

**О НЕЛИНЕЙНОМ МЕХАНИЗМЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН  
В ОГРАНИЧЕННЫХ СИСТЕМАХ ПРИ РЕЗОНАНСЕ  
ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

**Н. Р. СИБГАТУЛЛИН**

(Москва)

Для изучения эффектов слабых нелинейных взаимодействий представляют интерес резонаторы, в которых размеры системы кратны длине периодически возбуждаемой волны, так как в этих случаях линейная теория дает бесконечную амплитуду. Теоретически и экспериментально газодинамические волны, возбуждаемые периодическим движением поршня в закрытой трубе вблизи резонанса были изучены в [1-8].

Малые нелинейные эффекты в плазме, возникающие при распространении волн в протяженных системах в рамках гидродинамического и кинетического подходов описаны в [9]. В [10] было показано образование поперечных ударных волн при резонансе поперечных колебаний в слое (речь шла об резонансе медленных магнито-гидродинамических волн в слое слабосжимаемой жидкости, а также поперечных волн в нелинейно-упругом теле). При изучении возбуждения продольных колебаний поперечными в [10] предполагалось, что скорость продольных волн много больше скорости поперечных волн.

Ниже рассматриваются нелинейные колебания плотности газа и магнитного поля в слое идеально проводящего газа между двумя плоскими неподвижными параллельными границами, через одну из которых пропускается периодический электрический ток, другая же пластина предполагается диэлектриком. Внешнее магнитное поле считается перпендикулярным граничным плоскостям. Вблизи резонанса поперечные колебания перестают быть стоячими и возбуждают звуковые волны. Особенно ярким взаимодействием волн будет в случае, когда альфвеновская и звуковая скорости будут близки друг к другу (в другой связи взаимодействие волн с одинаковыми характеристиками было изучено в [11]). В работе для этого случая прослеживается эволюция формы периодических колебаний плотности и магнитного поля (в некоторых диапазонах с ударными магнито-гидродинамическими волнами) с изменением частоты электрического тока, возбуждающего колебания.

1. Для одномерных плоских движений уравнения магнитной гидродинамики принимают вид ([12])

$$(1.1) \quad \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} \left( p + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} \right)$$

$$(1.2) \quad \rho \left( \frac{\partial v_{\perp}}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_{\perp}}{\partial x} \right) = \frac{H_x}{4\pi} \frac{\partial H_{\perp}}{\partial x}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial H_{\perp}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (H_{\perp} v_x) = H_x \frac{\partial v_{\perp}}{\partial x}$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) = 0, \quad H_x = \text{const}$$

Здесь индекс  $\perp$  у векторных величин  $H_{\perp}$  и  $v_{\perp}$  указывает на поперечные составляющие векторов  $H$  и  $v$ .

Отметим, что в работе [10] показано, что (даже если учесть обратимую намагниченность среды  $\mu = \mu(\rho, H^2)$ ) уравнения магнитной гидродинамики

(1.1) — (1.4) после переобозначений совпадают с уравнениями одномерной динамики изотропного нелинейно-упругого тела.

Выписанная система имеет частные решения в виде простых волн: альфвеновской, быстрой и медленной магнитогиродинамических волн при наличии постоянной составляющей поперечного магнитного поля [12].

Вращательные альфвеновские волны исключим из рассмотрения, считая, что колебания магнитного поля происходят в фиксированной плоскости, проходящей через направление распространения. Если постоянная составляющая у  $H_{\perp}$  стремится к нулю, то скорость быстрой магнитогиродинамической волны стремится к большей из скоростей  $a_A^2 = H_x^2 / 4\pi\rho_0$ ,  $a_0^2 = \partial p / \partial \rho|_s$ , а скорость медленной — к меньшей из этих скоростей. Для упрощения терминологии далее будем говорить о взаимодействии поперечной и звуковой волн. Поэтому поперечные волны будут либо быстрыми, либо медленными магнитогиродинамическими волнами соответственно при  $a_A > a_0$  или при  $a_A < a_0$ .

