

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ

Н. М. БЕЛЯНИН, Е. Ю. ШАЛЬМАН

(Москва)

Исследован пространственный неавтономный ламинарный пограничный слой сжимаемого газа в закрученном потоке. Уравнения пограничного слоя записаны в переменных, обеспечивающих постоянство коэффициентов перед старшими производными, и решены численным конечно-разностным методом. Выявлены особенности пограничного слоя при наличии в канале возвратно-циркуляционной области течения.

1. Пограничный слой при осесимметрично закрушенном течении газа в канале является пространственным, т. е. все три составляющие скорости отличны от нуля, но параметры зависят лишь от двух независимых переменных. Для несжимаемой жидкости проведены исследования пограничного слоя, основанные на использовании интегральных соотношений [1-4]. Пограничный слой в сжимаемом газе при наличии закрутки внешнего потока, числе Прандтля $P=1$ и линейной зависимости коэффициента вязкости от температуры исследовался численными методами [5, 6], но эти исследования ограничивались рассмотрением автомодельных течений. Поэтому определенный интерес представляет расчет неавтономного сжимаемого пограничного слоя при наличии закрутки внешнего потока. Этот случай имеет большое практическое значение для определения потерь на трение и тепловых потоков в различных соплах. При этом для определения параметров внешнего течения могут быть использованы разработанные в последнее время эффективные методы расчета [7].

2. Введем криволинейные ортогональные координаты x, y, z , причем координату x будем отсчитывать вдоль образующей сопла, координату y — по нормали к обтекаемой поверхности, а координату z — в окружающем направлении. Пусть u, v, w — составляющие вектора скорости, ρ, p, h^* — плотность, давление и полная энтальпия, r — радиус поперечной кривизны сопла, μ — коэффициент вязкости, P — число Прандтля. В силу симметрии параметры течений не зависят от координаты z . Уравнения пространственного ламинарного пограничного слоя сжимаемого газа при установившемся движении имеют вид

$$(2.1) \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} - \rho \frac{w^2}{r} \frac{dr}{dx} = - \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$(2.2) \quad \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\rho u w}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$(2.3) \quad \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\rho u}{r} \frac{dr}{dx} = 0$$

$$(2.4) \quad \rho u \frac{\partial h^*}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h^*}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial h^*}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{P} (P-1) \frac{\partial (u^2 + w^2)}{2} \right]$$

Изменением давления поперек пограничного слоя можно пренебречь, так как это изменение имеет порядок относительной толщины пограничного слоя [1, 6]. На внешней границе пограничного слоя, где производные от параметров по нормали к поверхности стремятся к нулю, уравнения

движения (2.1), (2.2) принимают вид

$$(2.5) \quad \rho_1 u_1 \frac{du_1}{dx} + \rho_1 w_1 \frac{dw_1}{dx} = - \frac{dp}{dx}$$

$$(2.6) \quad \frac{d(rw_1)}{dx} = 0$$

Соотношение (2.5) может быть использовано для выражения давления через составляющие скорости внешнего потока, а соотношение (2.6) представляет собой условие сохранения циркуляции вдоль линии тока. Параметры внешнего потока обозначены индексом 1.

Для решения уравнений (2.1) — (2.4) необходимо задавать уравнение состояния и зависимости переполных свойств газа (μ и P) от давления и энтальпии. Необходимые начальные условия (например, при $x=0$) определяются формулировкой той или иной конкретной задачи. Граничные условия имеют вид

$$(2.7) \quad u=v=w=0, \quad h^*=h_w \left(\text{или } \frac{\partial h^*}{\partial y} = 0 \right) \text{ при } y=0$$

$$u=u_1, \quad w=w_1, \quad h^*=h_1^* \text{ при } y \rightarrow \infty$$

Здесь и дальше индексом w обозначены параметры на стенке.

Если ввести переменные Лиза — Дородницына, то исходная система уравнений (2.1) — (2.4) может быть преобразована к виду, более удобному для численного интегрирования. Для аппроксимации полученных уравнений использовалась неявная конечно-разностная схема первого порядка точности в продольном направлении и второго порядка точности в поперечном. Для решения краевой задачи на каждом шаге разностные уравнения линеаризовались и решались методом прогонки. Учет нелинейных членов при этом производился методом итераций. Такой подход успешно применяется для определения как автомодельных, так и неавтомодельных решений уравнений плоского пограничного слоя при $P=1$ и линейной зависимости коэффициента вязкости от энтальпии [8, 9]. В принципе этот путь пригоден и для расчета пограничного слоя газа с переменными свойствами [10]. Однако в последнем случае возникают определенные вычислительные трудности, связанные с наличием существенно переменного множителя перед старшими производными. Как показали проведенные расчеты, при обтекании сильно охлажденной поверхности профили скорости и энтальпии в некоторых случаях являются сильно искривленными вблизи стенки (в переменных Лиза — Дородницына) и для вычисления с удовлетворительной точностью напряжения трения и теплового потока необходимо использовать очень мелкий шаг по поперечной координате. Вторая трудность возникает при расчете пограничного слоя на теплоизолированной поверхности при гиперзвуковых скоростях внешнего потока и связана с плохой сходимостью итерационного процесса учета нелинейных членов.

