

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ РАВНОВЕСНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ

Л. А. СЛОБОЖАНИН, Н. С. ЩЕРБАКОВА

(Харьков)

Рассматривается плоская задача о равновесии капиллярной жидкости. Изучается устойчивость двумерной поверхности относительно плоских и пространственных возмущений. Приводятся данные, позволяющие решить вопрос об устойчивости любой симметричной равновесной поверхности в поле сил тяжести и в условиях невесомости. Решаются задачи об устойчивости жидкости в прямоугольном и секториальном каналах, а также об отрыве плоской капли от горизонтальной стенки.

1. Плоская задача равновесия. Пусть поверхность сосуда цилиндрическая с образующей, параллельной оси z . Тогда и равновесная поверхность капиллярной жидкости, находящейся в поле сил тяжести, которое не зависит от z , может оказаться цилиндрической.

Форма такой поверхности Γ определяется равновесной линией L — линией пересечения Γ плоскостью $z = \text{const}$. Пусть поле тяжести действует параллельно y . Направим ось y так, чтобы в начале координат, совпадающем с точкой пересечения этой осью поверхности Γ , жидкость находилась ниже Γ . Тогда в безразмерных переменных

$$X = |b|^{\frac{1}{2}}x, \quad Y = |b|^{\frac{1}{2}}y, \quad S = |b|^{\frac{1}{2}}s \quad (b = \rho\eta g/\sigma)$$

равновесная линия $X = X(S)$, $Y = Y(S)$ должна удовлетворять системе уравнений [1, 2]

$$(1.1) \quad X'' = -Y'(\epsilon Y + C), \quad Y'' = X'(\epsilon Y + C)$$

Здесь интрихом обозначено дифференцирование по переменной S , ρ — плотность, σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $g = 9.81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ — ускорение силы тяжести; η — коэффициент перегрузки ($\eta > 0$, если направления оси y и сил тяжести противоположны); s — длина дуги, отсчитываемая вдоль L в направлении, при котором поперечное сечение Ω области, занятой жидкостью, остается справа; $\epsilon = \text{sign } b$, C — заранее неизвестный параметр.

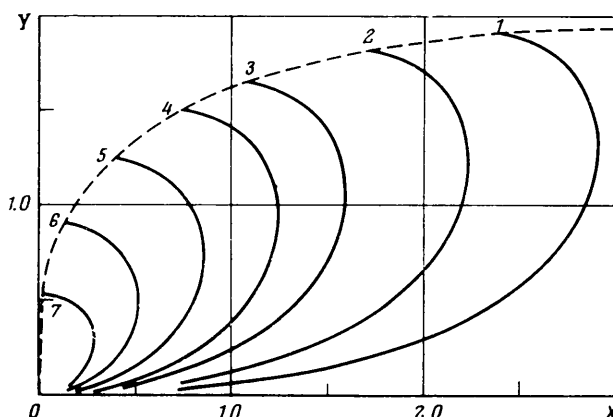
Общие свойства решений системы (1.1) при $\epsilon = \pm 1$ и различных C изучены в [1, 2]. Для полного решения задачи равновесия необходимо выбрать участок некоторой интегральной кривой (1.1), который удовлетворял бы краевым условиям смачивания и условию заданного объема жидкости. В общем виде эта задача сложна. Ее приближенные решения для частных случаев, когда силы тяжести много больше или много меньше сил поверхностного натяжения или когда Γ слабо наклонена к плоскости $y = \text{const}$, содержатся в [3-7].

Пусть сосуд (канал) имеет вертикальную плоскость симметрии, которую примем за $x = 0$. Тогда и Γ может обладать такой же симметрией. Если это так и, кроме того, равновесная линия связана, то при ее определении можно следовать методам [8]. Значение параметра $C = C_L$ на иско-

мой равновесной линии L и абсциссы $X=X_A$ ее конечной точки A определяется путем графического решения системы уравнений

$$(1.2) \quad \beta(C_L, X_A) = \gamma(X_A) - \alpha, \quad V_1(C_L, X_A) = V_2(X_A) - V$$

Первое выражает краевое условие смачивания, а второе — равенство безразмерной площади Ω заданному значению V . Здесь β и γ — углы на-



Фиг. 1

лона касательных в точках, лежащих на L и на поперечном сечении Σ стенки канала; α — угол смачивания

$$V_1(C, S) = 2 \int_0^S X(C, S) Y'(C, S) dS, \quad V_2(\xi) = 2 \int_0^\xi X(\xi) Y'(\xi) d\xi$$

ξ — безразмерная длина дуги Σ ; S и ξ отсчитываются от оси y .

На фиг. 1 показаны правые ветви максимальных (симметричных относительно OY) устойчивых участков интегральных линий системы (1.1) при $\varepsilon = +1$. Линии 1–7 отвечают значениям $C = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 1.8, 3.5$. При $C < 0$ кривые получаются зеркальным отражением относительно OX кривых для соответствующих (равных по модулю) $C > 0$. Пунктирная линия вместе со своим зеркальным отражением определяет границу максимальной области устойчивости для симметричных L . Это значит, что симметричная равновесная линия, правая ветвь которой не содержится целиком внутри указанной области, отвечает заведомо неустойчивой Γ (см. п. 4, 6).

Аналогично для $\varepsilon = -1$ на фиг. 2 кривыми 1–8 изображены правые ветви максимальных симметричных участков устойчивости интегральных кривых, отвечающих $C = 0.3, 0.6, 0.9, 1.187, \sqrt{2}, 1.71, 1.8178, 2.4$.