Перепишем систему (1.1) — (1.4) в лагранжевых координатах  $t, \xi$ : пусть  $\xi$  совпадает с координатой  $x$  в отсутствие волн, когда плотность газа равна  $\rho_0$ . Уравнение неразрывности при этом принимает вид:  $\rho(d\xi + dw) = \rho_0 d\xi$ , где  $w = x - \xi$ . Исключая из уравнений (1.2) и (1.3)  $v_{\perp}$ , из системы (1.1) — (1.4) получим

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) H_{\perp} \right] = a_A^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} H_{\perp}, \quad \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} w = - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( p + \frac{H_{\perp}^2}{8\pi} \right)$$

Считая движение газа изэнтропическим, для зависимости давления от удельного объема  $V = \rho^{-1}$  воспользуемся формулой

$$(1.6) \quad p = p_0 - (a_0/V_0)^2 (V - V_0) + b_0^2 (2V_0^3)^{-1} (V - V_0)^2$$

В газе с произвольным уравнением адиабаты уравнение (1.15) аппроксимирует адиабату с точностью до членов второго порядка включительно. В случае возникновения ударных волн будем считать их слабыми, т. е. пренебрегать разогревом газа при переходе через разрывы.

Искомая система, получаемая из (1.5) при помощи (1.6), имеет вид

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h - a_A^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} h &= - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( h \frac{\partial w}{\partial \xi} \right), \quad h = \frac{H_{\perp}}{H_x} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - a_0^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} w &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ b_0^2 \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + a_A^2 h^2 \right] \end{aligned}$$

Будем разыскивать периодические решения системы уравнений (1.7), удовлетворяющие граничным условиям

$$(1.8) \quad h=0 \quad (\xi=0), \quad h=h_0 \sin \omega t \quad (\xi=L), \quad w=0 \quad (\xi=0), \quad w=0 \quad (\xi=L)$$

Условия (1.8) соответствуют тому, что границы слоя предполагаются неподвижными, через границу  $\xi=L$  пропускается периодический электрический ток, граница  $\xi=0$  предполагается диэлектриком.

Вдали от резонанса как по скорости звука, так и по альфвеновской скорости, т. е. если  $|2\omega L/a_0 - n\pi| \gg \varepsilon$ ,  $|\omega L/a_A - m\pi| \gg \varepsilon$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа, решение уравнений (1.7) при малой амплитуде тока на границе  $\xi=L$  с граничными условиями (1.8) будет описываться стоячей поперечной волной с амплитудой порядка  $\varepsilon$ , которая вызовет появление газодинамических колебаний порядка  $\varepsilon^2$

$$(1.9) \quad h = h_0 \sin \omega t \lambda(\xi) / \lambda(L)$$

$$(1.10) \quad w = h_0^2 a_A (16\omega\lambda^2(L))^{-1} \{-a_A^2 a_0^{-2} [\lambda(2\xi) - \xi L^{-1} \lambda(2L)] + \\ + a_A^2 (a_0^2 - a_A^2)^{-1} \cos 2\omega t [\lambda(2\xi) - \\ - \lambda(2L) \sin(2\omega\xi/a_0) / \sin(2\omega L/a_0)]\} \\ \lambda(\xi) = \sin(\omega\xi/a_A)$$

В окрестности резонанса по альфвеновской скорости  $|\omega L/a_A - n\pi| \ll \varepsilon$  формула (1.9) не описывает правильно поведение колебаний, так как амплитуды колебаний магнитного поля согласно линейной теории неограниченно возрастают. Аналогичная ситуация возникает вблизи резонанса по скорости звука, т. е. при  $|2\omega L/a_0 - n\pi| \ll \varepsilon$ , так как формула (1.10) дает при этом неограниченные амплитуды колебаний плотности.

Здесь дело в том, что (хотя между узлами стоячей волны нелинейные члены по-прежнему малы) около узлов волн нелинейные и линейные члены оказываются одного порядка малости. Вблизи резонанса удовлетворение граничному условию при  $\xi=L$  происходит как раз вблизи узла, так как при резонансе в слое укладывается целое число  $n$  длин волн. Поэтому форма волн при резонансе будет существенно определяться нелинейными членами граничных условий при  $\xi=L$ .

2. Исследуем резонансные колебания, когда скорости распространения звуковых и поперечных волн близки друг к другу, т. е. найдем асимптотику решения задачи (1.7), (1.8) в следующих предположениях:

$$(2.1) \quad h_0 \sim \varepsilon, \quad a_0^{-1} |a_0 - a_A| \ll \varepsilon; \quad |L\omega/a_0 - N\pi| \ll \varepsilon$$

В первом приближении колебания при резонансе будут описываться выражениями

$$(2.2) \quad w_1 = f(t + \xi/a_0) - f(t - \xi/a_0), \quad h_1 = \varphi(t + \xi/a_A) - \varphi(t - \xi/a_A)$$

Вид функций  $f$  и  $\varphi$  будем находить с помощью нелинейных граничных условий при  $\xi=L$ . Подставим выражения (2.2) в правую часть (1.7) и найдем следующее приближение для  $w$  и  $h$ . При вычислении значений  $h_2$  и  $w_2$  на границе  $\xi=L$  с точностью до бесконечно малых более высокого порядка заменим  $L\omega/a_0$  на  $N\pi$ ,  $a_A$  на  $a_0$ .

