ^* за ударной волной удобно определить по формуле $\kappa^* = (\rho' + 1) / (\rho' - 1)$.

Далее методом установления при $\kappa_s = \kappa^*$ получаем решение для течения совершенного газа; при этом ϵ_0 на оси будет с хорошей точностью совпадать со значением ϵ_0 , найденным из одномерного рассмотрения. Полученное поле значений для давления p и скорости V в потоке используется в качестве начального приближения для исследования системы уравнений неравновесного потока. Такой подход более экономичен по сравнению с применяемыми методами [6, 7].

1. Запишем систему уравнений пространственного невязкого течения реагирующей смеси совершенных газов

$$(1.1) \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} V = 0$$
$$\frac{dV}{dt} + \rho^{-1} \operatorname{grad} p = 0.$$
$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho \frac{d}{dt} \left(h + \frac{V^2}{2} \right) = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{d\gamma_i}{dt} = \omega_i(p, \rho, \gamma_i), \quad h = \sum_1^n h_i(T) \gamma_i, \quad p = R\rho T \sum_1^n \gamma_i$$

$$(i, j=1, 2, \dots, n)$$

Если уравнение сохранения энергии переписать с учетом системы (1.2)

$$(1.3) \quad \frac{dp}{dt} - \kappa_j \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \kappa_j p \Phi$$

то видно, что влияние неравновесных процессов на газодинамические параметры проявляется через две переменные функции $\kappa_j(T, \gamma_i)$ и $\Phi(p, \rho, \gamma_i)$

$$(1.4) \quad \kappa_j = \frac{m C_{pj}}{m C_{pj} - 1}, \quad C_{pj} = \sum_1^n \frac{dh_i(T)}{dT} \gamma_i,$$

$$\Phi = \sum_1^n \left(m - \frac{h_i}{C_{pj} T} \right) \omega_i, \quad m = \left(\sum_1^n \gamma_i \right)^{-1}$$

Применим для решения следующий процесс итераций. Пусть будут заданы κ_j и Φ как функции только пространственных переменных, не зависящие от времени. Тогда систему (1.1), использующую уравнение энергии (1.3), можно решить методом установления [8]. Система (1.1) интегрируется по времени до полного выхода на стационарный режим, соответствующий заданному полю неравновесных функций κ_j и Φ .

Полученные значения p и V и интеграл Бернулли используются для замыкания системы уравнений (1.2). Стационарное решение этой системы находится любым из неявных методов, разработанных для реагирующих смесей, например [9]. Результатом решения будет новое поле значений κ_j и Φ . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока различия между решениями и для системы (1.1), и для системы (1.2) будут малыми.

Начальное распределение κ_j и Φ для ускорения итераций должно быть задано в каждой рассматриваемой задаче на основе разумных соображений, отражающих геометрию задачи и физические свойства конкретной смеси газов.

Применим эту методику для решения конкретной задачи обтекания лобовой поверхности затупленного тела. Введем сферическую систему координат (r, θ, ψ) , пронормируем толщину ударного слоя переходом к переменной $\xi = (r - r_r) / (r_s - r_r)$, где $r_s(\theta, \psi)$ и $r_r(\theta, \psi)$ — уравнения ударной волны и тела соответственно. Искомые функции отнесем к параметрам набегающего потока, линейные размеры — к радиусу затупления на оси симметрии тела. Граничные условия поставим на ударной волне (выполнение основных законов сохранения массы, импульса и энергии при постоянном составе газа на фронте волны $\gamma_{is} = \gamma_{i\infty}$) и на поверхности тела (условие непротекания). Расчетную область ограничим конусом $\theta = \theta_k$, во всех точках которого нормальная составляющая скорости больше «замороженной» скорости звука. Ввиду наличия плоскости симметрии тела в пространственном случае задача решается для половины ударного слоя $0 \leq \psi \leq \pi$ ($\psi = 0$ соответствует подветренной стороне).

Разностная сетка характеризуется следующими параметрами: число шагов в направлении ξ равно 10, в направлении θ — 20 и в направлении ψ — 3. Для аппроксимации газодинамических параметров в направлении ψ применяются тригонометрические функции, что позволяет уменьшить число шагов по ψ без потери точности.