Наличие построенных зависимостей $\beta(X)$ и $V_1(X)$ вдоль указанных участков интегральных кривых (эти зависимости здесь не приводятся из-за ограничений объема статьи) позволяет исходя из (1.2) приближенно определить C_L и X_A по данным α и V для канала любого симметричного сечения, после чего L можно построить либо с помощью численного инте-

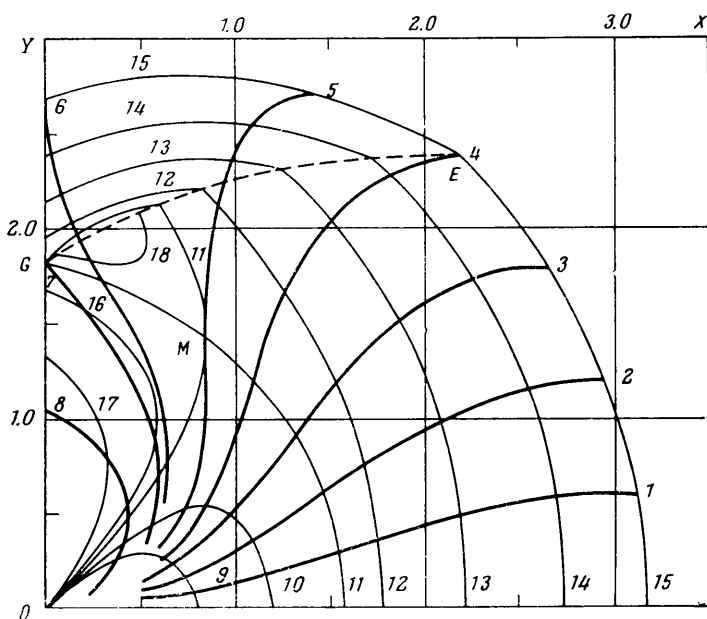
гирования, либо по фиг. 1 или 2. В последнем случае удобно предварительно определить Y_A , используя соотношение

$$\cos \beta = 1 - \varepsilon Y^2 / 2 - C Y$$

следующее из первого уравнения (1.1). При необходимости можно уточнить форму L по методу [7].

Один из возможных алгоритмов численного построения симметричной равновесной линии указан в [9].

Рассмотренные равновесные поверхности могут реализоваться, например, в канале, бесконечно протяженном вдоль Oz , или на участках этого



Фиг. 2

канала, ограниченных поперечными стенками, угол смачивания с которыми равен $\pi/2$.

2. Формулировка задачи устойчивости. Рассмотрим устойчивость цилиндрической поверхности Γ (не обязательно симметричной). Для канала, ограниченного поперечными стенками, вопрос об устойчивости сводится к определению знака наименьшего собственного значения λ^* следующей задачи относительно нормальной составляющей $N(s, z)$ возмущения поверхности Γ [2]

$$a(s)N - \frac{\partial^2 N}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \mu = \lambda N \quad (s_1 \leq s \leq s_2, \quad 0 \leq z \leq h)$$

$$\left(\chi N - \frac{\partial N}{\partial s} \right)_{s=s_1} = \left(\chi N + \frac{\partial N}{\partial s} \right)_{s=s_2} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} \Big|_{z=0, h} = 0, \quad \int_0^h \int_{s_1}^{s_2} N dz ds = 0$$

Здесь s_1, s_2 — значения s в начальной и конечной точках L ; h — длина канала; $a = b dx / ds - k_1^2$; $\chi = (k_1 \cos \alpha - k_2) / \sin \alpha$; $k_1(s)$ — кривизна L ($k_1 > 0$, если L выпукла внутрь Ω), k_2 — кривизна Σ в точках контакта с L ($k_2 > 0$,

если Σ вогнута внутрь капала); μ — неизвестная постоянная. Если $\lambda^* > 0$, то соответствующее равновесное состояние устойчиво, если же $\lambda^* < 0$ — неустойчиво.

Представим $N(s, z)$ в виде

$$N = \varphi_0(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(s) \cos \frac{n\pi z}{h} \quad (s_1 \leq s \leq s_2, \quad 0 \leq z \leq h)$$

Тогда $\lambda^* = \min(\lambda_1^* + \pi^2/h^2, \lambda_2^*)$, где λ_1^*, λ_2^* — соответственно наименьшие собственные значения задач

$$(2.1) \quad -\varphi'' + a(s)\varphi = \lambda\varphi \quad (s_1 \leq s \leq s_2), \quad (\chi\varphi - \varphi')_{s=s_1} = (\chi\varphi + \varphi')_{s=s_2} = 0$$

$$(2.2) \quad -\varphi'' + a(s)\varphi + \mu = \lambda\varphi \quad (s_1 \leq s \leq s_2)$$

$$(\chi\varphi - \varphi')_{s=s_1} = (\chi\varphi + \varphi')_{s=s_2} = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} \varphi ds = 0$$

Можно показать, что $\lambda_2^* \geq \lambda_1^*$. Отсюда следует, что для достаточно больших h (и в пределе для бесконечно протяженного капала) $\lambda^* = \lambda_1^*$, т. е. вывод об устойчивости Γ следует делать на основе анализа плоских возмущений, сняв при этом условие сохранения объема (возмущения первого типа). Для достаточно малых h будет $\lambda^* = \lambda_2^*$, т. е. наиболее опасны плоские возмущения, удовлетворяющие условию сохранения объема (возмущения второго типа). В дальнейшем будут рассмотрены как первая, когда h велико, так и вторая, когда h мало, картины устойчивости (обычно в литературе ограничиваются лишь анализом возмущений второго типа [10–12]; на необходимость изучения первой картины обратили внимание авторов А. Д. Мышкис и А. Д. Тюпцов). Задачи (2.1) и (2.2) обозначим через A_1 и A_2 . Наряду с A_1, A_2 будем рассматривать и соответствующие им задачи B_1, B_2 с однородными краевыми условиями Дирихле $\varphi(s_1) = \varphi(s_2) = 0$. Для них наименьшие собственные значения будем обозначать через ν_1^* и ν_2^* соответственно.