Пусть  $L/a_0 = N\omega^{-1}\pi(1 + 1/2\Delta_f)$ ,  $L/a_A = \omega^{-1}N\pi(1 + \Delta_\varphi/4)$ , где  $\Delta_f \sim \varepsilon$  и  $\Delta_\varphi \sim \varepsilon$  ввиду условий (2.1). Тогда вследствие периодичности  $\varphi$  и  $f$  с периодами  $2\pi/\omega$  и  $\pi/\omega$  соответственно для значений  $w_1$  и  $h_1$  на границе  $\xi=L$  имеем

$$(2.3) \quad w_1 = \omega^{-1}N\pi\Delta_f f'(t + N\pi/\omega), \quad h_1 = (1/2\omega)N\pi\Delta_\varphi \varphi'(t + N\pi/\omega)$$

При  $\xi=L$  должны быть выполнены условия:  $w_1 + w_2 = 0$ ,  $h_1 + h_2 = h_0 \sin \omega t$ . Из первого из этих условий получаем с помощью (2.3) уравнение

$$(2.4) \quad 2\Delta_f f'(t) + a_0 [\varphi^2(t) + b_0^2 a_0^{-4} f'^2(t) + A] = 0$$

Константу  $A$  находим, интегрируя левую часть (2.4) по периоду

$$\pi A/\omega = - \int_0^{\pi/\omega} [\varphi^2(t) + b_0^2 a_0^{-4} f'^2] dt$$

Из граничного условия для  $h$  получаем

$$(2.5) \quad \Delta_\varphi \varphi(t) + a_0^{-1} f'(t) \varphi(t) + (-1)^N 2h_0 \cos 2\omega t / \pi N = 0$$

Обозначим  $\Delta_\varphi - \Delta_f a_0^2 / b_0^2 = d$ . Для удобства анализа (2.4) и (2.5) при  $d \neq 0$  введем вместо  $f'$  и  $\varphi'$  новые искомые функции  $F$  и  $\Phi$  и вместо задаваемых констант  $\Delta_\varphi$ ,  $\Delta_f$ ,  $h_0$ ,  $N$  новые константы  $\Omega$ ,  $y_0$ ,  $\Sigma$

$$(2.6) \quad F = \frac{2f'}{a_0 d} + \Omega, \quad \Omega = d^{-1} \left( \Delta_\varphi + \Delta_f \frac{a_0^2}{b_0^2} \right)$$

$$\Phi = \frac{2\varphi a_0}{b_0 d}, \quad y_0 = \frac{4h_0 a_0}{N\pi b_0 d}$$

$$\Sigma = a_0^2 \left[ -A + \left( \frac{\Delta_f a_0}{b_0} \right)^2 \right] (b_0 d)^{-2}, \quad y = (-1)^N y_0 \cos \omega t, \quad \tau = \omega t$$

Случай  $d=0$  рассмотрим ниже. Тогда из уравнений (2.4) и (2.5) получаем уравнения для  $\Phi$  и  $F$  и связь между ними

$$(2.7) \quad (F^2 - 1)^2 + y^2 - 4\Sigma(F+1)^2 = 0, \quad (F+1)\Phi + y = 0$$

$$(2\Phi + y)^2 + \Phi^4 - 4\Sigma\Phi^2 = 0$$

При заданных  $\Omega$  и  $y_0$  положительная константа  $\Sigma$  находится из условия  $\int_0^{2\pi} (F - \Omega) d\tau = 0$ , которое следует из определения  $F$  (2.6) и периодичности  $f$ .

Согласно (2.7) легко построить семейство кривых  $F(y, \Sigma)$  при различных значениях параметра  $\Sigma$ . В плоскости  $Fy$  на двух кривых, определяемых уравнением

$$(2.8) \quad (F^2 - 1)(F + 1)^2 - y^2 = 0$$

производные  $dF/dy$  обращаются в  $\infty$ . Критическая траектория, соответствующая  $\Sigma=1$

$$(2.9) \quad (F+1)^3(F-3) + y^2 = 0$$

отделяет замкнутые кривые без самопересечений  $0 < \Sigma < 1$  («с топологией окружности») от кривых типа несимметричных «восьмерок» с точкой самопересечения при  $F = -1$ . Для этих кривых  $\Sigma > 1$ .