Алгоритм метода установления, который используется для решения системы (1.1), подробно описан для случая совершенного газа в [8]. Его обобщение на случай переменных κ_f и Φ не представило никаких трудностей.

Система (1.2) аппроксимировалась по неявной двухточечной схеме [9]

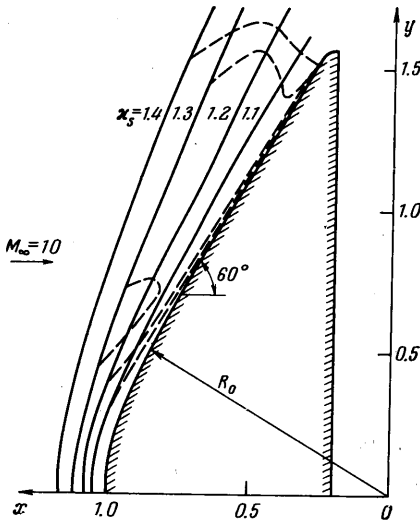
$$V_n \frac{\gamma_{i,n+1} - \gamma_{i,n}}{\Delta s} = (1 - \sigma) \omega_{i,n} + \sigma \omega_{i,n+1}$$

$$\sum_1^n h_i(\tau_{n+1}) \gamma_{i,n+1} + A \frac{V_{n+1}^2}{2} = H_0, \quad A = 2h_\infty + \kappa_\infty M_\infty^2$$

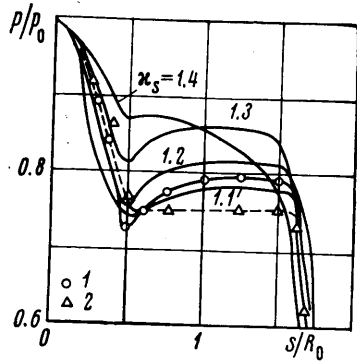
(1.5)

$$p_{n+1} = p(s_{n+1}), \quad V_{n+1} = V(s_{n+1}), \quad \rho_{n+1} = A p_{n+1} T_{n+1}^{-1} \left(\sum_1^n \gamma_{i,n+1} \right)^{-1}$$

где σ — весовая функция, $\sigma = 1/2$ обеспечивает второй порядок точности аппроксимации системы (1.2). Интегрирование системы (1.5) проводится на элементе линии тока, приходящей в точку (ξ_m, θ_i) расчетной сетки системы (1.1) от соседнего слоя



Фиг. 1



Фиг. 2

$\xi_{m-1} = \text{const}$. В случае осесимметричных течений координата точки пересечения линии тока с линией $\xi_{m-1} = \text{const}$ определяется с помощью значений функции тока Ψ_0 ; в трехмерном случае численно интегрируется уравнение линии тока (в плоскости симметрии)

$$(1.6) \quad \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{r}{\varepsilon} \frac{u}{v} - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial r_r}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon = r_s - r_r$$

назад от точки (ξ_m, θ_i) до слоя $\xi_{m-1} = \text{const}$. Шаг интегрирования Δs вдоль найденного элемента линии тока выбирается различным в зависимости от условий течения; в случае течений, близких к равновесным, он будет достаточно мелким вблизи ударной волны.

Для трехмерных течений значения κ_f и Φ в других меридиональных плоскостях определяются с помощью тригонометрических аппроксимаций по найденным их значениям в соответствующих узлах плоскости симметрии

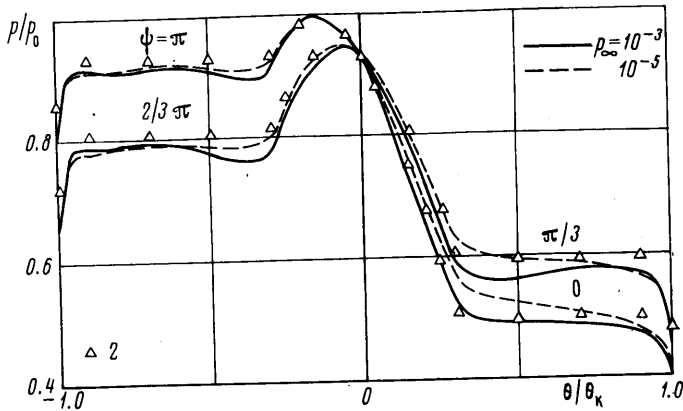
$$(1.7) \quad f(\xi, \theta, \psi) = a + b \cos \psi, \quad f = \kappa_f, \Phi$$

$$a = 1/2 [f(\xi, \theta, 0) + f(\xi, \theta, \pi)], \quad b = 1/2 [f(\xi, \theta, 0) - f(\xi, \theta, \pi)]$$