3. Метод решения задачи устойчивости. Известно [2], что λ_i^* монотонно зависит от $\chi(s_1), \chi(s_2)$, причем $\lambda_i^* \rightarrow -\infty$ при $\chi(s_1), \chi(s_2) \rightarrow -\infty$ и $\lambda_i^* \rightarrow \nu_i^*$ при $\chi(s_1), \chi(s_2) \rightarrow +\infty$ ($i=1, 2$). Таким образом, $\lambda_i^* \leq \nu_i^*, \lambda_1^* \leq \lambda_2^*, \nu_1^* \leq \nu_2^*$. Можно показать, что при переходе от некоторой равновесной дуги к ее части (и сохранении остальных параметров системы) ν_1^*, ν_2^* увеличиваются и стремятся к $+\infty$, когда $(s_2 - s_1) \rightarrow 0$ и $a(s) > \text{const}$; величина $\lambda_1^* \rightarrow \infty$, когда, кроме того, справедливы неравенства $\chi(s_1) \geq 0, \chi(s_2) \geq 0, \chi(s_1) + \chi(s_2) \geq \text{const} > 0$.

Обозначим левую часть уравнения (2.1) через $L\varphi$, а два линейно-независимых решения уравнения $Lu=0$ через $u_1(s)$ и $u_2(s)$. Тогда для равенства нулю какого-либо из собственных значений задачи A_1 или B_1 необходимо и достаточно, чтобы соответственно

$$d_1 = \det(l_i u_j)_{i,j=1}^2 = 0, \quad D_1 = \det(l_i u_j) = 0 \quad (i=4, 5; j=1, 2)$$

Аналогичные условия для задач A_2 и B_2 имеют вид

$$d_2 = \det(l_i u_j)_{i,j=1}^3 = 0, \quad D_2 = \det(l_i u_j) = 0 \quad (i=3, 4, 5; j=1, 2, 3)$$

Здесь $u_3(s)$ — решение уравнения $Lu = -1$, а

$$l_1 u = (\chi u - u')_{s=s_1}, \quad l_2 u = (\chi u + u')_{s=s_2}, \quad l_3 u = \int_{s_1}^{s_2} u ds, \quad l_4 u = u(s_1), \quad l_5 u = u(s_2)$$

Укажем теперь возможный путь определения устойчивости поверхности Γ . Определим сначала знак v_i^* ($i=1$ или 2 в зависимости от вида рассматриваемых возмущений). Выбрав за исходный достаточно малый участок заданной равновесной линии L (на котором v_i^* заведомо положительно), определим на нем знак D_i . Если при непрерывном расширении этого участка вплоть до всей линии L величина D_i не изменяет знак, то $v_i^*>0$. Если же D_i хотя бы раз изменяет знак, то $v_i^*<0$ и Γ заведомо неустойчива при любых $\chi(s_1)$ и $\chi(s_2)$.

Пусть $v_i^*>0$. Тогда возникает вопрос о критических (отвечающих $\lambda_i^*=0$) значениях χ_i^- и χ_i^+ параметра χ при $s=s_1$ и $s=s_2$. Они находятся из уравнения $d_i=0$, представляющего в плоскости $\chi(s_1)$, $\chi(s_2)$ гиперболу (она может вырождаться в пару прямых). Критические значения χ_i^- , χ_i^+ расположены на правой верхней ветви гиперболы. Эта ветвь ограничивает слева и снизу область значений $\chi(s_1)$, $\chi(s_2)$, при которых Γ устойчива.

4. Устойчивость симметричных поверхностей Γ . В дальнейшем рассматривается частный случай, когда поверхность сосуда, силовое поле и поверхность Γ симметричны относительно плоскости $x=0$ (ср. с [13], где изучен осесимметричный случай). Отсчет s будем производить от начала координат в сторону $x>0$ и считать, что на равновесной линии $-t \leq s \leq t$.

Если положить

$$u_1(0)=0, \quad u_1'(0)=1, \quad u_2(0)=1, \quad u_2'(0)=0, \quad u_3(0)=c_3, \\ u_3'(0)=0$$

то функция $u_1(s)$ будет нечетной, а функции $u_2(s)$, $u_3(s)$ — четными. Учитывая, кроме того, что $\chi(-t)=\chi(t)$, получим

$$d_1=-2[(\chi u_1+u_1')(\chi u_2+u_2')]_{s=t}, \quad D_1=-2u_1(t)u_2(t)$$

$$d_2=-4(\chi u_1+u_1')_{s=t} \left[(\chi u_2+u_2')_{s=t} \int_0^t u_3 ds - (\chi u_3+u_3')_{s=t} \int_0^t u_2 ds \right]$$

$$D_2=-2u_1(t) \left[u_2(t) \int_0^t u_3 ds - u_3(t) \int_0^t u_2 ds \right]$$

Таким образом, при изучении устойчивости достаточно ограничиться рассмотрением участка $0 \leq s \leq t$ линии L .