Одним из возможных путей устранения указанных трудностей является применение других независимых переменных, исключающих появление переменных коэффициентов перед старшими производными. Если ввести переменные

$$(2.8) \quad \xi = \int_0^x \rho_1 \mu_1 u_1 r^2 dx, \quad \eta = \frac{\rho_1 \mu_1 u_1 r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{dy}{\mu}$$

и новые искомые функции

$$(2.9) \quad f(\xi, \eta) = \frac{u}{u_1}, \quad \varphi(\xi, \eta) = \frac{w}{w_1}, \quad g(\xi, \eta) = \frac{h^*}{h_1^*}$$

то при использовании соотношений (2.5), (2.6) и постоянном значении числа Прандтля система уравнений (2.1) — (2.4) принимает вид

$$(2.10) \quad f'' + Ff' + \beta N \left(\frac{\rho_1}{\rho} - f^2 \right) + \gamma N \left(\frac{\rho_1}{\rho} - \varphi^2 \right) = 2\xi \left(Nf \frac{\partial f}{\partial \xi} - f' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

$$(2.11) \quad \varphi'' + F\varphi' = 2\xi \left(Nf \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} - \varphi' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

$$(2.12) \quad g'' + PFg' - 2(1-P)(Uff' + W\varphi\varphi')' = 2P\xi \left(Nf \frac{\partial g}{\partial \xi} - g' \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по переменной η

$$F = \int_0^\eta f N d\eta, \quad \beta = \frac{2\xi}{u_1} \frac{du_1}{d\xi}, \quad \gamma = \frac{w_1}{u_1} \frac{2\xi}{u_1} \frac{dw_1}{d\xi}$$

$$N = \frac{\rho\mu}{\rho_1\mu_1}, \quad U = \frac{u_1^2}{2h_1^*}, \quad W = \frac{w_1^2}{2h_1^*}$$

Соответственно преобразуются граничные условия (2.7)

$$(2.13) \quad f(\xi, 0) = \varphi(\xi, 0) = 0, \quad g(\xi, 0) = g_w \quad (\text{или } g'(\xi, 0) = 0)$$

$$f(\xi, \infty) = \varphi(\xi, \infty) = g(\xi, \infty) = 1$$

Полученные уравнения (2.10) — (2.12) являются интегродифференциальными, однако никаких дополнительных сложностей при их численном решении не возникает, если использовать описанный выше метод и величину F определять в процессе итераций.

№ варианта	Γ	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
1	0	0.311	0	-0.026	0	0	0	$x_1 = x^0 \quad (x^0 \leq 1.4)$
		0.260	0	0.538	0.347	-0.250	0	$x_1 = x^0 - 1.4$ $(x^0 > 1.4)$
4	0.45	0	0.150	0.284	0.601	-0.253	-0.040	$x_1 = x^0 - 1.42$ $(x^0 > 1.42)$
6	0.33	0.260	0	-0.020	0	0	0	$x_1 = x^0 \quad (x^0 \leq 1.4)$
		0.221	0	0.434	0.457	-0.276	0	$x_1 = x^0 - 1.4$ $(x^0 > 1.4)$
10	0.6	0.177	-0.015	0	0	0	0	$x_1 = x^0 \quad (x^0 \leq 1.4)$
		0.156	0	0.143	0.809	-0.380	0	$x_1 = x^0 - 1.4$ $(x^0 > 1.4)$

3. Расчеты пространственного ламинарного пограничного слоя проводились для тех вариантов закрученных течений в сопле Лавала, для которых параметры внешнего потока рассчитаны методом установления в работе [7].

