

РАСЧЕТ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА С ИЗЛОМОМ  
ОБРАЗУЮЩЕЙ С УЧЕТОМ ДВУМЕРНОГО ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В. В. ЗНАМЕНСКИЙ

(Москва)

Показано, что кратность интегралов, входящих в общие выражения для лучистого потока и его дивергенции, в двумерном случае может быть снижена на единицу за счет аналитического интегрирования по одной из угловых переменных. Получающиеся в результате формулы содержат некоторые специальные функции, роль которых аналогична роли интегральных экспонент  $E_n(x)$  в одномерном случае.

Поставлена и численно решена задача о течении в излучающем и поглощающем ударном слое вблизи и вниз по потоку от излома образующей. Показано, что при больших гиперзвуковых скоростях обтекания существенно двумерное излучение вблизи излома может заметно влиять на распределение давления вниз по потоку. Установлено, что лучистый поток на боковую поверхность непосредственно за изломом сравним по величине с потоком на лобовой поверхности и для его расчета необходимо использовать соответствующие двумерные формулы.

1. Спектральная интенсивность излучения  $J_\nu$  в произвольной точке области, занятой излучающим и поглощающим газом, дается формальным решением уравнения переноса

$$(1.1) \quad J_\nu = \int_0^{R_s} j_\nu \exp\left(-\int_0^R \kappa_\nu dR\right) dR + J_{\nu s} \exp\left(-\int_0^{R_s} \kappa_\nu dR\right)$$

Здесь  $j_\nu$  и  $\kappa_\nu$  — спектральные излучательная способность и коэффициент поглощения газа,  $R$  — расстояние, отсчитываемое от рассматриваемой точки в направлении, противоположном распространению  $J_\nu$ . Индексом  $\nu$  отмечаются значения на границе области.

Общие выражения для спектральной скорости притока тепла в единице массы излучающего газа за счет перепоглощения  $q_{R\nu}^+$  и для спектрального потока лучистой энергии на поверхность  $q_{r\nu}$  имеют вид

$$(1.2) \quad q_{R\nu}^+ = \frac{\kappa_\nu}{\rho} \int_{4\pi} J_\nu d\Omega, \quad q_{r\nu} = \int_{2\pi} J_\nu \cos \theta d\Omega$$

Здесь  $\rho$  — плотность газа,  $\Omega$  — телесный угол,  $\theta$  — угол между нормалью к поверхности и направлением падающего излучения. Будем считать, что поверхность, на которой вычисляется  $q_{r\nu}$ , является границей рассматриваемой области.

Введем местные декартовую  $x, y, z$  и сферическую  $R, \theta, \varphi$  системы координат с общим началом в рассматриваемой точке, причем угол  $\theta$  будем отсчитывать от оси  $z$ , а азимутальный угол  $\varphi$  — от оси  $x$  декартовой системы координат. При вычислении  $q_{r\nu}$  будем считать, что ось  $y$  направлена нормально к поверхности навстречу падающему потоку.

Пусть граница области задается уравнением

$$r = r_s(\varphi) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2} = R \sin \theta)$$

Допустим, что

$$\kappa_v = \kappa_v(x, y), \quad j_v = j_v(x, y), \quad J_{vs} = J_{vs}(\varphi)$$

(последнее условие выполняется, например, при диффузном отражении от изотропно излучающих границ).