Эволюция формы колебаний плотности и магнитного поля с изменением  $\Omega$  и при фиксированном значении  $y_0$ , существенно зависит от того, каков знак имеет  $d$  и в каком диапазоне находится  $y_0$ . На фиг. 1, 2 представлена качественная картина эволюции колебаний соответственно плотности и магнитного поля при  $0 < y_0 < \sqrt{27}$ , на фиг. 3, 4 — при  $y_0 > \sqrt{27}$ . Предполагалось, что  $d > 0$ . В случае если  $d < 0$ , то эволюция колебаний происходит в обратном порядке, т. е. фиг. 1—4 переворачиваются. Цифры на фиг. 1—4 соответствуют значениям  $\Omega$ : 1 —  $\Omega_1$ , 2 —  $\Omega_2$  и т. п.

Отметим, что если непрерывные периодические колебания осуществляются без подвода энергии, то при значениях  $\Omega$ , соответствующих разрывным решениям, к слою необходимо подводить энергию, т. е. затрачивать работу на период колебаний.

Решения со слабыми ударными волнами конструировались единственным способом с помощью требований: 1) в магнитной гидродинамике невозможны скачки разрежения, так как им соответствуют переходы с уменьшением энтропии [12]; 2) ударные волны являются в данном случае слабыми, поэтому в условиях на разрывах пренебрегаем выделением тепла. Из этого следует, что скачок допустим лишь на другую ветвь неоднозначной кривой  $F(y)$  при фиксированном значении  $\Sigma$ .

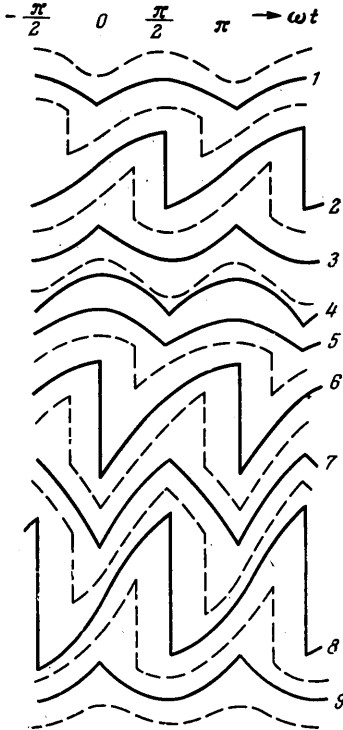
Из требования 1) следует, что при  $d > 0$  с возрастанием  $t$  при переходе через разрыв функция  $F$  должна убывать, а при  $d < 0$  — наоборот возрастать:  $F$  пропорциональна  $f'$  в силу (2.7), а функция  $f'$  описывает колебания плотности

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 a_0^{-1} [f'(t + \xi/a_0) + f'(t - \xi/a_0)]$$

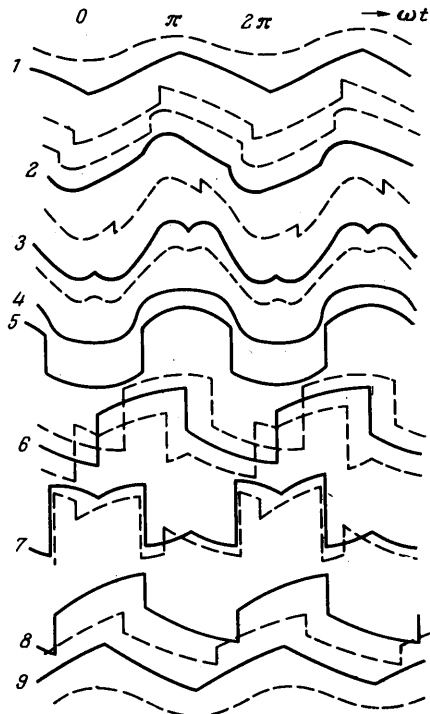
Введем обозначение

$$\psi(F, \Sigma) = 2F \int F \left( \frac{\partial \tau}{\partial F} \right)_{\Sigma} dF$$

Вместо параметра  $\Sigma$ , определяющего траекторию, удобно ввести константу  $F_0$ , которая равна значению  $F$  в точке ее касания с вертикальной