Для малых t величина $v_i^*>0$, а с увеличением t она уменьшается. Значение $t=t_i^*$, при котором $v_i^*=0$, определяет максимальный (симметричный) участок устойчивости на заданной интегральной линии системы (1.1) относительно возмущений i -го типа ($i=1, 2$): если $t>t_i^*$, то соответствующая поверхность Γ заведомо неустойчива. Величина t_i^* находится как наименьший корень уравнения $D_i(t)=0$; если же такой корень отсутствует, то $t_i^*=\infty$. Совокупность максимальных участков устойчивости всех интегральных линий образует максимальную область устойчивости. Ее будем обозначать через H .

Пусть $t<t_i^*$. Тогда критическим для данного t назовем такое значение параметра $\chi=\chi_i^*$, при котором $\lambda_i^*(\chi)=0$: если $\chi>\chi_i^*$, то Γ устойчива относительно соответствующих возмущений, если же $\chi<\chi_i^*$ — неустойчива. Величина χ_i^* есть наибольшее значение χ , при котором $d_i=0$.

Рассмотрим первую картину устойчивости. Используя теорему о чередовании нулей для дифференциального уравнения второго порядка, полу-

чим, что t_1^* есть наименьший положительный корень уравнения $u_2(t)=0$. Нетрудно проверить, что при $0 < t < t_1^*$

$$(4.1) \quad \chi_1^*(t) = -u_2'(t) / u_2(t)$$

Следовательно, в данной ситуации наиболее опасны симметричные по x возмущения. Отметим, что $\chi_1^*|_{t=0} = 0$.

Перейдем к возмущениям второго типа. При этом $t_2^* = \min(t_{21}, t_{22})$, где t_{21} и t_{22} — соответственно наименьшие положительные корни уравнений

$$u_1(t) = 0, \quad u_2(t) \int_0^t u_3 ds - u_3(t) \int_0^t u_2 ds = 0$$

Для $0 < t < t_2^*$ критическое значение $\chi_2^*(t) = \max(\chi_{21}, \chi_{22})$, где

$$(4.2) \quad \chi_{21}(t) = -\frac{u_1'(t)}{u_1(t)}, \quad \chi_{22}(t) = -\frac{u_2'(t) \int_0^t u_3 ds - u_3'(t) \int_0^t u_2 ds}{u_2(t) \int_0^t u_3 ds - u_3(t) \int_0^t u_2 ds}$$

Заметим, что χ_{21} и χ_{22} определяют критические значения χ соответственно относительно антисимметричных и симметричных по x возмущений. Полученные здесь результаты применим к конкретным силовым полям.

5. Условия невесомости. В этих условиях равновесной линией служит дуга окружности некоторого радиуса r_0 . Поэтому $a = -r_0^{-2}$ и

$$\begin{aligned} u_1 &= r_0 \sin(s/r_0), & u_2 &= \cos(s/r_0), & u_3 &= r_0^2 \\ t_1^* &= \pi r_0 / 2, & \chi_1^* &= r_0^{-1} \operatorname{tg}(t/r_0), & t_2^* &= t_{21} = \pi r_0, \\ \chi_2^* &= \chi_{21} = -r_0^{-1} \operatorname{ctg}(t/r_0) \end{aligned}$$

В предельном случае $r_0 = \infty$ имеем $t_1^* = t_2^* = \infty$, $\chi_1^* = 0$, $\chi_2^* = -t^{-1}$. Поэтому для первой картины критерий устойчивости совсем прост: $k_2 < 0$, т. е. вблизи плоской свободной поверхности стенки канала должны иметь выпуклость внутрь.

6. Поле сил тяжести. Займемся построением области H и определением χ_i^* вдоль симметричных интегральных кривых системы (1.1). Для этого в задаче устойчивости перейдем к безразмерным переменным, выбрав, как и в п. 1, за характерный линейный размер величину $|b|^{-1/2}$ и сохраняя за безразмерными значениями u , t , χ их прежние обозначения. Тогда

$$(6.1) \quad \begin{aligned} Lu &= -u'' + (\varepsilon X' - k_1^2)u, & k_1 &= \varepsilon Y + C & \left(X' = \frac{d}{dS} \right) \\ u_1 &= Y'(S), & u_3 &= \varepsilon X'(S) \end{aligned}$$

а $u_2(S)$ в общем случае может быть построена только численно.

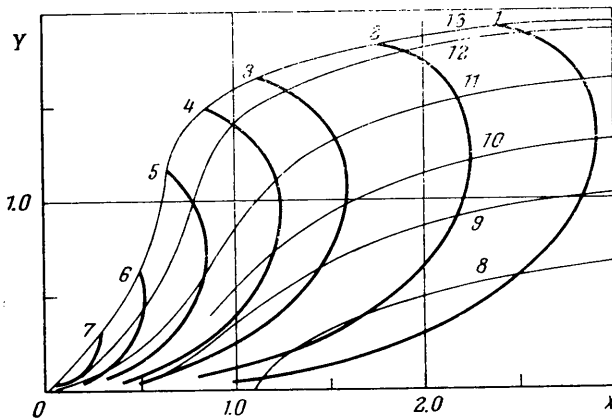
На горизонтальной прямой $Y=0$, служащей интегральной линией (1.1) при $C=0$, задача упрощается, так как здесь

$$(6.2) \quad Lu = -u'' + \varepsilon u$$

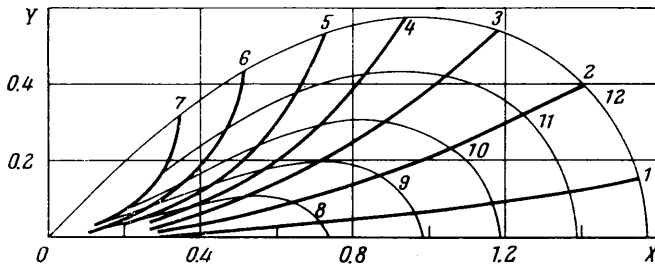
Здесь ограничимся рассмотрением равновесных линий, отвечающих $C \geq 0$, так как при $C < 0$ получается равновесная линия, симметричная относительно OX линии с отметкой $|C|$, причем χ_i^* в симметричных точках одинаковы.