Имеем

$$(1.3) \quad dR = dr / \sin \theta, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad \cos \theta = \sin \theta \sin \varphi$$

Подставляя (1.1) и (1.3) в (1.2), приходим к выражениям, допускающим интегрирование по переменной  $\theta$ . Вводя  $t = 1 / \sin \theta$ , получаем

$$(1.4) \quad \rho q_{Rv^+} = 2\kappa_v \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^{r_s} j_v F_1(\tau_v) dr + J_{vs} F_2(\tau_{vs}) \right] d\varphi$$

$$(1.5) \quad q_{rv} = 2 \int_0^{\pi} \left[ \int_0^{r_s} j_v F_2(\tau_v) dr + J_{vs} F_3(\tau_{vs}) \right] \sin \varphi d\varphi$$

$$F_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt} dt}{t^n \sqrt{t^2 - 1}} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\tau_v = \tau_v(r, \varphi) = \int_0^r \kappa_v dr, \quad \tau_{vs} = \tau_v(r_s, \varphi)$$

Из формул (1.4) и (1.5), имеющих простой геометрический смысл, следует, что функции  $F_n(x)$  в случае двумерного переноса излучения играют такую же фундаментальную роль, что и интегральные экспоненты  $E_n(x)$  [1, 2] в одномерном случае. Основные свойства этих функций даются следующими соотношениями:

$$(1.6) \quad \frac{dF_1}{dx} = -K_0(x), \quad \frac{dF_{n+1}}{dx} = -F_n, \quad F_{2n}(0) = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$$

$$F_{2n-1}(0) = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \frac{\pi}{2}, \quad \int_1^{\infty} F_n(xt) \frac{dt}{t^{n-1} \sqrt{t^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} E_n(x)$$

Здесь  $K_0(x)$  — цилиндрическая функция мнимого аргумента нулевого порядка.

Нетрудно убедиться, используя последнее из соотношений (1.6), что в одномерном случае формулы (1.4) и (1.5) переходят в известные [1, 2] выражения для плоского слоя.

2. Рассмотрим плоское или осесимметричное тело с изломом образующей, обтекаемое гиперзвуковым потоком невязкого равновесно-диссоциирующего и локально-равновесно излучающего газа. Пусть скорость в ударном слое перед изломом сверхзвуковая, а скорость набегающего потока велика настолько, что влияние излучения на движение газа сказывается и в непосредственной окрестности излома.

Известно, что использование приближения плоского слоя при вычислении  $\rho q_{Rv^+}$  и  $q_{rv}$  позволяет рассчитать течение во всем ударном слое на лобовой поверхности, за исключением указанной окрестности, где это приближение не справедливо из-за значительных продольных градиентов

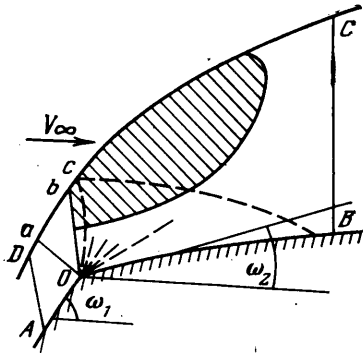
параметров в центрированной волне разрежения. Ниже приводится математическая постановка задачи о расчете течения вблизи и вниз по потоку от излома образующей с учетом двумерного переноса излучения.

Рассматривается течение в области  $AOBCD$  (фиг. 1);  $AOB$  — поверхность тела,  $DC$  — ударная волна,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — углы между направлением набегающего потока и образующей соответственно до и после излома.

Система уравнений, описывающая движение газа в сделанных предположениях, имеет вид

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) &= 0, & \rho(\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p, & \rho &= \rho(p, h) \\ \rho(\mathbf{V} \nabla) h - (\mathbf{V} \nabla) p &= \rho q_R = \int_0^{\infty} [\rho q_{R\nu^+} - 4\pi \kappa_\nu B_\nu] d\nu \end{aligned}$$

Здесь  $\mathbf{V}$  — вектор скорости,  $h$  и  $p$  — энтальпия и давление газа,  $q_R$  — скорость притока тепла в единице массы за счет излучения,  $\nu$  — частота излучения,  $B_\nu$  — функция Планка. Величина  $\rho q_{R\nu^+}$  задается двумерной формулой (1.4).