Фиг. 1



Фиг. 2

прямой  $y=y_0$ . В этой точке выполнено равенство (2.8) при  $F=F_0, y=y_0$ . Тогда

$$\psi(F, F_0) = 4 \int \frac{F(F+F_0-1)dF}{\sqrt{[(F+F_0)^2+2(F_0-1)][2(F_0^2-F_0)-(F-1)^2]}}$$

Решения непрерывны при  $\Omega > \Omega_1$ , где

$$\pi\Omega_1 = \psi(1 + \sqrt{2(F_0^2 - F_0)}, F_0) - \psi(F_0, F_0)$$

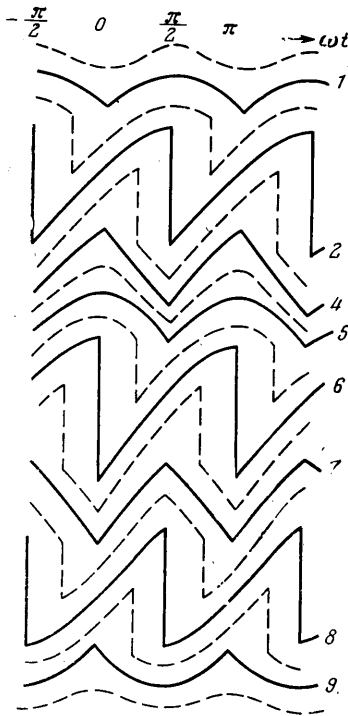
причем в качестве  $F_0$  выбирается положительный корень уравнения (2.8) (оно имеет два действительных корня).

Пусть  $y_0 < \sqrt{27}$  (см. фиг. 1, 2). В интервале  $[\Omega_3, \Omega_1]$  разрывные решения для плотности качественно подобны резонансным колебаниям газа в закрытой трубе, возбуждаемым периодическим движением поршня (см. [1-7]), где  $\Omega_3$  определено:  $\pi\Omega_3 = \psi(F_0, F_0) - \psi(1 - \sqrt{2(F_0^2 - F_0)}, F_0)$ . Наибольшей интенсивности разрыв достигает при  $\Omega = \Omega_2$ , когда осуществляется резонанс по скорости звука:  $\Omega_2 = (\Omega_1 + \Omega_3)/2$ .

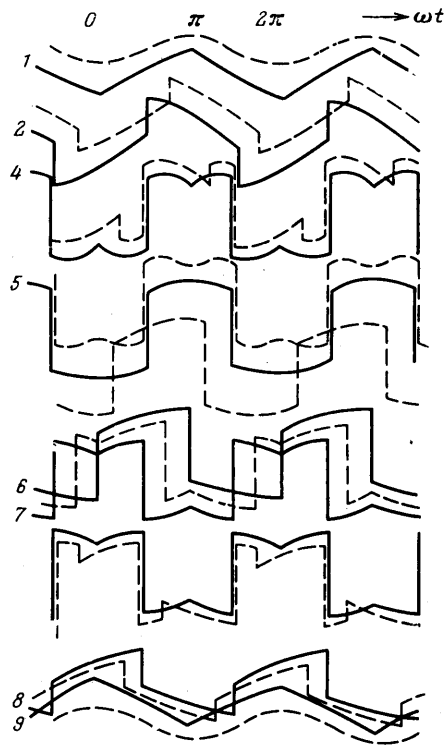
При  $\Omega = \Omega_3$  и  $\Omega_1$  решения обладают слабыми разрывами при  $\tau = \pi k$  ( $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

В интервале  $\Omega_4 < \Omega < \Omega_3$  решения являются вновь непрерывно дифференцируемыми, причем  $\pi\Omega_4 = \psi(F_1, 2) - \psi(-1, 2)$ .

При  $\Omega = \Omega_4$  решение имеет вертикальную производную при  $\tau = \pi/2 + \pi k$  и состоит из части критической траектории (2.9), когда  $y < y_0$ . При этом  $F_1$  — меньший корень уравнения (2.9) при  $y = y_0$ . В области  $\Omega_5 < \Omega < \Omega_4$  решения обладают альфвеновскими разрывами при  $\tau = \pi/2 + \pi k$ , где магнитное поле, не меняясь по величине, изменяет свое направление на противоположное. Здесь  $\pi\Omega_5 = \psi(-1, F_0^*) - \psi(-F_0^* - \sqrt{2(1-F_0^*)}, F_0^*)$ , где  $F_0^*$  — отрицательный корень уравнения (2.8). При  $\Omega = \Omega_5$  альфвеновские ударные волны переходят в магнитозвуковые ударные волны, которые будут присутствовать в решении вплоть до  $\Omega = \Omega_9$ , где  $\pi\Omega_9 = \psi(1 - \sqrt{2(F_0^{*2} - F_0^*)}, F_0^*) - \psi(F_0^*, F_0^*)$ .



