

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ГОДОГРАФА В ЗАДАЧАХ ОКОЛОЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЕЙ

З. Н. ДОБРОВОЛЬСКАЯ

(Москва)

Рассматривается обтекание тонкого профиля потоком идеального газа, имеющим на бесконечности постоянную скорость, близкую к звуковой. Изучается поведение возмущенного потока в области, расположенной вверх по потоку от скачков уплотнения достаточно далеко от обтекаемого тела.

Исследуется вопрос о том, каким условиям удовлетворяет решение на плоскости годографа в том случае, когда оно соответствует течению, не имеющему особенностей на предельной характеристике в физической плоскости течения. Известно, что возможны случаи, когда решение, регулярное в плоскости годографа, теряет свойство регулярности при отображении его на физическую плоскость [1]. Течение, регулярное на предельной характеристике, может быть аналитически продолжено вниз по потоку в сверхзвуковую область, расположенную между предельной характеристикой и ударной волной. Для реализуемости рассматриваемого течения существенным является требование аналитичности обтекаемого профиля.

1. Получим асимптотическое разложение для потенциала Лежандра в переменных годографа, аналогичное тому, которое было найдено в переменных физической плоскости течения для потенциала возмущенной скорости [2].

Пусть тонкое тело обтекается плоскопараллельным установившимся потоком идеального газа, имеющим на бесконечности скорость, близкую к скорости звука. Декартову систему координат x, y ориентируем так, чтобы ось x соответствовала направлению невозмущенного потока. Для описания трансзвукового течения вдали от тела воспользуемся приближенным уравнением Кармана [3] для потенциала $\Phi(x, y)$ возмущенной скорости (исходным в этом уравнении считается потенциал потока, имеющего на бесконечности критическую скорость). Компоненты скорости возмущений будем обозначать через $u = \partial\Phi/\partial x$, $v = \partial\Phi/\partial y$. Известно, что если ввести потенциал Лежандра

$$(1.1) \quad \varphi(u, v) = ux + vy - \Phi(x, y) \\ x = \varphi_u(u, v), \quad y = \varphi_v(u, v)$$

то аналогом нелинейного уравнения Кармана будет линейное уравнение Трикоми в плоскости годографа

$$(1.2) \quad -u\varphi_{vv} + \varphi_{uu} = 0$$

В задачах обтекания тел околозвуковым потоком газа решение и уравнения Кармана, и уравнения Трикоми можно искать в виде суммы двух членов, первый из которых, главный, даст асимптотический закон затухания возмущений в потоке с критической скоростью, второй же позволяет учесть изменение поля течения, вызванное отклонением скорости невозмущенного потока от скорости звука [1]. Главный член решения уравне-

ния Кармана вдали от обтекаемого тела дается автомодельной функцией [4, 5]

$$(1.3) \quad \Phi_0(x, y) = y^{2/3} f_0(\xi), \quad \xi = x / y^{1/3}$$

$$(1.4) \quad f_0 = 6^{-1} a_1^{3/5} s_0^{-1/5} (2s_0^2 - 3s_0 + 6), \quad \xi = 2^{-1} a_1^{1/5} s_0^{-2/5} (2s_0 - 1) \\ (a_1 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^{-3})$$

При этом $s_0 = 0$ соответствует отрицательной полуоси x , а $s_0 = 1/3$ — предельным характеристикам ($\xi = 1$). Компоненты скорости, отвечающие решению (1.3), определяются формулами

$$(1.5) \quad u_0 = a_1^{2/5} y^{-2/5} s_0^{1/5} (s_0 - 1), \quad v_0 = 3^{-1} a_1^{2/5} y^{-3/5} s_0^{-4/5} (3 - 2s_0)$$