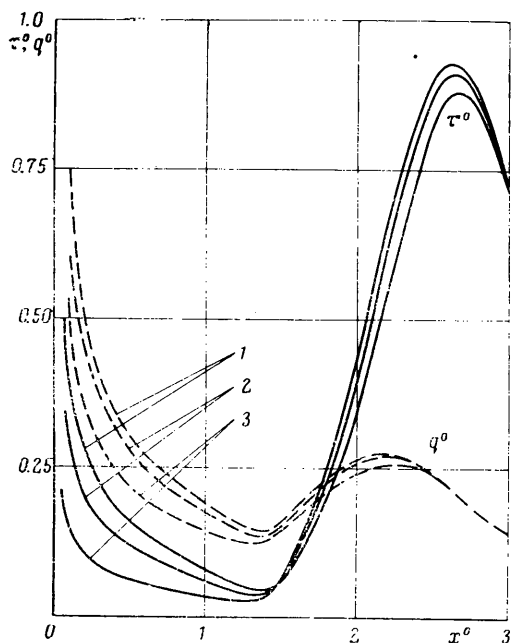
Эти варианты отличались распределением закрутки в начальном сечении сопла и пронумерованы так же, как в работе [7], где приведено описание сопла и результатов расчета течения идеального газа. Вычисленное распределение вдоль сопла продольной составляющей скорости внешнего потока аппроксимировалось полиномами

$$u_1 = a_* \sum_{n=0}^5 a_n x_1^n$$

причем коэффициенты полиномов определялись методом наименьших квадратов. Распределение окружной составляющей скорости внешнего потока находилось из условия постоянства циркуляции на пристеночной линии тока $w_1 = a \Gamma / r^0$. Здесь a — критическая скорость звука, r_* — радиус критического сечения сопла, $x^0 = x/r_*$ — безразмерное расстояние вдоль образующей сопла, $r^0 = r/r_*$ — безразмерный радиус. Значения a_* и Γ приведены в таблице.

Все расчеты пограничного слоя проводились для совершенного газа с показателем адиабаты 1.4 (как и расчеты внешнего течения) и при $P = 0.7$, $\mu \sim h^{0.75}$ (h — статическая энтальпия).

Как следует из результатов расчета течения идеального газа, вблизи стенки в цилиндрическом участке рассматриваемого сопла существует местная зона торможения потока, что может вызывать отрыв пограничного слоя. В результате расчетов пограничного слоя при отсутствии закрутки (вариант 1) было установлено, что отрыв пограничного слоя возникает при $x^0 = 0.94$ в случае обтекания теплоизолированной поверхности, при $x^0 = 1.14$ в случае умеренного охлаждения ($g_w = 0.5$) и не возникает совсем в случае обтекания сильно охлаждаемой поверхности ($g_w = 0.1$). Поэтому сравнение параметров пограничного слоя для различных интенсивностей закрутки проводилось при $g_w = 0.1$. На фиг. 1 приведены значения безразмерных величин осевой составляющей напряжения трения τ^0 и теплового потока q^0 .



Фиг. 1

для трех вариантов течения (№ 1 — кривая 1, № 6 — кривая 2, № 10 — кривая 3). Здесь ρ_0 , μ_0 — параметры адиабатически заторможенного потока.

В цилиндрической части сопла величины τ^0 и q^0 уменьшаются из-за увеличения толщины пограничного слоя и деформации профилей скорости и энтальпии, вызванной торможением потока. Рост величины закрутки приводит к падению скорости внешнего потока и некоторому увеличению толщины пограничного слоя, что вызывает снижение значений τ^0 и q^0 . В области ускоренного течения, как обычно, профили скорости становятся более наполненными, толщина пограничного слоя сначала уменьшается и достигает минимального значения в области горла, а затем несколько возрастает. Соответственно величины τ^0 и q^0 достигают максимальных значений в области горла. Влияние закрутки ослабевает и проявляется лишь в незначительном увеличении наполненности профиля скорости.

Полученные результаты показывают, что для рассмотренных вариан-

$$\tau^0 = \frac{2\tau_{wx}}{\rho_0^* a_*} \sqrt{\frac{\rho_0^* \alpha_* r_*}{\mu_0^*}},$$

$$q^0 = \frac{q_w}{\rho_0^* a_* h_0^*} \sqrt{\frac{\rho_0^* \alpha_* r_*}{\mu_0^*}}$$

тов внешнего течения влияние закрутки на основные характеристики пограничного слоя незначительно и связано в основном с изменением параметров внешнего течения.

4. При течи в сопле с начальной закруткой по закону твердого тела возникает зона обратных токов и в области сужения сопла образуется критическая линия, на которой продольная составляющая скорости внешнего потока u_1 обращается в нуль. Эта линия является особой для уравнений пограничного слоя. Аналогичная особенность возникает при расчете пограничного слоя в гидродинамической модели вихревой форсунки [1], а также при обтекании закрученным потоком осесимметричного тела с протоком и затупленными передними кромками.