Фиг. 3



Фиг. 4

Помимо магнитозвуковых разрывов колебания будут обладать альфвеновскими разрывами в интервале  $[\Omega_7, \Omega_8]$ , где

$$\pi\Omega_7 = \psi(F_0^*, F_0^*) - \psi(-1, F_0^*), \quad \Omega_8 = \frac{1}{2}(\Omega_7 + \Omega_9), \quad \Omega_6 = \frac{1}{2}(\Omega_5 + \Omega_7)$$

В интервале  $\Omega_7 < \Omega < \Omega_6$  решения обладают слабыми разрывами при  $\tau = \pi k$ .

При  $\Omega < \Omega_9$  колебания вновь становятся непрерывными. Отметим, что упомянутые значения  $\Omega$  выражаются через  $F_0$  (или  $F_0^*$ ) с помощью эллиптических интегралов Якоби.

Параметры  $F_0$  или  $F_0^*$  выражаются в свою очередь через амплитуду  $y_0$  как корни уравнения четвертой степени (2.8). При  $y_0 > \sqrt{27}$  картина эволюции колебаний несколько меняется (см. фиг. 3, 4): отсутствует интервал  $(\Omega_3, \Omega_4)$  непрерывных колебаний. Эволюция колебаний магнитного поля становится более симметричной относительно  $\Omega_6$ : при этом значении  $\Omega$  осуществляется резонанс по скорости распространения поперечных ко-

лебаний. При  $\Omega = \Omega_4$  производные в точках  $\tau = \pi/2 + \pi k$  становятся конечными.

Опишем теперь форму колебаний в случае, когда  $d = 0$ .

Введем обозначения

$$F = f'(y_0 a_0^3 / b_0)^{-1/2} + \Delta, \quad \Phi = \varphi(t) (y_0 b_0 / a_0)^{-1/2}, \quad \Delta = \Delta_\varphi (y_0 a_0 / b_0)^{-1/2}$$

Тогда уравнения (2.4), (2.5) переписутся в виде

$$(2.10) \quad F\Phi + \cos \tau = 0, \quad \Phi^2 + F^2 = \Sigma, \quad \Sigma = [(a_0 \Delta_f / b_0)^2 - A] y_0^{-1}$$

По заданному значению  $\Delta$  искомое значение  $\Sigma$  отыскиваем с помощью требования

$$(2.11) \quad \int_0^\pi (F - \Delta) d\tau = 0$$

Качественно эволюция колебаний в исследуемом случае подобна эволюции колебаний при  $d = 0$  от  $\Omega_9$  до  $\Omega_6$ , и затем картина идет в обратном порядке (от  $\Omega_6$  к  $\Omega_9$ ) (см. фиг. 1-4). Поэтому весь диапазон изменения  $\Delta$  разбивается на восемь частей.

I. При  $\pi\Delta > 4$  из (2.10) и (2.11) легко получаем

$$(2.12) \quad 2\Phi = \sqrt{\Sigma - 2 \cos \tau} - \sqrt{\Sigma + 2 \cos \tau}, \quad 2F = \sqrt{\Sigma - 2 \cos \tau} + \sqrt{\Sigma + 2 \cos \tau}$$

Константу  $\Sigma$  в (2.12) согласно (2.11) нужно находить с помощью уравнения

$$(2.13) \quad 4E(\mu) = \pi\mu\Delta, \quad \mu = 2/(\Sigma + 2)$$

где  $E(\mu)$  — полный эллиптический интеграл первого рода.

При  $|\pi\Delta| < 4$  разрывы будут иметь место при  $\tau = -\theta_0 + \pi k$ , решения будут описываться лишь в полупериоде  $\pi$ , так как магнитное поле в другом полупериоде меняет знак, а возмущение плотности имеет период  $\pi$ .

II. В интервале  $2\sqrt{2} < \pi\Delta < 4$  (здесь точка разрыва изменяется в интервале  $0 < \theta_0 < \pi/2$ , причем  $\pi\Delta = 4 \cos(\theta_0/2)$ ) решение имеет вид  $\Phi = s - c$ ,  $F = s + c$  ( $-\theta_0 < \tau < \pi - \theta_0$ ).