а) *Положительные перегрузки* ($\varepsilon = +1$). Численное интегрирование уравнения $Lu=0$ при соответствующих начальных условиях позволяет по

(4.1) определить значения χ_1^* вдоль интегральных кривых системы (1.1) вплоть до точек $t=t_1^*(C)$, в которых $\chi_1^*=\infty$. Последние определяют границу H . На фиг. 3 линиями 1–7 изображены интегральные кривые, отвечаю-



Фиг. 3



Фиг. 4

щие значениям $C=0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 1.0, 1.8, 3.5$, а линиями 8–13 — линии уровня, на которых $\chi_1^*=-0.8, -0.45, 0, 1.0, 5.0, \infty$.

Вычисления показали, что при $C \rightarrow 0$ граница максимального участка устойчивости асимптотически стремится к вершине ($Y'=0$) соответствующей интегральной кривой, а точка, в которой $\chi_1^*=0$, — к точке с вертикальной касательной. Поэтому [1, 2] линии $\chi_1^*=\infty$ и $\chi_1^*=0$ имеют соответственно асимптоты $Y=2$ и $Y=\sqrt{2}$. Для $C \geq 1$ коэффициент при u в выражении Lu отрицателен, откуда следует, что вдоль интегральной линии χ_1^* монотонно возрастает от 0 до ∞ . Если $0 < C < 1$, то χ_1^* сначала убывает от 0 до некоторого $\chi_{10}^* > -1$ (причем $\chi_{10}^* \rightarrow -1$ при $C \rightarrow 0$), а затем возрастает до ∞ . На прямой $C=0$ из (6.2) получим

$$(6.3) \quad u_1(S) = \operatorname{sh} S, \quad u_2(S) = \operatorname{ch} S, \quad u_3(S) = -1$$

Поэтому здесь $t_1^*=\infty$, $\chi_1^*=-\operatorname{th} t$. Таким образом, в первой картине Γ всегда неустойчива, если $\chi \leq -1$.

Рассмотрим вторую картину устойчивости. Вычисления показали, что здесь всегда $t_2^*=t_{21}$ и $\chi_2^*=\chi_{21}$. Из (4.2) с учетом (6.1), (1.1) получим

$$(6.4) \quad \chi_2^* = \chi_{21} = -X'(t)k_1(t) / Y'(t)$$

Граница H (см. пунктирную линию на фиг. 1) проходит через вершины интегральных кривых и асимптотически стремится к прямой $Y=2$. Внутри

Т а б л и ц а 1

c	x	y	β	V_1	χ_2^*
0	π	0	0	0	∞
0.1	3.136	0.200	0	0.627	∞
0.2	3.118	0.400	0	1.247	∞
0.3	3.089	0.600	0	1.853	∞
0.4	3.046	0.800	0	2.437	∞
0.5	2.992	1.000	0	2.991	∞
0.6	2.924	1.200	0	3.508	∞
0.7	2.842	1.400	0	3.977	∞
0.8	2.744	1.600	0	4.390	∞
0.9	2.630	1.800	0	4.734	∞
1.0	2.499	2.000	0	4.997	∞
1.1	2.347	2.200	0	5.162	∞
1.187	2.196	2.374	0	5.211	∞
1.25	1.983	2.495	0.113	5.163	∞
1.3	1.803	2.582	0.215	5.051	∞
1.35	1.614	2.660	0.327	4.872	∞
1.4	1.415	2.727	0.450	4.626	∞
1.45	1.205	2.779	0.587	4.313	∞
1.5	0.984	2.814	0.740	3.936	∞
1.55	0.754	2.827	0.909	3.505	∞
1.6	0.517	2.814	1.096	3.036	∞
1.65	0.279	2.771	1.300	2.553	∞
1.71	0	2.674	1.571	2.000	∞
1.73	0	2.269	1.930	1.872	1.425
1.75	0	2.117	2.053	1.772	0.691
1.78	0	1.960	2.175	1.646	0.259
1.8178	0	0.818	2.281	1.516	0
1.9	0	1.603	2.435	1.298	0.349
2.0	0	1.424	2.557	1.105	0.871
2.1	0	1.291	2.643	0.958	1.482
2.2	0	1.187	2.707	0.843	2.160
2.3	0	1.102	2.758	0.750	2.957
2.4	0	1.030	2.799	0.672	3.832
2.6	0	0.916	2.863	0.552	5.837
2.8	0	0.827	2.909	0.463	8.122
3.1	0	0.724	2.959	0.367	11.787
3.5	0	0.625	3.002	0.280	19.837
4.0	0	0.534	3.038	0.210	24.990
5.0	0	0.417	3.076	0.131	65.550
7.0	0	0.292	3.109	0.065	204.67
10	0	0.202	3.126	0.031	615.87

