МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 2 · 1976

УДК 533.6.011:535.2+536.2

ОТКЛИК ИЗЛУЧАЮЩЕГО ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА НА НАЧАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

В. А. ПРОКОФЬЕВ

(Москва)

В теории распространения малых возмущений в сплошных средах фундаментальными являются две задачи, к которым постоянно обращаются исследователи для апробации новых методов и выяснения эффектов различных физико-химических процессов: это задача о распространении начальных возмущений в безграничной среде (свободные возмущения) и задача о распространении вынужденных возмущений, возбуждаемых движением границ. В данной работе изучаются свободные возмущения, решается задача о начальных значениях для системы линеаризованных относительно состояния покоя и равновесия уравнений радиационной газовой динамики. Газ считается двупараметрическим, уравнения состояния берутся в общем виде. Учитываются процессы диссипации энергии вследствие вязкости, теплопроводности и радиационного теплообмена (собственной термической эмиссии и абсорбции электромагнитной энергии). Никаких упрощающих осреднений интенсивности радиации по оптическим частотам и направлениям переноса не делается.

Методом кратного преобразования Фурье получено точное решение задачи о распространении пространственных начальных возмущений довольно общего вида, удовлетворяющих известным в математической физике условиям существования. Из анализа решения видно, что начальное возмущение индуцирует в среде два «волновых пакета»: «подавленный», являющийся суперпозицией элементарных тепловых импульсов, затухающих и диффундирующих в среде по законам элементарной диффузии, и «бегущий», состоящий из затухающих и диффундирующих синусоидальных волн. Показано, что такое расщепление существует во всех рассмотренных частных видах сред, включая идеальную сжимаемую жидкость. В связи с этим отпадает необходимость считать тепловые волны, возбуждаемые радиацией, специфической радиационной волновой модой. Указано решение в виде рядов Фурье.

1. Фурье-преобразование уравнений. Распространение возмущений в покоящейся равновесной вязкой теплопроводной и радиирующей сжимаемой жидкости описывается линеаризованными уравнениями Навье — Стокса и теории радиационного поля [1, 2]. При этом учитывается термическая эмиссия и абсорбция электромагнитной энергии в квазиравновесном случае с произвольным угловым и спектральным ее распределением

$$\partial\rho/\partial t+w\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$$

$$\partial\mathbf{v}/\partial t+w\nabla p_*/\gamma-wN_{\mathrm{Re}}^{-1}\Delta\mathbf{v}+(N_{\mathrm{Re}}^{-1}-Xw)\,w\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}=0$$

$$\partial U/\partial t+p_0 w\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}/\rho_0 U_0-h_4\theta w^2\Delta T+Zwh_4R_1=0$$

$$\Omega\nabla I_\nu=\tau_{\nu0}(b_\nu T-I_\nu),\qquad R_1=\int\limits_{(\nu)}A_\nu\tau_{\nu0}\left[T-\int\limits_{(\Omega)}I_\nu/(4\pi b_\nu)\,d\Omega\right]d\nu \tag{1.1}$$

$$p\equiv h_1p_*=h_1\rho+h_2T,\quad U=h_3\rho+h_4T\qquad (T\equiv h_1T_*/h_2)$$

$$s_*\equiv h_2s/h_1=T_*-(\gamma-1)\rho,\qquad \mathbf{v}=\partial\mathbf{R}_*/\partial t_1,\quad t_1\equiv tw \tag{1.2}$$

$$N_{\mathrm{Re}}=\rho_0c_0L/\mu_0,\qquad X=(\mu_1+2\mu)_0/\rho_0c_0^2t_0,\qquad \theta=\lambda_0/c_{v0}\rho_0c_0^2t_0$$

$$Z=16\pi B^*/c_{v0}\rho_0c_0T_0,\quad A_\nu={}^1/_4T_0(\partial B_\nu/\partial T)_0/B^*,\quad b_\nu=T_0(\partial B_\nu/\partial T)_0B_{\nu0}^{-1}$$

$$B^* = \int\limits_{(\nu)} B_{\nu 0} d\nu, \quad h_1 = \left(\frac{\rho}{p}\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_0, \quad h_2 = \left(\frac{T}{p}\frac{\partial p}{\partial T}\right)_0$$

(1.3)

$$h_3 = \left(\frac{\rho}{U}\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)_0, \quad h_4 = \frac{c_{v0} T_0}{U_0}, \quad \gamma = 1 + \left(\frac{p_0}{\rho_0 U_0} - h_3\right)\frac{h_2}{h_1 h_4}, \quad w = c_0 t_0 / L$$

Введены обозначения: T, ρ, p, s, U — относительные возмущения (приращения) температуры, плотности, давления, энтропии, внутренней энергии; c_{v0} — удельная теплоемкость при постоянном объеме невозмущенной среды; v — скорость частиц среды, отнесенная к адиабатической скорости звука c_0 в невозмущенной среде; $I_\nu(x, t, \mathbf{\Omega})$ — возмущение интенсивности радиации относительно равновесной (черной) радиации покоящейся среды; $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор вдоль луча; ν — спектральная частота радиации. Координаты $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и время t безразмерные, отнесены к пока произвольным масштабам L, t_0; $\tau_{\nu 0}$ — оптическая длина масштаба L; μ, μ_1 — коэффициенты вязкости; λ — коэффициент теплопроводности; σ — постоянная Стефана — Больцмана; B_ν — функция Планка. Индексом нуль отмечены параметры невозмущенной среды.