III. При  $4(\sqrt{2} - 1) < \pi\Delta < 2\sqrt{2}$  имеем  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ ,  $\pi\Delta = 4(\sqrt{2} - \sin \theta_0/2)$ , причем  $\Phi = \pm(s - c)$ ,  $F = \pm(s + c)$  (верхний знак берется для интервала  $\pi/2 < \tau < \pi - \theta_0$ , нижний — для интервала  $-\theta_0 < \tau < -\pi/2$ ).

При  $\pi\Delta = \pm 4(\sqrt{2} - 1)$  решение (2.10), (2.11) обладает альфвеновским разрывом при  $\tau = \pi/2 + \pi k$  и слабым разрывом при  $\tau = \pi k$ .

IV. При  $0 < \pi\Delta < 4(\sqrt{2} - 1)$  точка разрыва  $\theta_0$  изменяется в интервале  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$  (причем  $\pi\Delta = 4[\sin(\theta_0/2) + \cos(\theta_0/2) - 1]$ ) и решение имеет вид  $\Phi = \pm(s - c)$ ,  $F = \pm(s + c)$  (верхний знак в интервале  $-\theta_0 < \tau < 0$ , нижний — в интервале  $-\pi < \tau < -\theta_0$ ).

При  $\Delta = 0$  решение имеет пилообразную форму:  $\Phi = s - c$ ,  $F = s + c$  ( $-\pi < \tau < 0$ ).

V. При  $-4(\sqrt{2} - 1) < \pi\Delta < 0$  точка разрыва перемещается по интервалу  $0 < \theta_0 < \pi/2$ , причем  $\pi\Delta = 4[1 - \cos(\theta_0/2) - \sin(\theta_0/2)]$ . Здесь решение таково:  $\Phi = \pm(s - c)$ ;  $F = \pm(c + s)$  (верхний знак при  $-\pi < \tau < -\theta_0$ , нижний — при  $-\theta_0 < \tau < 0$ ).

VI. При  $-2\sqrt{2} < \pi\Delta < 4(\sqrt{2} - 1)$  имеем  $0 < \theta_0 < \pi/2$ ,  $\pi\Delta = -4(\sqrt{2} - \sin(\theta_0/2))$ , причем  $\Phi = \pm(s + c)$ ,  $F = \pm(s - c)$  (верхний знак при  $-\theta_0 < \tau < \pi/2$ , нижний — при  $\pi/2 < \tau < \pi - \theta_0$ ).

VII. При  $-4 < \pi\Delta < -2\sqrt{2}$  имеем  $\pi\Delta = -4 \sin(\theta_0/2)$ ,  $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ , причем  $\Phi = s + c$ ,  $F = s - c$ .

Для краткости в I-VII введены обозначения:  $s = \sin(\tau/2)$ ,  $c = \cos(\tau/2)$ .

VIII. При  $\pi\Delta < -4$  решения вновь становятся непрерывными

$$2\Phi = \sqrt{\Sigma + 2 \cos \tau} - \sqrt{\Sigma - 2 \cos \tau}, \quad 2F = -(\sqrt{\Sigma + 2 \cos \tau} + \sqrt{\Sigma - 2 \cos \tau})$$

где  $\Sigma$  отыскивается с помощью уравнения (2.13), в котором  $\Delta$  заменено на  $-\Delta$ .

3. Если продольная и поперечная скорости не совпадают:  $a_0 \neq a_A$  (и не кратны), а частота электрического тока осуществляет резонанс по скоро-

сти звука, то нелинейные члены для поперечной стоячей волны несущественны. Поэтому для  $h$  можно пользоваться выражением (1.9), в то время как формула (1.10) дает неограниченное возрастание плотности.

Поэтому периодические колебания в этом случае нужно находить с помощью нелинейного уравнения

$$(3.1) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - a_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + b_0^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 = - \frac{h_0^2}{4} (1 - \cos 2\omega t) \sin(2\omega \xi / a_A)$$

Нелинейные звуковые колебания под действием магнитного поля имеют форму (ср. 2.2)

$$w_1 = f(t - \xi/a_0) - f(t + \xi/a_0)$$

Хотя эти колебания — решения линеаризованного уравнения (3.1), их форма будет разыскиваться с помощью нелинейного граничного условия при  $\xi=L$  (условие при  $\xi=0$  при этом удовлетворяется тождественно).