Т а б л и ц а 2

c	x	y	β	V_1	χ_2^*
1.187	2.196	2.374	0	5.211	∞
1.2	1.966	2.375	0.246	5.107	4.678
1.25	1.621	2.363	0.577	4.700	1.712
1.3	1.377	2.339	0.803	4.301	1.003
1.35	1.173	2.305	0.995	3.919	0.621
1.4	0.995	2.265	1.166	3.560	0.371
1.45	0.837	2.222	1.322	3.230	0.199
1.5	0.692	2.170	1.471	2.918	0.067
1.55	0.561	2.118	1.611	2.636	-0.022
1.6	0.440	2.064	1.744	2.379	-0.080
1.65	0.329	2.008	1.872	2.146	-0.110
1.71	0.204	1.941	2.021	1.895	-0.110
1.75	0.127	1.895	2.119	1.744	-0.088
1.78	0.069	1.862	2.191	1.639	-0.057
1.8178	0	1.818	2.281	1.516	0

H параметр χ_2^* согласно (6.4) определяется просто: по величине C и значениям Y и β в конечной точке равновесной линии, которая предполагается заранее известной. Заметим, что $\chi_2^*|_{t=+0} = -\infty$. На горизонтальной прямой $C=0$ с учетом (6.3) получим $t_2^* = \infty$, $\chi_2^* = -\operatorname{cth} t$.

б) *Отрицательные перегрузки* ($\varepsilon = -1$). Результаты вычислений χ_1^* иллюстрируются на фиг. 4. Здесь 1–7 — интегральные линии, отвечающие $C=0.15, 0.45, 0.75, 1.05, \sqrt{2}, 2.0, 3.0$, а 8–12 — линии уровня $\chi_1^* = \text{const}$; на них χ_1^* соответственно равен 0.9, 1.6, 2.5, 5.5, ∞ . Область H ограничена. Всюду внутри нее $X' > 0$; поэтому сомножитель при u в выражении Lu отрицателен и, следовательно, вдоль каждой интегральной кривой χ_1^* монотонно возрастает от 0 до ∞ . Значит внутри H параметр $\chi_1^* > 0$ и Γ заведомо неустойчива, если $\chi \leq 0$.

Из (6.2) получим, что вдоль горизонтальной прямой $C=0$

$$(6.5) \quad u_1(S) = \sin S, \quad u_2(S) = \cos S, \quad u_3(S) = 1$$

Поэтому здесь $t_1^* = \pi/2$, $\chi_1^* = \operatorname{tg} t$.

Перейдем к возмущениям второго типа. Результаты построения H и определения внутри нее χ_2^* представлены на фиг. 2. Вдоль линий 9–18 параметр $\chi_2^* = -1.0, -0.4, 0, 0.2, 0.75, 2.2, \infty, 0.18, 1.2, -0.06$. Границей H являются ломаная 15 и ось Y (равновесная поверхность не может быть самопересекающейся). Верхняя точка этой оси, принадлежащая H , отвечает значению $C=1.710$, при котором интегральная кривая касается OY . Характеристики точек вдоль границы H , содержатся в табл. 1.

Область H состоит из двух частей: нижней H_1 , в которой $\chi_2^* = \chi_{21}$, и верхней H_2 , в которой $\chi_2^* = \chi_{22}$. Области H_1 и H_2 разделены пунктирной кривой, на ней $\chi_{21} = \chi_{22}$. Характеристики этой кривой приведены в табл. 2. Вычисления показали, что крайняя правая точка линии, разделяющей H_1 и H_2 , отвечает значению $C=1.187$, а крайняя левая (точка G) — значению $C=1.8178$, при котором полная интегральная кривая имеет вид восьмерки [2].

Если L известна и она целиком содержится внутри H_1 , то χ_2^* может быть подсчитано непосредственно по (6.4) аналогично случаю $\varepsilon = +1$. Из (6.4) следует, что внутри H_1 линия 11 ($\chi_2^* = 0$) состоит из двух ветвей, одна из которых проходит через точки перегиба интегральных кривых ($k_1 = 0$), а вторая — через точки с вертикальной касательной ($X' = 0$). Эти ветви пересекаются в точке M , лежащей на кривой $C = \sqrt{2}$, и разбивают H_1 на четыре части, в которых знаки χ_2^* чередуются.

Участок линии $\chi_2^* = \infty$, ограничивающий H_1 , проходит через вершины интегральных кривых ($Y' = 0$). Из (4.2) и (6.5) следует, что при $C=0$ величина $t_2^* = t_{21} = \pi$, а $\chi_2^* = \chi_{21} = -\operatorname{ctg} t$.

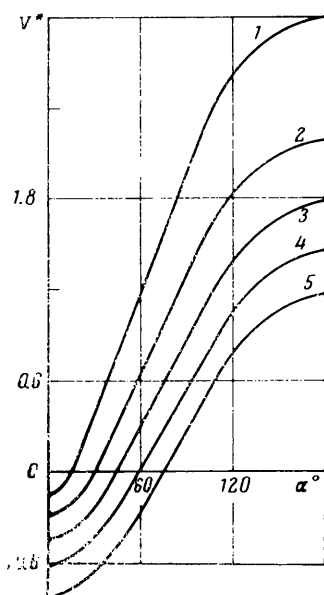
Приведенные в п. 5, 6 результаты позволяют сделать вывод об устойчивости любой известной симметричной поверхности Γ . В последующих пунктах рассматривается задача о построении в пространстве параметров, определяющих равновесие, границы области устойчивости для каналов простейших форм.