В зависимости от геометрии движения будем пользоваться трех-, двухкратным или простым экспоненциальным преобразованием Фурье

$$g_j^*(t, \lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j(x, t) e^{i\lambda x} dX, \quad g_j(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^\varkappa}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g_j^*(t, \lambda) e^{-i\lambda x} d\Lambda \tag{1.4}$$

$$dX = dx_1, \ldots, dx_\varkappa, \quad d\Lambda = d\lambda_1, \ldots, d\lambda_\varkappa, \quad dZ = d\xi_1, \ldots, d\xi_\varkappa$$

Здесь интегрирование $\varkappa$-кратное в пределах от $-\infty$ до ∞ по каждой переменной, под g_j в универсальных формулах будут подразумеваться газодинамические функции, причем значениям $j = 1, 2, \ldots, 7$ будут соответствовать T_*, ρ, φ, p_*, s_*, $\mathbf{R}_*$, $\mathbf{v}$.

В предположении, что преобразование и его обращение существуют, что на бесконечности обращаются в нуль функции p, $\mathbf{v}$, I_ν и производные $\partial \mathbf{v}/\partial x_j$ при учете вязкости и $\partial T/\partial x_j$ при учете теплопроводности, из уравнений (1.1) получим систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для определения трансформаций Фурье

$$\frac{d\mathbf{v}^*}{dt_1} = i\lambda(\rho^* + T_*^*)\gamma^{-1} - \sigma_1 \lambda \mathbf{v}^* + (\sigma_1 - X_1)(\lambda \mathbf{v}^*)\lambda\lambda^{-1} \tag{1.5}$$

$$\frac{d\rho^*}{dt_1} = i\lambda \mathbf{v}^*, \quad \frac{dT_*^*}{dt_1} = i(\gamma - 1)\lambda \mathbf{v}^* - \lambda Y_1 T_*^* \tag{1.6}$$

$$\sigma_1 = \lambda N_{\mathrm{Re}}^{-1}, \quad X_1 = \lambda w X, \quad \theta_1 = \lambda w \theta, \quad Y_1 = \theta_1 + ZK$$

$$K = \int\limits_{(\nu)} A_\nu \frac{\tau_{\nu 0}}{\lambda}\left(1 - \frac{\tau_{\nu 0}}{\lambda}\operatorname{arctg}\frac{\lambda}{\tau_{\nu 0}}\right) d\nu$$

В уравнениях (1.5), (1.6) параметр λ фиксированный, вектор $\mathbf{v}$ совпадает по направлению с вектором λ. Повернем оси координат так, чтобы ось x_1 была направлена вдоль λ. В новой системе координат вместо уравнения (1.5) получим

$$dv^*/dt_1 = i\gamma^{-1}\lambda(\rho^* + T_*^*) - X_1 \lambda v^* \tag{1.7}$$

а в уравнениях (1.6) будем иметь $\lambda \mathbf{v}^* = \lambda v^*$.

Нахождение фундаментальной системы решений вида $g_{j0}^*(\lambda)\exp(\lambda n t_1)$ для уравнений (1.5), (1.7) приводит к решению характеристического уравнения

$$D_0(n) \equiv n^3 + (X_1+Y_1)n^2 + (1+X_1Y_1)n + \gamma^{-1}Y_1 = 0 \tag{1.8}$$

Простому корню n_k соответствует интеграл, который можно представить через один из параметров (скорость в первоначальных координатах)

$$\rho_k^* = \frac{n_k+Y_1}{(\gamma-1)n_k} T_{*k}^*, \qquad \mathbf{v}_k^* = -i\frac{n_k+Y_1}{\gamma-1}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} T_{*k}^* \tag{1.9}$$

Кратные корни уравнения (1.8) могут встретиться для заданной среды лишь в изолированных точках пространства (γ, X_1, Y_1) и не скажутся на обращении Фурье.

Общее решение системы (1.5), (1.6), соответствующее простым корням n_k, имеет вид

$$\begin{gathered} T_*^*(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{3} C_k e^{\lambda n_k t_1}, \qquad \rho^*(\lambda, t) = \sum_{k=1}^{3}\left(1+\frac{Y_1}{n_k}\right)\frac{C_k}{\gamma-1}e^{\lambda n_k t_1} \\ \mathbf{v}^*(\lambda, t) = -\sum_{k=1}^{3}(n_k+Y_1)\frac{C_k}{\gamma-1}e^{\gamma n_k t_1}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} \end{gathered} \tag{1.10}$$

что в соответствии с (1.4) дает решение системы (1.1).

2. Задача Коши. Задача о начальных значениях для системы (1.1) формулируется так: найти функции $g_j(x, t)$, $j=1, 2, 7$, удовлетворяющие (1.1) при $t>0$, а при $t=0$ принимающие заданные значения

$$g_j(\mathbf{x}, t) = g_{j0}(\mathbf{x}) \quad (j=1, 2, 7) \tag{2.1}$$

Для системы (1.5), (1.6) данные Коши имеют вид

$$t=0, \quad g_j^*(\lambda, 0) = g_{j0}^*(\lambda) = T_{*0}^*(\lambda), \quad \rho_0^*(\lambda), \quad \mathbf{v}_0^*(\lambda) \tag{2.2}$$

Существование решения поставленной задачи следует из фактического его построения. Так как уравнение (1.8) имеет корни с отрицательными действительными частями, т. е. ограниченными сверху, то по теореме И. Г. Петровского [3] построенное решение единственное.