Опуская промежуточные выкладки (аналогичные приведенным в п. 2), для определения  $f(t)$  имеем

$$(3.2) \quad \pi N f' + \frac{b_0^2}{4a_0^3} [f'^2(t) \pi N + A \pi N] + \\ + \frac{1}{8} h_0^2 \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi N a_0}{a_A} \right) a_A^3 (-1)^N \cos 2\omega t (a_0^2 - a_A^2)^{-1}$$

$$L/a_0 = \pi N (1 + \Delta) / 2\omega, \quad \Delta \sim \varepsilon$$

Константу  $A$  определяем из условия

$$A \pi / \omega = - \int_0^{\pi/\omega} f'^2(t) dt$$

Отметим, что уравнение аналогично соответствующему уравнению Честера [5] при решении задачи о колебаниях газа в закрытой трубе при резонансном движении задвижки с частотой  $2\omega$  и амплитудой

$$w_0 = h_0^2 a_A^3 \operatorname{ctg} (\pi N a_0 / a_A) [\omega (a_A^2 - a_0^2)]^{-1}$$

Итак, звуковые колебания, возбуждаемые магнитным полем при пропускании электрического тока через границу  $\xi=L$  в идеально проводящем слое вблизи резонанса по скорости звука будут точно такими же, как если бы в отсутствие магнитного поля эта граница двигалась как поршень с вдвое меньшей частотой.

4. Отметим, что форма колебаний магнитного поля и давления при приближении к резонансу повторяет форму эволюции колебаний в неограниченном полупространстве при удалении в  $\infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ), когда на плоскую границу  $x=0$  подаются периодические возмущения. Магнитное поле считается перпендикулярным плоскости  $x=0$ , причём  $|a_0 - a_A| \sim \varepsilon a_0$ .

Можно показать, что в этом случае для описания эволюции взаимодействующих магнитогидродинамических слабых волн нужно пользоваться уравнениями, представляющими собой обобщение уравнения Бюргерса (ср. с [13])

$$a) \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{2} v \frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{h}{2} \frac{\partial h}{\partial \tau} = b \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}$$

$$a_0 \frac{\partial h}{\partial x} - d \frac{\partial h}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} (hv) = e \frac{\partial^2 h}{\partial \tau^2}$$



$$d = \frac{a_0 - a_A}{2a_0}, \quad b = \frac{1}{2} \left[ \zeta + \frac{4}{3} \eta + \frac{\kappa}{c_V} + \frac{\kappa}{c_P} \right] \rho_0^{-1}$$

$$e = 1/2 \left[ \frac{c^2}{4\pi\sigma a_0^2} + \frac{\eta}{\rho_0 a_0^2} \right], \quad v = \frac{v_x}{a_0}, \quad h = \frac{H_{\perp}}{H_x}$$

Здесь  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $\kappa$ ,  $\delta$  — соответственно коэффициенты вязкости, и теплопроводности и электропроводности,  $\gamma$  — показатель адиабаты,  $\tau$  — запаздывающее время  $\tau = t - x/a_0$ .

Автор благодарит А. А. Бармина и А. Г. Куликовского за обсуждение результатов.

Поступила 20 V 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Betchov R.* Nonlinear oscillations of a column of gas. *Phys. Fluids.*, 1958, vol. 1, N 3.
2. *Saenger R. A., Hudson G. E.* Periodic shock waves in resonating gas columns. *J. Acoust. Soc. America*, 1960, vol. 32, N 8.
3. *Горьков Л. П.* Нелинейные акустические колебания столба газа в закрытой трубе. *Инж. ж.*, 1963, т. 3, вып. 2.
4. *Гуляев А. И., Кузнецов В. М.* Колебания газа с большой амплитудой в закрытой трубе. *Инж. ж.*, 1963, т. 3, вып. 2.
5. *Chester W.* Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid. Mech.*, 1964, vol. 18, pt. 1.
6. *Галиев Ш. У., Ильгамов М. А., Садыков А. В.* О периодических ударных волнах в газе. *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1970, № 2.
7. *Jimenez J.* Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt. 1. Theory. *J. Fluid Mech.*, 1973, vol. 59, pt. 1.
8. *Sturtevant V.* Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt. 2. Experiment. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 63, pt. 1.
9. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.* Нелинейная теория плазмы. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 7, М., Атомиздат, 1973.
10. *Сибгатуллин Н. Р.* О нелинейных поперечных колебаниях при резонансе в упругом слое и слое идеально проводящей жидкости. *ПММ*, 1972, т. 36, вып. 1.
11. *Сибгатуллин Н. Р.* О взаимодействие коротких гравитационных и электромагнитных волн в произвольных внешних электромагнитных полях. *ЖЭТФ*, 1974, т. 66, вып. 4.
12. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
13. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М., «Наука», 1975.