Правомерность применения такой аппроксимации для κ_f и Φ подтверждается расчетами, проведенными в [10], где исследовалось течение неравновесного воздуха под углом атаки около тел сегментальной формы. В этой работе значения κ_f и Φ , рассчитанные во всех плоскостях ψ , изменяются по ψ плавно и хорошо аппроксимируются указанными формулами (1.7).

Как показывает сравнение проведенных по изложенной методике расчетов течения около сферы с решениями [11], достаточно двух итераций, чтобы получить нужную точность. Результаты последующих итераций по всем параметрам в поле течения отличаются в третьем, четвертом знаках.

2. Рассмотрим влияние неравновесных процессов на течение около затупленного 120-градусного конуса. Систематические расчеты осесимметричного обтекания с разными показателями адиабаты за ударной волной $\kappa_s = 1.4 \div 1.1$ позволили проследить изменение качественной картины течения около тела выбранной формы. Отметим, что этот интервал изменения

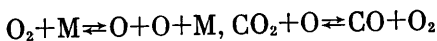
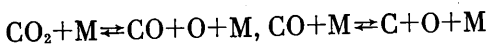


Фиг. 3

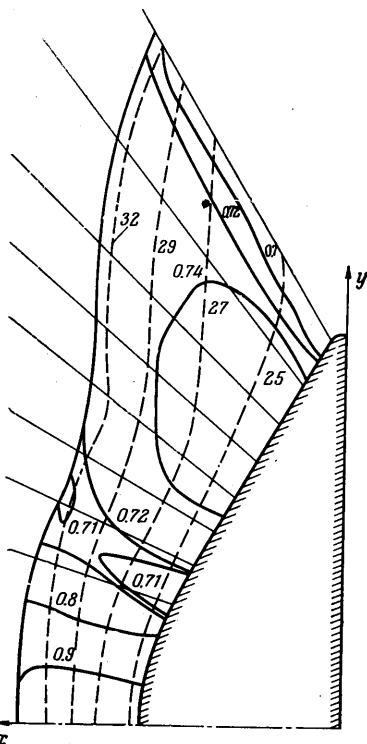
κ_s моделирует неравновесное течение и воздушной смеси, и смеси $\text{CO}_2\text{--N}_2$ в предположении, что основные кинетические потери на все физические превращения в ударном слое происходят во фронте ударной волны.

На фиг. 1 показано взаимное расположение ударных волн и звуковых линий. Течение, полностью дозвуковое около профиля в случае обтекания газом с $\kappa_s = 1.4$, переходит практически в сверхзвуковое при $\kappa_s = 1.1$, кроме узкой области, прилегающей к телу и к оси. Наличие точки сопряжения на профиле делает этот переход весьма немонотонным. При $\kappa_s = 1.3\text{--}1.25$ вблизи ударной волны имеется местная сверхзвуковая область, которая затем исчезает при $\kappa_s = 1.25$. Эта картина течения аналогична влиянию угла раствора конуса на течение, отмеченному в [2], и является, конечно, результатом взаимодействия ударной волны с волнами сжатия, распространяющимися от точки сопряжения контура. Ударная волна имеет точку перегиба. Сложная зависимость давления p/p_0 вдоль поверхности тела для различных κ_s приведена на фиг. 2.

В полной постановке рассматривалось неравновесное течение углекислого газа CO_2 . За ударной волной образуется реагирующая смесь совершенных газов, состоящая из пяти компонент (CO_2 , CO , O_2 , O , C). Атомарные компоненты C , O обладают только поступательными степенями свободы; вращения и колебания всех молекул предполагаются возбужденными равномерно с поступательным движением молекул газа. Химические процессы между компонентами смеси описываются четырьмя реакциями



Константы скоростей реакций в прямом направлении, использованные в расчетах, взяты из [12]. Выражения для правых частей релаксационных уравнений системы (1.2) выписываются по основным законам кинетической теории газов; удельные энтальпии $h_i(T)$ соответствуют модели молекулы «жесткий ротатор — гармонический осциллятор».