Решение задачи Коши (1.5), (1.6), (2.2), отвечающее простым корням n_k, дается формулами (1.10) при значениях постоянных

$$\begin{gathered} C_k = [(n_k^2+X_1n_k+\gamma^{-1})T_{*0}^*(\lambda) - (\gamma-1)\gamma^{-1}\rho_0^*(\lambda) + \\ + i(\gamma-1)n_k\lambda^{-1}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}_0^*(\lambda)]\Delta_k^{-1} \\ \Delta_k = 3n_k^2 + 2(X_1+Y_1)n_k + X_1Y_1 + 1 \end{gathered} \tag{2.3}$$

Решение задачи Коши (1.1), (2.1) предстанет в форме

$$\begin{gathered} \pi^\varkappa g_1(\mathbf{x}, t) = \sum \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_k^{-1} G_k^{(1)}(\lambda, \mathbf{x}) e^{\lambda n_k t_1} d\Lambda \\ (\gamma-1)\pi^\varkappa g_2(\mathbf{x}, t) = \sum \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_k^{-1} G_k^{(1)}(\lambda, \mathbf{x}) \left(1+\frac{Y_1}{n_k}\right) e^{\lambda n_k t_1} d\Lambda \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$(\gamma-1)\pi^{\varkappa}g_7(\mathbf{x},t)=\sum\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\Delta_k^{-1}G_k^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})\,(n_k+Y_1)\,e^{\lambda n_k t_1}\,d\Lambda$$

$$G_k^{(1)}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=(n_k^2+X_1n_k+\gamma^{-1})F_{1c}-(\gamma-1)\gamma^{-1}F_{2c}+(\gamma-1)n_k\boldsymbol{\lambda}F_{7s}\lambda^{-1} \tag{2.5}$$

$$G_k^{(2)}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=-(n_k^2+X_1n_k+\gamma^{-1})F_{1s}+(\gamma-1)\gamma^{-1}F_{2s}+(\gamma-1)n_k\boldsymbol{\lambda}F_{7c}\lambda^{-1}$$

$$2^{\varkappa}F_{jc}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_j^{\circ}(\boldsymbol{\xi})\cos\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,dZ \tag{2.6}$$

$$2^{\varkappa}F_{js}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g_j^{\circ}(\boldsymbol{\xi})\sin\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\xi})\,dZ$$

Корни характеристического уравнения и параметры X_1, Y_1 — нечетные функции от λ, величины F_{jc}, $\boldsymbol{\lambda}F_{js}$ — четные функции вектора $\boldsymbol{\lambda}$. Интегралы в (2.4) можно брать по полупространству, удвоив их. Потенциал скорости φ, если он существует, подчиняется соотношениям

$$\lambda\varphi^*(\boldsymbol{\lambda},t)=i\lambda^{-1}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{v}^*=\sum(n_k+Y_1)C_k(\gamma-1)^{-1}\exp(\lambda n_k t_1) \tag{2.7}$$

$$\lambda^2F_{3c}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F}_{7s}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x}),\qquad -\lambda^2F_{3s}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x})=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F}_{7c}(\boldsymbol{\lambda},\mathbf{x}) \tag{2.8}$$

$$(\gamma-1)g_3(\mathbf{x},t)=\sum\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_k^{-1}G_k^{(1)}(\boldsymbol{\lambda},x)\,(n_k+Y_1)\lambda^{-1}e^{\lambda n_k t_1}\,d\Lambda \tag{2.9}$$

В случае комплексных корней эту формулу удобнее переписать в виде

$$\gamma\pi^{\varkappa}g_3(\mathbf{x},t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Delta_1^{-1}\lambda^{-1}\Big\{[n_0F_{4c}-Y_1F_{2c}+\gamma(n_0-Y_1)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F}_{7s}\lambda^{-1}]e^{-\lambda n_0 t_1}- \tag{2.10}$$

$$-[(\alpha^2+\beta^2-n_0\alpha)F_{4c}+\gamma(n_0\beta^2-(Y_1-\alpha)(\alpha^2+\beta^2-n_0\alpha))\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F}_{7s}\lambda^{-1}+$$

$$+Y_1(n_0-\alpha)F_{2c}]\frac{\sin\lambda\beta t_1}{\beta}e^{-\lambda\alpha t_1}+[Y_1F_{2c}-F_{4c}+\gamma(\alpha^2+\beta^2-2\alpha n_0+$$

$$+Y_1n_0)\boldsymbol{\lambda}\mathbf{F}_{7s}\lambda^{-1}]\cos\lambda\beta t_1\,e^{-\lambda\alpha t_1}\Big\}d\Lambda$$

$$n_1=-n_0,\qquad n_{2,3}=-\alpha\pm i\beta,\qquad \Delta_1\equiv\Delta_0=(n_0-\alpha)^2+\beta^2,\ n_0,\ \alpha,\ \beta\geqslant 0$$

Аналогично переписываются и формулы (2.4).

В случае сферически- или цилиндрически-симметричных начальных возмущений (2.1) в исходную систему уравнений в сферических или соответственно цилиндрических координатах необходимо ввести потенциал скорости и выполнить синус-преобразование Фурье функций $rg_j(r,t)$ или преобразование Ханкеля функций $g_j(r,t)$; в результате для преобразований $(rg_j)^*$ или g_j^* получим рассмотренную выше задачу Коши. Решение для функций T, ρ, φ будет представлено формулами (2.4), (2.9) или (2.10), в которых следует считать $\varkappa=1$, интегралы по λ удвоить и брать от 0 до ∞, вместо $\mathbf{v}_0$ ввести φ_0 по формулам (2.8), вместо $\mathbf{x}$ писать радиальную координату и считать соответственно

$$(2.11)\qquad F_{jc}(\lambda, r)=\frac{\sin\lambda r}{r}\int\limits_0^\infty \xi g_j^\circ(\xi)\sin\lambda\xi\,d\xi$$

$$(2.12)\qquad F_{jc}(\lambda, r)=\frac{\pi}{2}\lambda J_0(\lambda r)\int\limits_0^\infty \xi g_j^\circ(\xi)J_0(\lambda\xi)\,d\xi$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