Фиг. 1

Граничными условиями служат условия непротекания на стенке и соотношения на скачке уплотнения, а также значения  $V$ ,  $p$  и  $h$  (начальные данные) на отрезке  $AD$ , распределение параметров вверх по потоку от которого считается известным. Интенсивность излучения на скачке и поверхности тела вдоль направлений, идущих внутрь ударного слоя, принимается равной нулю. Влиянием излучения на поток перед ударной волной пренебрегается.

Вообще говоря, задачи радиационной газодинамики в строгой постановке не до-

пускают выделения областей, течение в которых рассчитывалось бы независимо, так как присутствие интегрального члена с  $\rho q_{R\nu^+}$  в системе (2.1) наделяет ее в общем случае эллиптическими свойствами. Однако специфика гиперзвукового обтекания (малая толщина ударного слоя на лобовой поверхности) такова, что в рассматриваемом случае такое разделение возможно при соответствующем выборе положения границ  $AD$  и  $BC$ .

Отрезок  $AD$  поместим в области, где излучение уже существенно одномерно и, следовательно, при его расчете допустимо использование приближения плоского слоя. В этом случае течение в области  $AOBCD$  практически не влияет (через взаимодействие излучения с веществом) на течение вверх по потоку от  $AD$  и, следовательно, на сами значения параметров на этом отрезке. Именно поэтому последние могут быть определены заранее при расчете течения на лобовой поверхности.

Отрезок  $BC$  поместим далеко вниз по потоку от излома, и при вычислении  $\rho q_{R\nu^+}$  параметры вниз по потоку от него будем считать постоянными вдоль прямых, параллельных поверхности в точке  $B$ . Физически такая экстраполяция оправдывается тем, что вклад в  $\rho q_R$  за счет перепоглощения вблизи  $BC$  при небольших  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$  определяется в основном нормальными к поверхности градиентами температуры и плотности, а при  $\Delta\omega \sim 1$  — энергией, которая испускается областью, расположенной выше по потоку. Более того, при  $\Delta\omega \sim 1$  температура вблизи  $BC$  невелика и влияние излучения здесь вообще мало.

Проведенные методические расчеты показали, что для типичных гиперзвуковых условий принятое приближение с высокой точностью выполняется, если отрезок  $AD$  отстоит от точки излома на расстоянии  $\sim \delta$ , а отрезок  $BC$  — на расстоянии нескольких  $\delta$ , где  $\delta$  — толщина ударного слоя перед изломом.

Отметим, наконец, что использование формул (1.4) и (1.5), точных для плоских течений, в осесимметричном случае оправдано следующим. Там, где требуется точный расчет излучения (при малых  $\Delta\omega$  — во всей рассматриваемой области, а при  $\Delta\omega \sim 1$  — вблизи излома), толщина ударного слоя много меньше расстояния до оси течения, поэтому здесь при вычислениях  $\rho q_{Rv}^+$  и  $q_{rv}$  можно пренебречь изменением параметров в направлении, нормальном к плоскости течения. Очевидно, что ошибка при этом не превышает погрешности приближения плоского слоя на лобовой поверхности.

3. Поставленная в п. 2 задача решалась численно методом итераций. На каждой итерации при вычисленном ранее распределении стока тепла  $\rho q_R$  методом характеристик рассчитывается течение в рассматриваемой области. Полученное поле  $p$  и  $h$  служит затем для расчета нового распределения  $\rho q_R$ . Указанный процесс быстро сходится.

В конкретных расчетах в качестве уравнения состояния использовалась аппроксимация [3] для воздуха. Спектральность излучения учитывалась качественно с помощью двухступенчатой модели коэффициента поглощения [4]. Температура как функция  $p$  и  $h$  определялась интерполяцией по табличным значениям.