Вблизи критической линии распределение скорости u_1 является линейной функцией продольной координаты (вариант 4) и в уравнении (2.10) $\gamma \rightarrow \infty$ при $\xi \rightarrow 0$. Для устранения этой особенности введем новые независимые переменные

$$\xi = \int_0^x \rho_1 \mu_1 u_* r^2 dx, \quad \eta = \frac{\rho_1 \mu_1 u_* r}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \frac{dy}{\mu}$$

где u_* — некоторая, пока не определенная, характерная скорость. Тогда вместо уравнения (2.10) получим

$$(4.1) \quad f'' + Ff' + \beta N \left(\frac{u_1}{u_*} \right)^2 \frac{\rho_1}{\rho} - \beta_* N f^2 + \gamma_* N \left(\frac{\rho_1}{\rho} - \varphi^2 \right) = 2\xi \left(Nf \frac{\partial f}{\partial \xi} - f \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

$$f = \frac{u}{u_*}, \quad \beta_* = \frac{2\xi}{u_*} \frac{du_*}{d\xi}, \quad \gamma_* = \frac{w_1}{u_*} \frac{2\xi}{u_*} \frac{dw_1}{d\xi}$$

Уравнения (2.11) и (2.12) сохраняют при этом свой вид, если в уравнении (2.12) параметр U заменить на параметр $U_* = u_*^2/2h_1^*$.

Сохраняются и граничные условия (2.13), кроме условия $f(\xi, \infty) = 1$, которое должно быть заменено на соотношение $f(\xi, \infty) = u_1/u_*$.

Выберем теперь u_* таким образом, чтобы уравнение (4.1) не имело особенности при $\xi \rightarrow 0$, $u_1 \rightarrow 0$, а при больших u_1 и при $\gamma_* \rightarrow 0$ совпадало с уравнением (2.10). Такой выбор неоднозначен, однако эта неоднозначность проявляется только во вспомогательных переменных и не влияет на результаты расчета параметров пограничного слоя. Примем

$$u_* = \sqrt{u_1^2 + \frac{4}{3} w_1^2} \left| \frac{dr}{dx} \right| \frac{x}{r}$$

Тогда особенность при $\xi \rightarrow 0$ в уравнении (4.1) является устранимой. Выполняя предельный переход, получим $\beta_* = 2/3$, $\gamma_* = 1$. Граничное условие при $\eta \rightarrow \infty$ принимает вид $f(\xi, \infty) = 0$.

Решение уравнений (4.1), (2.11), (2.12) может быть найдено описанным конечно-разностным методом, начиная от критической линии. Вблизи критической линии можно получить соотношения, определяющие характер изменения составляющих напряжения трения, теплового потока и условной толщины пограничного слоя при малых значениях x

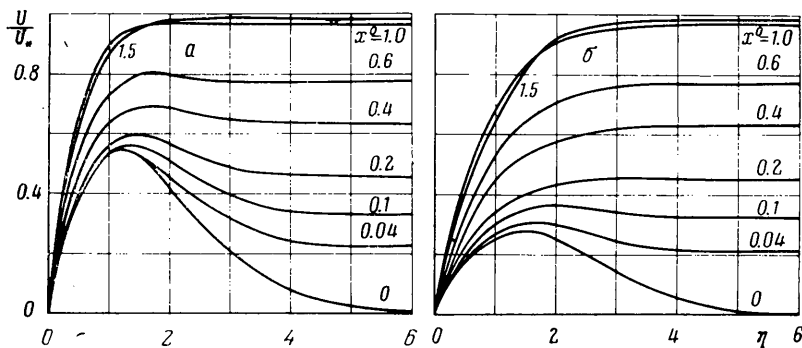
$$\tau_{wx} = \rho_1 w_1^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1 w_1 r}} \left| \frac{dr}{dx} \right|^{3/4} \left(\frac{4x}{3r} \right)^{1/4} f'(0)$$

$$\tau_{wz} = \rho_1 w_1^2 \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1 w_1 r}} \left| \frac{dr}{dx} \right|^{3/4} \left(\frac{3r}{4x} \right)^{1/4} \varphi'(0)$$

$$q_w = \frac{\rho_1 w_1 h_1^*}{P} \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1 w_1 r}} \left| \frac{dr}{dx} \right|^{\frac{1}{4}} \left(\frac{3r}{4x} \right)^{\frac{1}{4}} g'(0)$$

$$\delta = r \sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1 w_1 r}} \left| \frac{dr}{dx} \right|^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{4x}{3r} \right)^{\frac{1}{4}} \int_0^{\eta} \frac{\mu}{\mu_1} d\eta$$