Параметрическое представление функций (1.4), (1.5) было дано в работе [6]. В дальнейшем в работе [7] формулы, аналогичные (1.5) для осесимметричного обтекания, рассматривались как преобразование плоскости годографа u, v в плоскость новых переменных годографа. Следуя [7], совершим аналогичное преобразование годографа. Введем переменную $\sigma_0 = a_1^{1/5} y^{-1/5} \xi^{1/10}$, которая является малой в исследуемой области, т. е. при больших значениях y . Тогда формулы (1.5) примут вид

$$(1.6) \quad u_0 = \sigma_0^2 (s_0 - 1), \quad v_0 = 3^{-1} \sigma_0^3 s_0^{1/2} (3 - 2s_0)$$

Главный член разложения потенциала Лежандра, соответствующий потенциалу скорости (1.3), дается функцией

$$(1.7) \quad \varphi_0 = -2^{-1} a_1 \sigma_0^{-2}$$

По аналогии с зависимостями (1.6) рассмотрим в качестве новых переменных годографа переменные σ, s , связанные с u, v следующими уравнениями:

$$(1.8) \quad u = \sigma^2 (s - 1), \quad v = 3^{-1} \sigma^3 s^{1/2} (3 - 2s)$$

В первом приближении компоненты скорости возмущений (1.8) совпадают соответственно с u_0, v_0 . Преобразование годографа (1.8) уже использовалось в работе [8] для изучения обтекания профиля звуковым потоком газа.

Уравнение (1.2) после введения переменных σ, s принимает вид

$$(1.9) \quad -4^{-1} \sigma^2 \varphi_{\sigma\sigma} - \sigma s \varphi_{ss} + s(3s - 4) \varphi_{ss} - 3 \cdot 4^{-1} \sigma \varphi_{\sigma} + (4s - 2) \varphi_s = 0$$

Решение уравнения (1.9) вдали от обтекаемого профиля ищется в виде

$$(1.10) \quad \varphi(\sigma, s) = \varphi_0(\sigma) + \varphi_1(\sigma, s) \\ \varphi_0 = -2^{-1} a_1 \sigma^{-2}, \quad \varphi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma^{v_k} \chi_k(s)$$

Функция $\varphi_0(\sigma)$ удовлетворяет уравнению (1.9) и является в разложении (1.10) главным членом. Относительно функции $\varphi_1(\sigma, s)$ предполагается, что в исследуемой области $|\varphi_1| \ll |\varphi_0|$, однако на бесконечности физической плоскости ($\sigma \rightarrow 0$) функция φ_1 должна превышать главный член, так как в противном случае решение (1.10), продолженное до бесконечности, описывало бы обтекание тела звуковым потоком газа. Последнее условие налагает следующее ограничение на выбор спектра значений v_k :

$$(1.11) \quad \dots < v_k < v_{k-1} < \dots < v_1 < -2$$

Подставляя решение (1.10) в уравнение (1.9), получим для функции $\chi_k(s)$ уравнение

$$(1.12) \quad 4s(4-3s)\chi_k''(s) + 4[(v_k-4)s+2]\chi_k'(s) + v_k(v_k+2)\chi_k(s) = 0$$

которое сводится к гипергеометрическому уравнению Гаусса заменой $t=3\cdot 4^{-1}s$

$$(1.13) \quad t(1-t)\chi_k''(t) + [\gamma - (\alpha + \beta - 1)t]\chi_k'(t) - \alpha\beta\chi_k(t) = 0$$

$$\alpha = 2^{-1}v_k, \quad \beta = 6^{-1}(2+v_k), \quad \gamma = 2^{-1}$$

Уравнение (1.13) совпадает с уравнением (2.4) работы [2], если положить $v_k = -5\omega_k$. Поэтому воспользуемся уже найденными в работе [2] собственными значениями ω_k , которые позволяют построить систему собственных функций, удовлетворяющих условию регулярности на предельной характеристике (такие функции называют «естественными»). Тогда «симметричные» собственные значения уравнения (1.13), удовлетворяющие ограничению (1.11), будут следующие:

$$(1.14) \quad v_k^{(s)} = -6k - 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Система собственных функций, отвечающая собственным значениям (1.14), описывает поток, симметричный относительно оси x . Последовательность

$$(1.15) \quad v_i^{(a)} = -6i - 5, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