3. Расщепления начального возмущения на тепловую волну и волну давления. В интегралах, через которые представлено решение, параметр λ пробегает все значения от нуля до бесконечности. На плоскости (X_1, Y_1) при этом описывается некоторая простая кривая $Y_1=Y_1(X_1)$, выходящая из начала координат и асимптотически устремляющаяся к прямой $Y_1=\sigma' X_1$, $\sigma'\equiv\theta/X$. Кратные корни уравнения (1.8) соответствуют на этой кривой изолированным точкам ее пересечения с дискриминантной кривой уравнения. Один корень всегда действительный $(n_1=-n_0\leqslant 0)$. В некотором интервале $0\leqslant\lambda<\lambda_1$ два других корня комплексные. Кроме того, в зависимости от физических свойств среды, могут существовать и другие диапазоны λ, которым соответствуют комплексные корни. Обозначим совокупность этих интервалов l_2, а ее дополнение до полупрямой l_1. Обозначим через D_2 область $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, в каждой точке которой $\lambda\in l_2$, а через D_1 ее дополнение до E.

Из правой части (2.4) всегда можно выделить члены $g_j^{(1)}$, которые определяются действительными корнями и описывают «подавленную волну», затухающую со временем и диффундирующую в среде. Это «пакет диффузных возмущений». Остальные члены образуют «бегущую волну» $g_j^{(2)}$, которая обязана своим существованием комплексным корням в интервалах l_2 и с течением времени затухает и диффундирует в среде,— это «пакет бегущих волн». Волновой характер движения сохраняется. Локализованное начальное возмущение расщепляется на две волны, которые в силу формул (2.4) и (2.10) представляются выражениями вида

$$(3.1)\qquad g_j^{(1)}(\mathrm{x}, t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_{1j}(\lambda, \mathrm{x})\,e^{-\lambda n_0 t_1}\,d\Lambda+$$

$$+\int\limits_{D_1}[F_{2j}(\lambda, \mathrm{x})\,e^{\lambda n_2 t_1}+F_{3j}(\lambda, \mathrm{x})\,e^{\lambda n_3 t_1}]\,d\Lambda$$

$$g_j^{(2)}(\mathrm{x}, t)=\int\limits_{D_2}e^{-\lambda\alpha t_1}\{[P_j(\lambda)\sin\lambda\mathrm{x}+Q_j(\lambda)\cos\lambda\mathrm{x}]\sin\lambda\beta t_1+$$

$$+[P_j'(\lambda)\sin\lambda\mathrm{x}+Q_j'(\lambda)\cos\lambda\mathrm{x}]\cos\lambda\beta t_1\}\,d\Lambda$$

Бегущие волны являются суммой четырех пакетов затухающих стоячих волн, отличающихся амплитудами и аргументами (на $\pi/2$), или бегущие волны составляются из двух пакетов распространяющихся в противоположные стороны затухающих косинусоидальных волн и из двух пакетов затухающих синусоидальных волн, бегущих в противоположных направлениях. В общем случае амплитуды Фурье-компонентов каждого пакета разные. Начальное возмущение, как следует из (3.1), (3.2), в любой последующий момент времени сказывается во всей среде, что соответствует смыслу закона теплопроводности Фурье и пренебрежению в исходных уравнениях радиационной газовой динамики членами, содержащими скорость света в знаменателе.

4. Частные виды сред. Представление возмущения в виде суперпозиции двух волн – подавленной (тепловой) и бегущей волн – не является специфическим эффектом радиационного теплообмена: оно присуще задаче о начальных значениях для всех сред, в том числе и для идеальной сжимаемой жидкости без вязкости и теплообмена. Это легко выяснить, отправляясь каждый раз от исходной системы уравнений.

1. Идеальная сжимаемая жидкость. В пренебрежении диссипацией энергии из уравнений притока тепла, неразрывности и состояния получаются соотношения

$$\gamma\rho=p_*-s_{*0}(\mathrm{x}),\qquad \gamma T_*=(\gamma-1)p_*+s_{*0}(\mathrm{x}),\qquad s_*=s_{*0}(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

Уравнения (1.1) сводятся к однородному волновому уравнению для определения давления, скорости (или потенциала скорости) и в соответствии с (4.1) к волновому уравнению с правой частью для определения ρ, T. Движение адиабатическое, начальное распределение энтропии сохраняется неизменным, образуя «подавленный импульс». Неадиабатическое начальное возмущение (2.1) распадается на «подавленное», не меняющееся со временем, и «бегущее», управляемое волновым уравнением.

Для начальных функций, удовлетворяющих условиям существования преобразований Фурье и их обращений, решение может быть получено как частный случай рассмотренного выше. Действительно, при X, θ, $Z\to 0$ характеристическое уравнение (1.8) имеет корни (2.11), причем $n_0=\alpha=0$, $\beta=1$, и формулы (2.4), (2.10) сведутся к следующим:

$$\begin{aligned}
\pi^{\varkappa}\mathrm{v}(\mathrm{x},t)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\left(\frac{1}{\gamma}F_{4s}\sin\lambda t_1+\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\mathrm{F}_{7c}\cos\lambda t_1\right)d\Lambda\\
\pi^{\varkappa}p_*(\mathrm{x},t)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(F_{4c}\cos\lambda t_1+\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\gamma\mathrm{F}_{7s}\sin\lambda t_1\right)d\Lambda\\
\pi^{\varkappa}\varphi(\mathrm{x},t)&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{\gamma}F_{4c}\sin\lambda t_1-\frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda}\mathrm{F}_{7s}\cos\lambda t_1\right)d\Lambda
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Остальные параметры определяются соотношениями (4.1).