При расчете течения методом характеристик использовались следующие, эквивалентные системе (2.1), характеристические соотношения:

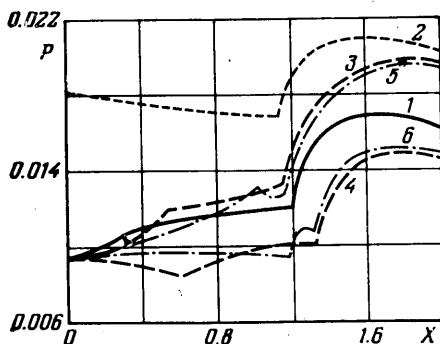
$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{\sqrt{M^2-1}}{\rho V^2} \frac{\partial p}{\partial l} \pm \frac{\partial \theta}{\partial l} &= - \left( \frac{\partial \rho}{\partial h} \right)_p \frac{q_R}{\rho VM} - j \frac{\sin \theta}{Mr} \\ \frac{\partial h}{\partial s} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} &= \frac{q_R}{V} \\ \frac{\partial h}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{q_R}{V} \end{aligned}$$

Здесь  $V$  и  $\theta$  — абсолютная величина и угол наклона вектора скорости к оси течения,  $M$  — число Маха,  $r$  — расстояние до оси течения,  $\partial/\partial l$  — производные вдоль характеристик первого и второго семейства,  $\partial/\partial s$  — производная вдоль линий тока,  $j=0$  и  $1$  соответственно в плоском и осесимметричном случаях.

Метод численного интегрирования системы (3.1) аналогичен работе [5]. Из (3.1) видно, что неадиабатичность течения приводит к появлению дополнительного члена в соотношениях совместности, а также к необходимости интегрирования уравнения энергии вдоль линий тока.

В процессе расчета газодинамического поля значения  $p$  и  $h$  запоминались в узлах регулярной сетки. При вычислении  $\rho q_R$  интегрирование по  $v$  благодаря использованию ступенчатой модели  $\kappa_v$  осуществлялось аналитически, шаги интегрирования по  $r$  и  $\varphi$  выбирались автоматически из условия достижения заданной точности; значения параметров в произвольной точке области определялись линейной интерполяцией по значениям в ближайших четырех узлах регулярной сетки.

Задача решалась на БЭСМ-6 на АЛГОЛе. Время счета с начальным на первой итерации условием  $\rho q_R=0$  равнялось примерно 1–1.5 час.



Фиг. 2

4. Расчеты проводились для клина и конуса с изломом образующей. Течение на лобовой поверхности рассчитывалось методом итераций при тех же, что и в п. 2 и 3 физических допущениях. При этом газодинамическая задача решалась методом характеристик, а излучение вычислялось в приближении плоского слоя.

Поскольку течение в излучающем ударном слое на лобовой поверхности клина и конуса хорошо изучено (см., например, работы [6, 7]), остановимся подробно только на некоторых качественных эффектах, обнаруженных при расчетах течения вблизи и вниз по потоку от излома. Приводимые ниже результаты получены в равновесном режиме обтекания, соответствующем полету в земной атмосфере на высоте 60 км со скоростью  $V_\infty = 18$  км/сек. Характерный размер тела — расстояние от носка до излома —  $L = 1$  м,  $\omega_1 = 60^\circ$ ,  $\omega_2 = 0$ .

*Влияние излучения на поле давления.* На фиг. 2 сплошной кривой 1 показано распределение давления вдоль боковой поверхности конуса с изломом, полученное по описанной выше схеме (в дальнейшем — схема 1);  $x = XL$  — расстояние, отсчитываемое от излома,  $P = p / \rho_\infty V_\infty^2$ ,  $\rho_\infty$  — плотность набегающего потока. Пунктирная линия 2 — давление, полученное без учета излучения во всем поле течения. Общий для обеих кривых всплеск давления на некотором расстоянии от излома объясняется приходом на стенку волн сжатия, возникающих при отражении центрированной волны разрежения от скачка уплотнения.

Естественно, что расхождение между кривыми 1, 2 на фиг. 2 обусловлено прежде всего влиянием излучения на лобовой поверхности: достаточно заметить, что падение энтальпии на ней существенно изменяет число Маха на стенке перед изломом — величину, которая определяет давление на поверхности непосредственно за ним.