7. Прямоугольный канал. Здесь состояние равновесия определяется двумя параметрами: числом Бонда $B = bl^2$ (l — полуширина канала) и углом α . Очевидно, что при $B > 0$ равновесие устойчиво. Обратимся к отрицательным перегрузкам ($B < 0$).

В первой картине равновесие всегда неустойчиво. Для $\alpha = \pi/2$ это сразу следует из соотношений $\chi = 0$, $\chi_1^* = \operatorname{tg} t$, $\chi < \chi_1^*$ ($0 < t \leq t_1^*$). При произвольном α для достаточно малых t

$$\chi = k_1 \cos \alpha / \sin \alpha = k_1 Y' / X' \sim C^2 t, \quad \chi_1^* = -u_2'(t) / u_2(t) \sim (1 + C^2) t$$

т. е. снова $\chi < \chi_1^*$. Если предположить, что с ростом t при некотором $t=t_1$ происходит смена неустойчивости на устойчивость, то, как заметил А. Д. Тюпцов, равновесная дуга $|S| < t_1$ должна служить точкой ветвления равновесных состояний, и поэтому должно быть $(d\beta/dY)_{s=t_1} = 0$. Однако вычисления показали, что линия, на которой $d\beta/dY = 0$, проходит вне области H , изображенной на фиг. 4. Поэтому при $B < 0$ равновесие неустойчиво. Критическое значение $B^*(\alpha) = 0$ (действительно, в невесомости $\chi_1^* = r_0^{-1} \operatorname{tg}(t/r_0) = k_1 \operatorname{ctg} \alpha = \chi$).



Фиг. 5

Рассмотрим вторую картину (фиг. 2). Здесь при малых t имеем $\chi_2^* \sim -t^{-1}$, т. е. малые участки устойчивы. Если при заданном C ($|C| \leq \sqrt{2}$) увеличивать t , то χ_2^* монотонно увеличивается, переходя через нулевое значение в точке $t=t_0(C)$ перегиба интегральной кривой. В то же время $\chi = k_1 \operatorname{ctg} \alpha > 0$ при $t < t_0$ и $\chi < 0$ при $t > t_0$. Из фиг. 4 нетрудно усмотреть, что кривые $|C| > \sqrt{2}$ в данной задаче не представляют интереса. Значит критические равновесные состояния определяются линиями L , конечная точка t которых принадлежит кривой MTM' (здесь и в дальнейшем штрихами обозначаются точки, симметричные относительно OX соответствующим точкам, изображенным на фиг. 2), и $B^* = -X^2(t_0, C)$. Последняя зависимость может быть выражена через α [10].

8. Секториальный канал. Пусть жидкость содержится на дне секториального канала с углом полураствора $\pi/2 - \delta$ ($0 < \delta < \pi/2$), обращенным вершиной вниз. Тогда состояние равновесия определяется значениями α , δ и $V = bv$ (v — размерная площадь Ω ; здесь и ниже в отличие от предыдущего V может иметь различный знак в зависимости от знака b).

Анализ соотношения $k_1 \operatorname{ctg} \alpha = \chi_1^*$ позволяет заключить, что в первой картине поверхность Γ устойчива при $b \geq 0$ для $\alpha < \delta$ и неустойчива при $b \leq 0$ для $\alpha > \delta$. Численно полученные зависимости критического значения $V = V^*$ от α при $\delta = \text{const}$ приведены на фиг. 5, где кривым 1–5 соответствуют значения $\delta = 15, 30, 45, 60, 75^\circ$. В области значений V , α , лежащих выше соответствующей кривой, имеет место устойчивость.

Рассмотрим вторую картину. Легко убедиться, что при $b \geq 0$ равновесие устойчиво. Перейдем к отрицательным перегрузкам. Если конечная точка $S=t$ находится внутри области $OMTM'G'O$ (область $OGMO$ не рассматривается, так как такой случай геометрически нереализуем), то $\chi = k_1 \operatorname{ctg} \alpha > \chi_2^* = -k_1 \operatorname{ctg} \beta$ и равновесие устойчиво. Если при увеличении t конечная точка переходит через $MTM'G'$ (что может иметь место для $-1.8178 < C \leq \sqrt{2}$), то k_1 изменяет знак, приведенное неравенство заменяется на противоположное и равновесие становится неустойчивым. Иная ситуация, если конечная точка переходит через отрезок OG' (при $C \leq -1.8178$). Тогда равновесие, до сих пор устойчивое, становится невозможным (свободная поверхность не может быть самопересекающейся). Таким образом, используя равенства

$$V^* = - \left[X^2(t_0) \lg \delta - 2 \int_0^{t_0} XY' dS \right], \quad \alpha = \delta - \beta(t_0)$$

(t_0 — значение S на $MTM'G'O$), можно построить зависимость $V^*(\alpha)$ для заданного δ .

Заметим, что в точке G' угол $\beta(t_0) = \beta_0 = -130^\circ 42'$. Поэтому при $\delta \geq \pi - |\beta_0| = 49^\circ 18'$ во всем диапазоне $0 \leq \alpha < \pi$, а при $\delta < 49^\circ 18'$ для $0 \leq \alpha \leq \alpha_0 = |\beta_0| + \delta$ зависимость $V^*(\alpha)$ определяется точками t_0 , принадлежащими $MTM'G'$. При $\delta < 49^\circ 18'$ и $\alpha > \alpha_0$ эта зависимость определяется точками, принадлежащими OG' .