Это решение исходной системы уравнений для недиссипативной жидкости при неизэнтропических начальных возмущениях, оно переходит в классическое решение, если считать начальные возмущения изэнтропическими. Система исходных уравнений радиационной газовой динамики для задачи Коши оказывается регулярно возмущенной системой уравнений классической газовой динамики. Из этих формул видно, что в нулевом приближении (X, θ, $Z\to 0$) возмущения температуры и плотности распадаются на подавленное возмущение, определяемое только начальными возмущениями энтропии, и на бегущий волновой пакет, определяемый начальным возмущением давления и скорости. Возмущения давления и скорости состоят только из бегущего волнового пакета, возбужденного начальными возмущениями давления и скорости. Начальное возмущение энтропии остается неизменным с течением времени.

2. Вязкая сжимаемая жидкость, $Y_1=0$. Соотношения (4.1) сохраняются, возбуждается адиабатическое движение. Начальный ввод тепла представляет собой неподвижное возмущение. Бегущие волны затухают и диффундируют в среде под влиянием вязкости. Давление (и потенциал скорости, если существует) определится уравнением в частных производных третьего порядка. Характеристическое уравнение (1.8) имеет корни

$$n_1=-0,\qquad n_{2,3}=-\lambda'+\beta',\qquad \lambda'\equiv{}^1/_2X_1,\qquad \beta'\equiv\sqrt{\lambda'^2-1} \tag{4.3}$$

Решение определится (2.4) при $Y_1 \to 0$ и (4.1), причем

$$\pi^{\varkappa} p_*(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda'^2 t'} \left\{ \left[\operatorname{ch}(\lambda'\beta' t') + \frac{\lambda'}{\beta'} \operatorname{sh}(\lambda'\beta' t') \right] F_{4c} + \right. \tag{4.4}$$

$$\left. + \frac{\gamma}{\beta'} \operatorname{sh}(\lambda'\beta' t') \frac{\lambda'}{\lambda'} \mathrm{F}_{7s} \right\} d\Lambda$$

$$\pi^{\varkappa} \mathrm{v}(\mathbf{x}, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda'^2 t'} \frac{\boldsymbol{\lambda}'}{\lambda'} \left\{ \frac{\operatorname{sh}(\lambda'\beta' t')}{\gamma\beta'} F_{4s} + \right. \tag{4.5}$$

$$\left. + \left[\operatorname{ch}(\lambda'\beta' t') - \frac{\lambda'}{\beta'} \operatorname{sh}(\lambda'\beta' t') \right] \frac{\boldsymbol{\lambda}'}{\lambda'} \mathrm{F}_{7c} \right\} d\Lambda$$

$$\boldsymbol{\lambda}' = {}^1/_2 Xw\boldsymbol{\lambda}, \qquad t = {}^1/_2 Xt', \qquad \mathbf{x} = {}^1/_2 Xw\mathbf{x}' \tag{4.6}$$

При $\lambda' < 1$ гиперболические функции заменятся на тригонометрические, а β' — на $\beta_1' = \sqrt{1 - \lambda'^2}$.

Как и в идеальной среде, возмущения температуры и плотности включают в себя постоянный энтропийный импульс, а возмущения давления и скорости его не содержат. В вязком газе подавленная волна определяется еще и другими членами — интегралами, вычисленными в области $\lambda' > 1$, которые зависят от начальных возмущений давления и скорости. Подавленная волна является функцией времени — затухает со временем и диффундирует в среде. Она образуется суперпозицией апериодических затухающих возмущений и является составляющей возмущений температуры, плотности, скорости и давления. Лишь возмущение энтропии остается неизменным. Бегущий волновой пакет возмущений T, ρ, $\mathbf{v}$, p определяется интегралами правой части (4.4), (4.5), взятыми в области $\lambda' < 1$. Наличие вязкой диссипации приводит, таким образом, к выделению подавленной волны, меняющейся со временем.

3. Пьезотропная среда (среда с разделяющейся энергией). Будем учитывать все диссипативные процессы. Значительное упрощение вычислений возникает из-за соотношений

$$\gamma = 1, \quad h_1 = \rho_0 c_0^2 / p_0, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = p_0 / \rho_0 U_0, \quad h_4 = c_{v0} T_0 / U_0 \tag{4.7}$$

$$p_* = \rho, \qquad s = T$$

Основная система уравнений радиационной газовой динамики распадается на две, одна из которых определяет поле скоростей, плотностей, давлений, а вторая — температурное поле и энтропию. Первая система для давления, плотности, потенциала скоростей (если он существует) и для $\operatorname{div} \mathbf{v}$ в общем случае сводится к одному уравнению вида (4.3). Уравнение притока тепла приобретает вид

$$\partial T / \partial t_1 = \theta w \Delta T - Z R_1 \tag{4.8}$$

и рассматривалось в [4]. Характеристическое уравнение (1.8) распадается на два, корни уравнения равны

$$n_1 = -n_0 = -Y_1, \qquad n_{2,3} = -\lambda' \mp \beta' \tag{4.9}$$

и решение примет форму

$$\pi^{\varkappa} T(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{1c} e^{-\lambda Y_1 t_1} d\Lambda$$