представляет собой собственные значения, позволяющие построить антисимметричное решение. Разложение потенциала Лежандра в плоскости σ, s будет иметь вид

$$(1.16) \quad \varphi(\sigma, s) = -2^{-1}a_1\sigma^{-2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(s)} \sigma^{-6k-2} \chi_k^{(s)}(s) + \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(a)} \sigma^{-6i-5} \chi_i^{(a)}(s)$$

Для случая обтекания тела звуковым на бесконечности потоком показано [8], что в аналогичном разложении потенциала Лежандра «симметричные» собственные функции являются полиномами, а «антисимметричные» — полиномами с точностью до множителя. Этим же свойством будут обладать и функции $\chi_k^{(s)}(s)$ и $\chi_k^{(a)}(s)$ в разложении (1.16).

Перейдем теперь в разложении (1.16) от переменных σ, s к переменным годографа η, v ($\eta = u^3/v^2$). Из формул (1.8) видно, что переменная s будет функцией, зависящей только от η , а для переменной σ получим

$$(1.17) \quad \sigma = v^{1/3} [3s^{-1/2}(\eta) (3-2s(\eta))^{-1}]^{1/3}$$

Тогда разложение (1.16) перейдет на плоскости uv в разложение по дробным степеням v с коэффициентами, зависящими от η

$$(1.18) \quad \varphi(u, v) = \Omega_0(\eta) v^{-2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(s)} \Omega_k^{(s)}(\eta) v^{-2k-2/3} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(a)} \Omega_i^{(a)}(\eta) v^{-2k-5/3}$$

Здесь функции $\Omega_k(\eta)$ уже не будут полиномами. Решение (1.18) остается регулярным на предельной характеристике в плоскости uv , так как преобразование (1.8) не является особым. В дальнейшем нам потребуется асимптотическое представление функции тока Ψ . Это представление,

на основании того что $\Psi = y = \varphi_v(u, v)$, будет иметь вид

(1.19)

$$y = \Psi = Y_0(\eta) v^{-5/3} + v^{-5/3} \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(s)} Y_k^{(s)}(\eta) v^{-2k} + v^{-5/3} \sum_{i=0}^{\infty} c_i^{(a)} Y_i^{(a)}(\eta) v^{-(2i+1)}$$

2. Сравним результаты, полученные в плоскости годографа, с решением этой же задачи в физической плоскости течения. Для этого воспользуемся асимптотическим разложением потенциала скорости возмущений, найденным в [2]

(2.1)

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 + \Phi_1 = y^{2/3} f_0(\xi) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(s)} y^{\omega_i^{(s)}} f_i^{(s)}(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(a)} y^{\omega_k^{(a)}} f_k^{(a)}(\xi)$$

$$\omega_i^{(s)} = 6/5 i + 2/5 \quad (i=1, 2, \dots), \quad \omega_k^{(a)} = 6/5 k + 1 \quad (k=0, 1, 2)$$

Решение (2.1) в силу способа его построения является регулярным на предельной характеристике. Отобразим это решение на плоскость годографа. Процедура отображения изложим очень кратко, так как к работе [8] детально описан обратный переход на физическую плоскость для случая обтекания тела звуковым потоком. Компоненты скорости возмущений, определяемые потенциалом (2.1), имеют вид

$$(2.2) \quad u = y^{2/3} [F_0(\xi) + Y^2 F_2(\xi) + Y^3 F_3(\xi) + \dots]$$

$$(2.3) \quad v = y^{-3/5} [G_0(\xi) + Y G_1(\xi) + Y^2 G_2(\xi) + \dots], \quad Y = y^{3/5}$$