Очевидно, что ввиду резкого охлаждения газа в центрированной волне разрежения непосредственное влияние излучения вблизи и вниз по потоку от излома на газодинамическое поле значительно меньше, чем предшествующее ему влияние излучения на лобовой поверхности. Поэтому представляют интерес простые приближенные схемы расчета, не требующие трудоемкого вычисления двумерного излучения вблизи излома, в которых, однако, влияние излучения на лобовой поверхности учитывалось бы достаточно точно. В настоящей работе были опробованы следующие схемы такого рода.

Схема 3 (схема 4) — расчет в приближении плоского слоя ведется вплоть до нормали к лобовой поверхности в точке  $O$  (отрезок  $Oa$  на фиг. 1); ниже по потоку считается  $\rho q_R = 0$  (соответственно в схеме 4  $\rho q_R$  вычисляется в приближении объемного высвечивания);

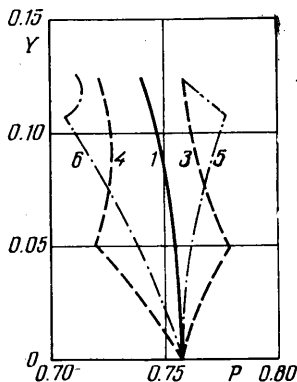
схема 5 (схема 6) — начальные данные задаются на отрезке  $Ob$ , расположенном вблизи головной характеристики веера волн разрежения  $Oc$ ; ниже по потоку считается  $\rho q_R = 0$  (соответственно в схеме 6 используется приближение объемного высвечивания). Такой выбор начальных данных, которые можно взять, например, из расчета обтекания бесконечных клина и конуса или определить экстраполяцией, продиктован желанием учесть влияние излучения в высокотемпературной области  $Oab$ .

Результаты расчетов по перечисленным схемам (фиг. 2) показывают, что предположение  $\rho q_R = 0$  дает достаточно точное распределение давления вблизи излома. Однако все приближенные схемы приводят к заметным ошибкам в давлении на большом удалении от излома, куда в реальном течении вдоль характеристик второго семейства приходят волновые возмущения, порождаемые стоком тепла внутри заштрихованной на фиг. 1 области, излучение в которой существенно двумерно.

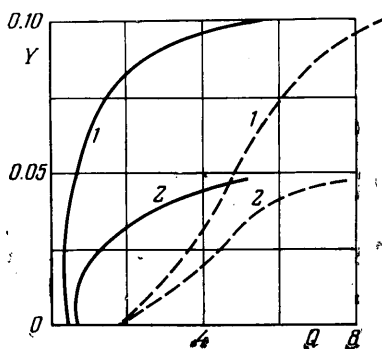
Известно, что на лобовой поверхности излучение сильно влияет на рас-

пределение температуры в ударном слое, но практически не влияет на давление. Последнее объясняется тем, что структура течения здесь описывается бузмановской теорией, в которой распределение давления на ударной волне и поверхности тела определяется независимо от уравнения энергии — единственного уравнения системы (2.1), содержащего член, связанный с излучением [8].

Расхождение между кривой 1 и кривыми 3–6 на фиг. 2 показывает, что излучение в области разрежения вблизи излома уже существенно влияет на распределение давления вниз по потоку. Оказалось также, что поля температуры, получающиеся при счете по приближенным схемам 3–6,



Фиг. 3



Фиг. 4

значительно меньше отличаются от точного (схема 1), чем поля давления. Таким образом здесь ситуация как раз противоположна той, что имеет место на лобовой поверхности — излучение в первую очередь сказывается на распределении давления и значительно меньше влияет на поле температуры.