$$\pi^{\varkappa} \rho(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda'^2 t'} \left\{ \left[\operatorname{ch}(\lambda'\beta' t') + \frac{\lambda'}{\beta'} \operatorname{sh}(\lambda'\beta' t') \right] F_{2c} + \right. \tag{4.10}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sh}(\lambda'\beta' t')}{\beta'} \frac{\boldsymbol{\lambda}'}{\lambda'} \mathrm{F}_{7s} \right\} d\Lambda$$

$$\pi^{\varkappa} \mathrm{v}(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{\lambda}'}{\lambda'} e^{-\lambda'^2 t'} \left\{ \frac{\operatorname{sh}(\lambda'\beta' t')}{\beta'} F_{2s} + \right.$$

$$\left. + \left[\operatorname{ch}(\lambda'\beta' t') - \frac{\lambda'}{\beta'} \operatorname{sh}(\lambda'\beta' t') \right] \frac{\boldsymbol{\lambda}'}{\lambda} \mathrm{F}_{7c} \right\} d\Lambda$$

В формуле для T слева и справа множители h_2/h_1 следует отбросить. Температурное поле (и энтропийное) не зависит от поля скоростей и давлений, оно слагается из диффундирующих в среде экспоненциально затухающих непериодических (подавленных) элементарных возмущений. Поля скоростей, давлений и плотностей расщепляются на два волновых пакета: подавленный, изображаемый формулами (4.9), в которых интегралы берутся в области $\lambda'>0$, и бегущий, где интегрирование производится по дополнению указанной области до E, т. е. при $\lambda'<1$, с заменой гиперболических функций тригонометрическими и β' на β_1'.

Выражения для давления и скорости совпадают, естественно, с таковым для вязкой жидкости, если там положить $\gamma=1$. Для плотности соответствие нарушается появлением в выражении (4.1) энтропийной составляющей. Выражения для температуры и энтропии отличаются: здесь они определяются притоком тепла за счет теплопроводности и радиации и уравнением состояния, там они определялись давлением с помощью уравнения адиабаты и другого уравнения состояния.

4. *Теплообменная невязкая среда.* В невязкой сжимаемой жидкости при наличии переноса тепла молекулярной теплопроводностью и механизмами термической радиации все уравнения системы (1.1) связаны между собой. Характеристическое уравнение (1.8) кубическое, при $1<\gamma<9$ имеет два комплексных корня. При любых θ, Z, если они не равны нулю одновременно, возмущенное движение при $t>0$ слагается из бегущего волнового пакета и подавленного, и решение при $1<\gamma<9$ имеет форму (2.10), область D_1, указанная в п. 3, исчезнет, область $D_2\equiv E$. При $\gamma>9$ имеется диапазон значений Y_1

$$Y_1^-<Y_1<Y_1^+,\quad Y_1^\pm=\{(8\gamma)^{-1}[\gamma^2+18\gamma-27\pm \pm(\gamma^4-48\gamma^3+10\gamma^2-432\gamma+729)^{1/2}]\}^{1/2} \tag{4.11}$$

когда все три корня действительные, т. е. появляется область D_1 (обе величины $Y_1^\pm$ с ростом γ монотонно возрастают от $3^{1/2}$ при $\gamma=9$ до 2 (нижняя) и до бесконечности (верхняя граница)). В случае чисто излучающей жидкости ($X=\theta=0$) и при $\gamma>9$ область D_1 может не существовать. Действительно, в теплопроводной жидкости при изменении λ от 0 до ∞ величина Y_1 изменяется от 0 до ∞ независимо от радиационного теплообмена, а в нетеплопроводной радиирующей жидкости $Y_1=ZK\leqslant 0.2229878\,Z$, и эта верхняя граница Y_1 может быть ниже нижней границы в неравенстве (4.11).

5. *Среда с соотношением* $Y_1=\gamma X_1$. Это соотношение может существовать либо для неизлучающей жидкости, либо при учете переноса радиации в диффузионном приближении. Для неизлучающей стоксовской жидкости это условие означает, что число Прандтля принимается равным $^3/_4$, что приблизительно соответствует воздуху. Характеристическое уравнение в этом случае распадается на два, корни оказываются равными

$$n_1=-Y_1/\gamma=-X_1,\quad n_{2,3}=-\lambda''\mp\beta'',\quad \lambda''={}^1/_2\gamma X_1,\quad \beta''=(\lambda''^2-1)^{1/2} \tag{4.12}$$

Решение представится формулами

$$\pi^\varkappa T_*(\mathrm{x},t)=\frac{1}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda''^2t''/\gamma}\Delta_0^{-1}[F_{1c}-(\gamma-1)F_{2c}-2(\gamma-1)\lambda''\mathrm{F}_{7s}]\,d\Lambda''+$$

$$+\frac{\gamma-1}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda''^2t''}\Delta_0^{-1}\left\{\left[\left(1-\frac{4}{\gamma}\lambda''^2\right)\operatorname{ch}t_1''+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda''}{\gamma}(4\lambda''^2-\gamma-2)\frac{\operatorname{sh}t_1''}{\beta''}\right]F_{1c}+\left(\operatorname{ch}t_1''+\frac{\gamma-2}{\gamma}\lambda''\frac{\operatorname{sh}t_1''}{\beta''}\right)F_{2c}+$$

$$\left.+\left[2\lambda''\operatorname{ch}t_1''+(\gamma-2\lambda''^2)\frac{\operatorname{sh}t_1''}{\beta''}\right]\frac{\lambda''}{\lambda''}\mathrm{F}_{7s}\right\}d\Lambda''$$