откуда

$$(2.4) \quad \eta = u^3 / v^2 = H_0(\xi) + H_1(\xi) Y + H_2(\xi) Y^2 + \dots$$

Из выражения (2.3) можно получить

$$(2.5) \quad Y = A_1(\xi) v^{-1} + A_2(\xi) v^{-2} + A_3(\xi) v^{-3} + \dots$$

Разложение для η после подстановки в него (2.5) примет вид

$$(2.6) \quad \eta = h_0(\xi) + h_1(\xi) v^{-1} + h_2(\xi) v^{-2} + h_3(\xi) v^{-3} + \dots$$

Исходя из (2.6) представим ξ в виде

$$(2.7) \quad \xi = h_0^{-1}(\eta) + \xi_1(\eta, v), \quad \xi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(\eta) v^{1k}$$

Здесь h_0^{-1} — оператор, обратный оператору h_0 . Функция $h_0^{-1}(\eta)$ является главным членом разложения (2.7), а ξ_1 предполагается малой по сравнению с h_0^{-1} . Подставляя (2.7) в (2.6) и разлагая функции h_i в окрестности точки $\xi_0 = h_0^{-1}(\eta)$ в ряд Тейлора, из сравнения левой и правой частей найдем показатели γ_k . Тогда разложение для ξ примет вид

$$(2.8) \quad \xi = h_0^{-1}(\eta) + g_1(\eta) v^{-1} + g_2(\eta) v^{-2} + g_3(\eta) v^{-3} + \dots$$

Переменная y на основании (2.5) представима в виде

$$(2.9) \quad y = v^{-5/3} [E_1(\xi) + E_2(\xi) v^{-1} + E_3(\xi) v^{-2} + \dots]$$

Подставляя сюда вместо ξ выражение (2.8) и разлагая функции $E_i(\xi)$ в окрестности точки ξ_0 в ряд Тейлора, получим окончательное разложе-

ние y в плоскости годографа

$$(2.10) \quad y = \Psi = a_0(\eta) v^{-1/3} + v^{-5/3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\eta) v^{-k}$$

Из сравнения рядов (1.19) и (2.10) видно, что они представляют собой одно и то же разложение. Отсюда следует, что решение (1.18), регулярное в плоскости годографа, сохранит это свойство при отображении его на физическую плоскость течения.

Аналогичная задача (обтекание тела слабо сверхзвуковым потоком) исследовалась в работе [9], где получено решение, характеризующее поток далеко от тела в окрестности ударной волны. Вопрос о том, возможно ли аналитическое продолжение физического течения через предельную характеристику, в этой работе не рассматривался. Если такое обтекание может быть реализовано (при соответствующих ограничениях на обтекаемый профиль), асимптотическое представление решения в переменных годографа, использованных в работе [9], будет иметь вид

$$(2.11) \quad \Psi = b_0(s) \rho^{-1/3} + \bar{\Theta} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \rho^{-2k-1/3} F(k+1/3, -k-1/6; 2/2; s^2) \\ (s = \bar{\Theta} / \rho)$$

В заключение автор выражает искреннюю признательность О. С. Рыжову за обсуждение работы.

Поступила 31 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
2. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. Об обтекании конечных тел равномерным потоком в околосвуковом диапазоне скоростей. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 1.
3. Von Kármán Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1974, vol. 26, No. 3.
4. Франкль Ф. Исследования по теории крыла бесконечного размаха, движущегося со скоростью звука. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 7.
5. Франкль Ф. И. Об одном классе решений газодинамических уравнений С. А. Чаплыгина. Уч. зап. МГУ, 1951, Механика, т. 4, вып. 154.
6. Landau Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
7. Guderley K. G., Breiter M. C. The development at infinity of axisymmetric flow patterns with a free-stream Mach number one. Office of Aerospace Res., Aerospace Res. Laboratories Rept, 1966, NARL - 66-0066.
8. Euvard D. Etude asymptotique de l'écoulement à grande distance d'un obstacle se déplaçant à la vitesse du son. J. Mécanique, 1967, vol. 6, № 4.
9. Фалькович С. В., Лемешинская О. М. Обтекание тонких тел слабосверхзвуковым потоком. В сб. «Трансзвуковые течения газа». Саратов, Саратовск. ун-т, 1964.