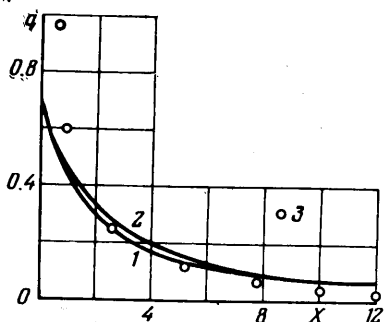
Результаты расчетов показали, что при счете по грубым схемам 3–6 в области, заштрихованной на фиг. 1, накапливаются значительные ошибки в распределении полной энтальпии (до 15% на клине с изломом при счете по схемам 4 и 6). Однако неточный расчет изменения полной энтальпии  $H$  и энтропии  $S$  вдоль линий тока при счете по этим схемам не является единственным источником ошибок. Заметные ошибки в давлении возникают уже на головной характеристике веера  $Oc$ , т. е. там, где значения  $H$  и  $S$  (во всяком случае при счете по схемам 5 и 6) еще близки к точным.

Последнее иллюстрирует фиг. 3, где представлены распределения давления вдоль головной характеристики, полученные на конусе с изломом ( $y=YL$  — нормальная к боковой поверхности координата). Отметим, что кривая 1 практически совпадает с распределением давления в излучающем ударном слое на бесконечном конусе вдоль характеристики, выходящей с его поверхности на расстоянии  $L$  от носка.

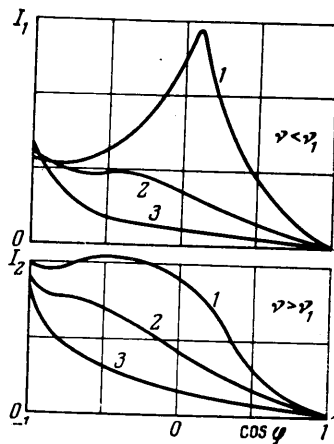
Расхождение между кривыми на фиг. 3 объясняется следующим. Газодинамическое поле, рассчитываемое по схемам 3–6, соответствует течению с разрывом в распределении стока тепла на линии с начальными данными. О величине этого разрыва дает представление фиг. 4. Здесь сплошными линиями изображены профили величины  $Q = \rho q_r L / \rho_\infty V_\infty^3$  на лобовой поверхности непосредственно перед изломом (1 — клин, 2 — конус), полученные при расчете течения в приближении плоского слоя ( $y=YL$  — нормальная к лобовой поверхности координата). Штриховые линии соответствуют значениям  $\rho q_r$ , рассчитанным по тому же распределению температуры и плотности без учета перепоглощения.

Разрыв стока тепла в поле сверхзвукового течения вызывает возмущения газодинамических параметров, характер которых подробно исследован в [9]. Здесь ограничимся пояснением существа дела для случая, соответствующего расчету по схемам 5 и 6. При этом влияние разрыва  $\rho q_R$  проявляется наиболее наглядно.

В названном случае распределение величин  $p$  и  $\theta$  на отрезке  $Ob$  (фиг. 1) приблизительно такое же, как и на характеристике первого семейства, проходящей через точку  $b$ . Поэтому их значения приблизительно связаны первым из соотношений совместности (3.1). На характеристике  $Oc$



Фиг. 5



Фиг. 6

значения  $p$  и  $\theta$  должны быть связаны тем же соотношением, но уже с существенно другой правой частью (см. фиг. 4). Очевидно, что это возможно только в том случае, когда внутри области  $Obc$  происходит резкое изменение этих параметров на величину  $\sim \int \Delta \rho q_R dl$ , где  $\Delta \rho q_R$  — величина скачка  $\rho q_R$ , а интегрирование ведется по характеристике  $Oc$ .

Физически такое изменение параметров внутри области  $Obc$  объясняется суммированием волновых возмущений, распространяющихся вдоль нее по характеристикам первого семейства, что, собственно, и отражено в соотношении совместности (3.1).

На клине с изломом кривые, аналогичные изображенным на фиг. 2 и 3, имеют качественно такой же вид, причем относительные ошибки при счете по схемам 3—6 примерно вдвое больше, что объясняется в основном большей толщиной ударного слоя.