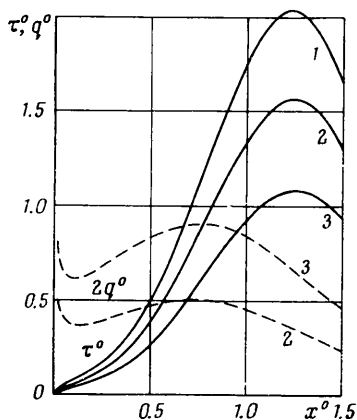
где η_1 — значение переменной η , при котором $f(\eta) = 0.01$, а величины $f'(0)$, $\varphi'(0)$, $g'(0)$ и распределение μ/μ_1 найдены из решения уравнений (4.1), (2.11), (2.12) при $\beta_* = 2/3$, $\gamma_* = 1$. Из этих соотношений следует, что тол-



Фиг. 2

щина пограничного слоя и продольная составляющая напряжения трения изменяются прямо пропорционально, а окружная составляющая напряжения трения и тепловой поток — обратно пропорционально $x^{1/4}$. Указанная закономерность изменения толщины пограничного слоя для частного случая течения несжимаемой жидкости в коническом сопле при $u_1 = 0$ была установлена приближенно на основании расчетов пограничного слоя интегральным методом [1].

Численное решение уравнений (4.1), (2.11), (2.12) проводилось для случая течения в сопле с критической линией (вариант 4). На фиг. 2 приведено найденное распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое при обтекании теплоизолированной (фиг. 2, а) и сильно охлажденной поверхностью $g_w = 0.1$ (фиг. 2, б). Вблизи критической линии профиль скорости имеет максимум, который вызван наличием в пограничном слое отрицательного градиента давления, неуравновешенного центробежными силами.



Фиг. 3

По мере приближения к критическому сечению сопла профиль скорости принимает форму, характерную для ускоренного течения. При уменьшении температуры стенки влияние градиента давления на профиль скорости ослабевает.

На фиг. 3 приведено распределение безразмерных величин τ^0 и q^0 для трех температурных режимов стенки: $g'(0) = 0$ (кривая 1), $g_w = 0.5$ (кривые 2) и $g_w = 0.1$ (кривые 3). Особенностью рассматриваемого течения является наличие максимумов теплового потока в сужающейся части соп-

ла (на критической линии) и в области горла. Область повышенного теплового потока вблизи критической линии имеет незначительную длину ($q^{\circ} \sim x^{-1/4}$) и существенного влияния на характеристики сопла, вероятно, не оказывает. Тепловой поток перед горлом сопла при наличии критической линии превышает почти в 2 раза тепловой поток для рассмотренных ранее вариантов течения (фиг. 1), что связано с уменьшением толщины пограничного слоя. Охлаждение стенки вызывает существенное снижение продольной составляющей напряжения трения для варианта 4 из-за изменения профиля скорости.

Поступила 12 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, М., 1962.
2. Taylor G. I. The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, No. 3.
3. Weber X. E. The boundary layer inside a conical surface due to swirl. J. Appl. Mechanics, 1956, No. 12.
4. Houlihan T. M., Hornsta D. I. Boundary layer velocity profiles in a swirling convergent flow field. J. Fluid Mechanics, 1972, vol. 52, pt 2.
5. Богданова В. В. Ламинарный пограничный слой в осесимметричном закрученном потоке. Тр. Ленинградск. политехн. ин-та, 1965, № 248.
6. Пэк Л. Х. Гидродинамика и теплообмен в ламинарном пограничном слое с закруткой. Ракетная техника и космонавтика, 1969, № 9.
7. Славянов Н. Н. Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавала. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
8. Башкин В. А. Расчет уравнений автомодельного пространственного ламинарного пограничного слоя методом квазилинеаризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, № 5.
9. Джаффе Н. А., Томас Д. Применение квазилинеаризации и рядов Чебышева к численному интегрированию уравнений ламинарного пограничного слоя. Ракетная техника и космонавтика, 1970, № 3.
10. Себечи Т., Смит А. М. Конечно-разностный метод расчета сжимаемого ламинарного и турбулентного пограничных слоев. Теор. основы инж. расчетов, 1970, № 3.