$$\gamma\pi^\varkappa\rho(\mathrm{x},t)=-\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-2\lambda''^2t''/\gamma}\Delta_0^{-1}[F_{1c}-(\gamma-1)F_{2c}-2(\gamma-1)\lambda''F_{7s}]\,d\Lambda''+ \tag{4.13}$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda''^2t''}\Delta_0^{-1}\left\{\left(\operatorname{ch}t_1''+\frac{\gamma-2}{\gamma}\lambda''\frac{\operatorname{sh}t_1''}{\beta''}\right)F_{1c}+\right.$$

$$+\left[\Delta_0 \operatorname{ch} t_1'' + \left(2\frac{\gamma-1}{\gamma}+\Delta_0\right)\frac{\lambda''\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]F_{2c} -$$

$$-\gamma\left[2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''\operatorname{ch} t_1'' - \left(1-2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''^2\right)\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]\frac{\lambda''}{\lambda''}\mathrm{F}_{7s}\Bigg\}d\Lambda''$$

$$\gamma\pi^{\varkappa}\mathrm{v}(\mathrm{x},t) = -\frac{2}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda'' e^{-2\lambda''^2 t''/\gamma}\Delta_0^{-1}[F_{1s}-(\gamma-1)F_{2s}+2(\gamma-1)\lambda''\mathrm{F}_{7c}]d\Lambda'' +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda''}{\lambda''}e^{-\lambda''^2 t''}\Delta_0^{-1}\left\{\left[\frac{2}{\gamma}\lambda''\operatorname{ch} t_1'' + \left(1-\frac{2}{\gamma}\lambda''^2\right)\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]F_{1s} -\right.$$

$$-\left[2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''\operatorname{ch} t_1'' - \left(1-2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''^2\right)\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]F_{2s} +$$

$$\left.+\gamma\left[\operatorname{ch} t_1'' + \frac{\gamma-2}{\gamma}\lambda''\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]\frac{\lambda''}{\lambda''}\mathrm{F}_{7c}\right\}d\Lambda''$$

$$\lambda'' = {}^1/_2\gamma X w\lambda,\qquad \mathrm{x} = {}^1/_2\gamma X w \mathrm{x}'',\qquad t = {}^1/_2\gamma X t'',\qquad t_1'' = \lambda''\beta'' t''$$

$$\Delta_0 = 1-4(\gamma-1)\lambda''^2/\gamma,\qquad F_{jc,s} = F_{jc,s}(\lambda'', x'')$$

Первые интегральные члены в правых частях и вторые в области $\lambda''>1$ изображают подавленную волну — она слагается из экспоненциально затухающих со временем и диффундирующих в среде апериодических волн. Вторые члены правых частей в области $\lambda''<1$ изменяются, гиперболические функции заменяются тригонометрическими, параметр β'' — на $\beta_1''=(1-\lambda''^2)^{1/2}$. Они описывают бегущий волновой пакет, состоящий из затухающих со временем и диффундирующих в среде синусоидальных волн.

Давление и энтропия выражаются следующим образом:

$$\pi^{\varkappa}p_*(\mathrm{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda''^2 t''}\Delta_0^{-1}\left\{\left(\operatorname{ch} t_1'' - \frac{\lambda''}{\beta''}\operatorname{sh} t_1''\right)F_{1c} +\right.$$

$$\left.+\left(\operatorname{ch} t_1'' + \frac{\lambda''}{\beta''}\operatorname{sh} t_1''\right)F_{2c} + \frac{\gamma}{\beta''}\operatorname{sh} t_1''\frac{\lambda''}{\lambda''}\mathrm{F}_{7s}\right\}d\Lambda''$$

(4.14) $$\pi^{\varkappa}s_*(\mathrm{x},t) = \int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\lambda''^2 t''/\gamma}\Delta_0^{-1}[F_{1c}-(\gamma-1)F_{2c}-2(\gamma-1)\lambda''\mathrm{F}_{7s}]d\Lambda'' -$$

$$-2\frac{\gamma-1}{\gamma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\lambda''^2 t''}\Delta_0^{-1}\left\{\left[2\lambda''\operatorname{ch} t_1'' + (\gamma-2\lambda''^2)\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]\frac{\lambda''}{\gamma}F_{1c} -\right.$$

$$-\left[2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''\operatorname{ch} t_1'' - \left(1-2\frac{\gamma-1}{\gamma}\lambda''^2\right)\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]\lambda''F_{2c} -$$

$$\left.-\left[\gamma\operatorname{ch} t_1'' + (\gamma-2)\lambda''\frac{\operatorname{sh} t_1''}{\beta''}\right]\lambda''\mathrm{F}_{7c}\right\}d\Lambda''$$

В формулу для давления интеграл, определяемый первым корнем n_0, не вошел и подавленная волна определяется только вторым интегралом в области $\lambda''>1$, который обязан своим существованием двум другим действительным корням характеристического уравнения.

В отличие от чисто вязкой и пьезотропной среды составляющие подавленных волн температуры, плотности, скорости и энтропии, обязанные первому корню, индуцируются начальными возмущениями энтропии и скорости. Составляющие, обязанные другим двум действительным корням, индуцируются начальными возмущениями двух термодинамических параметров и скорости. Бегущие волновые пакеты возмущений всех параметров возбуждаются начальными возмущениями двух термодинамических параметров и скорости.