В [11] для ряда δ было проведено вычисление $V^*(\alpha)$, причем при $\alpha \leq \alpha_0$, если $\delta < 49^\circ 18'$. Содержащееся там утверждение, что при $\alpha > \alpha_0$ всегда имеет место неустойчивость, ошибочно. Для $\delta < 49^\circ 18'$ зависимость $V^*(\alpha)$ продолжается в область $\alpha_0 \leq \alpha < \pi$ с помощью данных табл. 1 (для $C \geq 1.8178$), полагая $V^* = -V_1$, и $\alpha = \beta + \delta$.

9. Капля на горизонтальной плоскости. Здесь будет рассмотрена вторая картина, так как первая представляется физически мало естественной. Поскольку в конечной точке $\beta = -\alpha$, то $\chi = \chi_{21}$ и состояния равновесия всегда неустойчиво относительно антисимметричных возмущений (капля как целое может безразлично перемещаться вдоль горизонтальной стенки). Выясним устойчивость относительно симметричных возмущений, т. е. определим значение V^* , при котором происходит отрыв капли.

При $b \geq 0$ справедливо неравенство $\chi = \chi_{21} > \chi_{22}$, поэтому здесь имеет место устойчивость. При $b < 0$ критическими являются равновесные линии ($C < 0$), в конечных точках которых $\chi_{21} = \chi_{22}$. Отразив фиг. 2 относительно OX , получим, что эти точки принадлежат линии $G'E'$. Данные табл. 2, в которой следует положить $V_1 = -V^*$, $\beta = \alpha$, позволяют построить зависимость $V^*(\alpha)$ для $\alpha \leq |\beta_0| = 130^\circ 42'$. Если $\alpha > |\beta_0|$, то все реализуемые равновесные состояния капли устойчивы. Отрыв происходит, когда шейка капли стягивается в точку и равновесие становится невозможным (критические равновесные состояния определяются конечными точками, лежащими на OG'). Интегрируя второе уравнение (1.1), получим, что в точках, принадлежащих OY , $V_1 = 2 \sin \beta$. Поэтому при $\alpha > |\beta_0|$ имеем $V^* = -2 \sin \alpha$.

Зависимость $V^*(\alpha)$ определяет и отрывные размеры пузыря, сидящего на пластине, если α заменить на $\pi - \alpha$, а под V понимать безразмерную площадь сечения газа.

Рассматриваемый здесь вопрос изучался в [12]. На линии $G'E'$ для $\alpha \leq |\beta_0|$ площадь $V|_{\alpha=\text{const}}$ принимает максимальное по модулю значение. Это позволило автору [12] определить V^* для $\alpha = 0, 30, 70$ и 90° .

Заметим, что по аналогии с [14] можно рассмотреть плоскую задачу об отрыве капли жидкости, вытекающей из щели. Привлекая результаты [15], приходим к выводу, что отрыв от кромки щели происходит, когда конечная точка принадлежит линии 15. Используя данные табл. 1 и полагая $V_1 = -V^*$, $X = L$, можно построить зависимость $V^*(L)$ для $L < \pi$ (L — безразмерная полуширина щели). При $L \geq \pi$ равновесие всегда неустойчиво (жидкость проливается). На участке линии 15, ограничивающем H_2 ($X \leq 2.196$), $V|_{L=\text{const}}$ принимает максимальное по модулю значение.

Опираясь на это, в [16] определены V^* для $L = 0.3, 0.5, 0.7, 1.3, 2.0$.

Авторы благодарят А. Д. Мышкиса и А. Д. Тюнцова за обсуждения и полезные замечания.

Поступила 17 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева М. А., Мышкис А. Д., Тюнцов А. Д. Гидростатика в слабых гравитационных полях. Равновесные формы поверхности жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
2. Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюнцов А. Д. Гидростатика в слабых силовых полях. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
 4. Черноусько Ф. Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. В сб. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
 5. Френкель Я. И. О поведении жидких капель на поверхности твердого тела. ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 7.
 6. Вачагин К. Д., Николаев В. С. Поведение капель жидкости на твердой поверхности. Тр. Казанск. хим.-технол. ин-та, 1961, вып. 27.
 7. Мышкис А. Д., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. О малых возмущениях равновесной поверхности капиллярной жидкости. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
 8. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Об определении равновесного состояния капиллярной жидкости в сосуде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
 9. Темкин Л. А., Темкина В. С., Щербина Г. В. О расчете свободной поверхности капиллярной жидкости в сосуде. В сб. «Вычислительная математика и вычислительная техника», вып. 5. Харьков, 1974.
 10. Конкус П. Капиллярная устойчивость свободной поверхности жидкости в перевернутом прямоугольном канале, при кривизне, меняющей знак. Ракетная техника и космонавтика, 1964, т. 2, № 12.
 11. Копачевский Н. Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. Плоские задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1973, т. 13, № 4.
 12. Pitts E. The stability of pendent liquid drops, pt 1. Drops formed in a narrow gap. J. Fluid Mech., 1973, vol. 59, pt 4.
 13. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Характеристический параметр устойчивости осесимметричной равновесной поверхности капиллярной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 4.
 14. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Эволюция и отрыв капель и пузырей при их медленном росте. ПМТФ, 1975, № 1.
 15. Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д. Об устойчивом равновесии поверхности капиллярной жидкости при контакте с ребром твердого тела. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 1.
 16. Бувечич Ю. А., Бутков В. В. Некоторые закономерности диспергирования жидкостей при медленном истечении из плоской щели. Теорет. основы хим. технол., 1969, т. 3, № 4.
-