Фиг. 4

В широком диапазоне условий набегающего потока течение близко к течению газа с $\kappa_s = 1.15 - 1.1$. Подробные данные представим для случая $M_\infty = 20$, $T_\infty = 140^\circ \text{K}$, $R_0 = 100 \text{ см}$, $p_\infty = 10^{-3} \div 10^{-5} \text{ атм}$. Для осесимметричного случая давление по поверхности тела представлено на фиг. 2 (кривая 1 соответствует варианту $p_\infty = 10^{-4} \text{ атм}$), в пространственном случае при угле атаки $\alpha = 15^\circ$ — на фиг. 3. Величина ложки давления в точках сопряжения меняется по углу ψ , слабая зависимость от p_∞ отражает общеизвестный факт слабого влияния степени неравновесности процесса на давление в потоке.

Распространение локальных возмущений отдельных функций, связанное с формой тела и с наличием химических реакций, можно проследить на фиг. 4, где приведены изобары (сплошные линии) и изотермы (пунктирные линии). Видно, что геометрия тела определяет продольные градиенты давления в потоке; поперечные его градиенты около данного профиля практически несущественны, вдоль конической части давление почти постоянно и отличается от значения, полученного из теории Ньютона, не больше чем на 7% (на

фиг. 2 и 3 отношения давлений p/p_0 , вычисленные по теории Ньютона, соответствуют кривой 2).

В то же время температурное поле ударного слоя формируется в результате физических процессов, характер и скорости протекания которых определяются в основном условиями набегающего потока. Поэтому в неравновесном ударном слое продольные градиенты температуры малы, а поперечные весьма существенны, особенно в зонах, расположенных около ударной волны и тела. В пространственном случае аналогичное поведение T устанавливается приблизительно с середины ударного слоя вблизи тела.

На поведение плотности в потоке оказывают большое влияние химические процессы, что приводит к появлению резких градиентов $\rho(\xi)$ в областях, близких к телу и к волне; она же следует за изменением давления в потоке, что вызывает существенные ее продольные градиенты. Поведение неравновесных концентраций в ударном слое в основном определяется изменением неравновесной температуры, поэтому структура ударного слоя вдоль поверхности тела однородна по составу газа.

В заключение авторы благодарят В. П. Стулова за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kyriss C. L.* A time – dependent solution for the blunt body flow of a chemically reacting gas mixture. AIAA paper, 1970, No. 771.
2. *Красильников А. В., Никулин А. Н., Холодов А. С.* Некоторые особенности обтекания затупленных по сфере конусов с большими углами полураствора при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, № 2.
3. *Стулов В. П.* О законе подобия при сверхзвуковом обтекании затупленных тел. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
4. *Шкадова В. П.* Околоравновесное обтекание тел вращения сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.
5. *Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П.* Исследование сверхзвукового обтекания сферы воздухом и углекислым газом при термохимическом равновесии. Докл. АН СССР, 1964, т. 159, № 1.
6. *Косоруков А. Л.* Обтекание головной части затупленного тела с учетом неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
7. *Li C. P.* Time – dependent solutions of nonequilibrium airflow past a blunt body. AIAA paper, 1971, N 595.
8. *Липницкий Ю. М., Михайлов Ю. Я., Савинов К. Г.* Исследование пространственного сверхзвукового обтекания головной части затупленных тел методом установления. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1972, № 19.
9. *Стулов В. П., Шкадова В. П.* Об одномерном неравновесном течении воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 2.
10. *Шкадова В. П.* Трехмерное обтекание лобовой части затупленных тел неравновесным сверхзвуковым потоком воздуха. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1970, № 5.
11. *Стулов В. П., Турчак Л. И.* Неравновесные химические реакции в ударном слое при обтекании сферы смесью углекислого газа, азота и аргона, Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
12. *Громов В. Г.* Расчет вязкого обтекания сферы гиперзвуковым потоком газовой смеси, содержащей углекислый газ. Науч. тр. Ин-та механ. МГУ, 1972, № 19.