Расщепление возмущения на подавленную и бегущие волны происходит и в нерадиирующих средах. Бегущие волны индуцируются начальными возмущениями в любом газе. Подавленные волны возникают также в любом газе при неизэнтропическом начальном возмущении, но при отсутствии теплообмена теплопроводностью или радиацией «подавленная» часть начального возмущения остается неизменной. При наличии теплообмена (теплопроводностью или радиацией) изэнтропическое и неизэнтропическое возмущения индуцируют «подавленную волну», затухающую со временем и диффундирующую как в вязком, так и в идеальном газе. Возбуждение двух типов волновых явлений имеет место, следовательно, и в излучающем и поглощающем невязком и нетеплопроводном газе, в том числе при изэнтропическом начальном возмущении. Однако по существу это не связано с появлением какой-либо новой «радиационной» моды колебаний в газе, отличной от тепловых волн, хотя физический механизм их возбуждения иной, чем волн теплопроводности.

5. Периодические начальные функции. Пусть для всех вещественных $\mathbf{x}$ заданные начальные функции (2.1) периодические с периодами $2l_k$ по каждому из переменных x_k, интегрируемые (в собственном или несобственном смысле) в параллелепипеде $Q[-l_1, l_1; \ldots; -l_\varkappa, l_\varkappa]$. Тогда начальные функции $g_j^\circ(\mathbf{x})$ представимы $\varkappa$-кратными рядами Фурье

$$g_j^\circ(\mathbf{x})=\sum_{-\infty}^{\infty} g_{jm}^\circ(x)e^{-i\lambda_m\mathbf{x}} \tag{5.1}$$

$$g_{jm}^\circ=(2^\varkappa l_1\ldots l_\varkappa)^{-1}\int\limits_Q g_j^\circ(\mathbf{x})e^{i\lambda_m\mathbf{x}}\,dX \tag{5.2}$$

$$m=m_1,\ldots,m_\varkappa;\qquad \lambda_m\mathbf{x}=\lambda_{1m}x_1+\ldots+\lambda_{\varkappa m}x_\varkappa,\qquad \lambda_{nm}=\pi m_n/l_n$$

$$n=1,\ldots,\varkappa;\qquad \lambda_m=(\lambda_{1m}^2+\ldots+\lambda_{\varkappa m}^2)^{1/2}$$

Суммирование ведется по $m_1,\ldots,m_\varkappa$, принимающим значения $0, \pm1, \pm2,\ldots$, интегрирование — по $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_\varkappa)\subset Q$.

Решение системы уравнений (1.1) при начальных условиях (2.1) будем искать в виде рядов

$$g_j(\mathbf{x},t)=\sum_{-\infty}^{\infty} g_{jm}^*(t)e^{-i\lambda_m\mathbf{x}} \tag{5.3}$$

дифференцируемых 2 раза по x_k и 3 раза по t. Отсюда совместно с (2.1), (5.1) получим, что при $t=0$ $g_{jm}^*(0)=g_{jm}^\circ$, где g_{jm}° определяются формулой (5.2) и являются функциями $\lambda_{1m},\ldots,\lambda_{\varkappa m}$.

Обычными методами при известных ограничениях на начальные функции, определяющих существование и свойства конструируемого решения, для определения коэффициентов Фурье $g_{jm}^*(t)$ получаются уравнения (1.5), (1.6) с формальной заменой $g_{jm}^*(\lambda, t)$ на g_{jm}^*. В эту систему входит лишь модуль вектора λ_m и не входят отдельно его компоненты. Корни характеристического уравнения $n_k(\lambda_m)$ будут зависеть лишь от λ_m, а не отдельно от компонентов λ_{mk}. В зависимости от корней общее решение представится в одной из форм, которые могут быть немедленно выписаны. Простым корням соответствует решение (1.13), в котором вместо g_j^*, λ, C_k, n_k следует подставить g_{jm}^*, λ_m, C_{km}, $n_k(\lambda_m)$, где C_{km} определяется формулами (2.3) с заменой g_{j0}^* на g_{jm}°. Решение получится суммированием по всем m_k в соответствии с (5.3). Индексы $m_1,\ldots,m_\varkappa$ по отдельности войдут через коэффициенты Фурье (5.2) начальных функций.

Поскольку суммирование начинается со значений $m_n=0$, то при любых условиях в среде для низших гармоник существуют два комплексных сопряженных корня уравнения (1.8), все три корня простые. При обычных условиях для газов комплексные корни перестают существовать только для гармоник столь высокого порядка, когда их влиянием можно пренебречь.

Не представляет труда показать что достаточными условиями, чтобы полученные таким формализмом функции были решением рассматриваемой задачи Коши, являются непрерывность первых двух производных начальных функций и кусочная непрерывность третьей производной. Эти требования можно ослабить известными методами [5–11].

Поступила 20 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прокофьев В. А.* Основное уравнение радиационной акустики и решение задачи Коши. Докл. АН СССР, 1970, т. 194, № 6.
2. *Прокофьев В. А.* Распространение свободных слабых плоских волн в излучающем вязком газе. В сб. «Вопросы механики». М., Изд-во МГУ, 1961.
3. *Петровский И. Г.* О проблеме Cauchy для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюл. МГУ, Секция А. Математика и механика, 1938, т. 1, вып. 7.
4. *Прокофьев В. А.* Возмущения температурного поля в пьезотропной среде. Докл. АН СССР, 1971, т. 198, № 3.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.
6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики, т. 4. М., Гостехиздат, 1951.
7. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1954.
8. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.– Л., Гостехиздат, 1950.
9. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.– Л., Гостехиздат, 1951.
10. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.
11. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения математической физики. М., Физматгиз, 1962.