Итак, из представленных результатов следует, что при очень больших скоростях обтекания учет излучения только на лобовой поверхности не является достаточным для определения давления на значительных расстояниях вниз по потоку от излома — получение надежных значений давления вдали от излома требует расчета двумерного излучения в его окрестности.

*Лучистый поток на боковой поверхности.* На фиг. 5 представлены распределения лучистого потока вдоль боковой поверхности клина и конуса с изломом ( $q = q_r / q_r^\circ$ ,  $q_r^\circ$  — величина  $q_r$  на лобовой поверхности непосредственно перед изломом,  $X = x / \delta$ ; 1 — клин,  $\delta \approx 10$  см,  $q_r^\circ \approx 2$  ккал/см<sup>2</sup>·сек, 2 — конус,  $\delta \approx 4.7$  см,  $q_r^\circ \approx 1.3$  ккал/см<sup>2</sup>·сек). Близкое расположение кривых 1, 2 объясняется геометрическим подобием излучающих областей.

Отметим, что лучистый поток на боковую поверхность на некотором расстоянии от излома сравним по величине с  $q_r^\circ$ .

Формулу для лучистого потока  $q_r$  с учетом (1.5) можно представить в следующем виде:

$$q_r = \int_0^{\infty} q_{rv} dv = \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\pi} I_v \sin \varphi d\varphi \right] dv = \int_{-1}^1 (I_1 + I_2) d(\cos \varphi) \quad (4.1)$$

$$I_1 = \int_0^{\nu_1} I_v dv, \quad I_2 = \int_{\nu_1}^{\infty} I_v dv$$

Здесь  $\nu_1 \approx 2.73 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$  — частота, соответствующая скачку  $\kappa_\nu$  в используемой спектральной модели. Явное выражение для  $I_v$  следует из сопоставления (4.1) и (1.5).

На фиг. 6 представлены рассчитанные на боковой поверхности конуса с изломом при  $x/\delta = 0, 1.33$  и  $4$  (соответственно кривые 1, 2 и 3) зависимости  $I_1$  и  $I_2$  от  $\cos \varphi$ . Кривые построены в едином масштабе, площади под ними дают значения лучистого потока в соответствующем спектральном интервале. Вид кривых позволяет судить об угловом распределении лучистой энергии, падающей на боковую поверхность.

Точками 3 на фиг. 5 показаны значения лучистого потока на конусе с изломом, рассчитанные путем формального применения формулы плоского слоя при газодинамическом поле, взятом из точного расчета (по схеме 1). Полученные значения при малых  $x/\delta$  лежат много выше, а при больших  $x/\delta$  — несколько ниже точных значений, что является естественным следствием приведенных на фиг. 6 зависимостей  $I_{1,2}(\cos \varphi)$ .

Автор искренне благодарит В. В. Лунева за постановку задачи и научное руководство.

Поступило 27 II 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., «Наука», 1966.
2. Бай Ши-и. Динамика излучающего газа. М., «Мир» 1968.
3. Синченко С. Г. Аппроксимация термодинамических функций воздуха, Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, № 4.
4. Андерсон мл. Тепловой поток от сжатого слоя вязкого излучающего несерого газа. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 8.
5. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно-диссоциирующим воздухом. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
6. Лунев В. В. Обтекание клина гиперзвуковым потоком излучающего газа ПМТФ, 1960, № 2.
7. Боголюбский И. Л. Обтекание острого конуса гиперзвуковым потоком излучающего газа. Тр. 15 и 16 науч. конф. МФТИ, 1969–1970. Сер. аэрофиз. и прикл. матем., ч. 1, Долгопрудный, 1971.
8. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика, М., «Машиностроение», 1975.
9. Знаменский В. В. Влияние разрыва стока тепла на сверхзвуковое неадиабатическое течение. Тр. МФТИ, Сер. аэрофиз. и прикл. матем. 1975.