

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ФОРМИРОВАНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПЛАСТИНЕ ЗА ДВИЖУЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

Ю. А. ДЕМЬЯНОВ, В. В. ФЕОКТИСТОВ

(Москва)

Формирование пограничного слоя на полубесконечной пластине за движущейся ударной волной описывается сингулярными уравнениями параболического типа с «эллиптическими» граничными условиями. Для уравнения Праудтля в форме Крокко кроме традиционных условий на стенке, внешней границе и в начальном сечении ставится дополнительное условие в заданном сечении [1-3]. В каждой из областей, где коэффициент при первой производной не меняет знак, применяется метод интегральных соотношений [4, 5]. Полученная система дифференциальных уравнений имеет две особые точки, в окрестности которых невырожденным преобразованием сводится к системе с диагональной матрицей и интегрируется.

Исходная система решалась численно, в качестве «начальных» условий брались значения асимптотических решений. Расчеты представлены в форме аппроксимирующих функций, которые получены на основе систематических расчетов и разложения решения уравнения Праудтля по параметру интенсивности ударной волны $\alpha = U_\infty/U$.

1. Предположим, что в момент времени $t=0$ на полубесконечную пластину, находящуюся в покое газе и имеющую начало в точке O (фиг. 1), набегают ударная волна с постоянной скоростью U , за которой имеет место равномерный поток газа. Обозначим соответственно через U_∞ , ρ_∞ , P_∞ , h_∞ скорость, плотность, давление и энтальпию частиц в этом потоке. За время движения ударной волны по пластине параметры газа вне пограничного слоя остаются неизменными. Задача заключается в определении характеристик пограничного слоя, возникающего на участке OA (фиг. 1) от начала пластины до ударной волны.

Из анализа размерностей решения уравнений пограничного слоя для поставленной задачи следует [1], что при $h_w = h_w(x/U_\infty t)$ безразмерные функции скорости, плотности и энтальпии зависят от двух безразмерных величин

$$\xi = x/U_\infty t, \quad \Theta = Y U_\infty^{1/2} / (v_\infty x)^{1/2} \quad \left(Y = \int_0^y \rho / \rho_\infty dy \right)$$

Поэтому уравнения движения, энергии и граничные условия запишем в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(m \frac{\partial^2 f}{\partial \Theta^2} \right) + \left(\xi^2 - \xi \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \Theta} + \left(\frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial \Theta^2} = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{m}{P_r} \frac{\partial h_{00}}{\partial \Theta} \right) + \left(\xi^2 - \xi \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right) \frac{\partial h_{00}}{\partial \Theta} + \left(\frac{1}{2} f + \frac{\partial f}{\partial \xi} \xi \right) \frac{\partial h_{00}}{\partial \Theta} + \\ + 2 \left(\frac{1}{P_r} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(m \frac{\partial f}{\partial \Theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \Theta^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 f &= \frac{\partial f}{\partial \Theta} = 0, \quad h_{00} = h_{0\infty}(\xi), \quad \Theta = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{U}{U_\infty} \\
 \frac{\partial f}{\partial \Theta} &= 1, \quad h_\infty = h_{0\infty} = \text{const}, \quad \Theta = \infty, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{U}{U_\infty} \\
 \frac{\partial f}{\partial \Theta} &= \frac{\partial f_0}{\partial \Theta}, \quad h_{00} = h_0(\Theta), \quad \xi = 0 \\
 \frac{\partial f}{\partial \Theta} &= 1, \quad h_{00} = h_{0\infty}, \quad \xi = \frac{U}{U_\infty} \\
 v_x &= U_\infty \frac{\partial f}{\partial \Theta}, \quad h + \frac{1}{2} v_x^2 = \frac{1}{2} U_\infty^2 h_{00}(v, \Theta), \quad m = \frac{\mu \rho}{\mu_\infty \rho_\infty} \\
 \frac{\partial Y}{\partial t} + v_x \frac{\partial Y}{\partial x} + v_y \frac{\rho}{\rho_\infty} &= \left(\frac{v_\infty U_\infty}{x} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2} f + \xi \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \Theta \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right)
 \end{aligned}$$

Здесь v_x и v_y — составляющие скорости вдоль оси ox и oy , P_r — число Прандтля, $\mu = \nu \rho$ — коэффициент динамической вязкости, $f_0(\Theta)$ и $h_0(\Theta)$ — решения стационарной задачи.

В дальнейшем ограничимся определением скоростного пограничного слоя при $m=1$, когда уравнение (1.1) решается независимо от (1.2). Записывая уравнение (1.1) в форме Крокко, получим

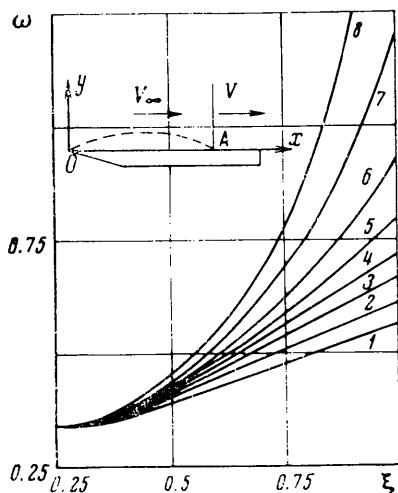
$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & \omega^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \xi(\xi - u) \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \\
 & + \frac{1}{2} u \omega = 0, \quad u = \frac{\partial f}{\partial \Theta}, \\
 & \omega = \frac{\partial^2 f}{\partial \Theta^2}
 \end{aligned}$$

Впервые данная задача поставлена в [1], где получено приближенное решение, заключающееся в том, что пограничный слой при $0 \leq \xi \leq \xi_0$ можно считать стационарным в переменных ξ , Θ , а при $\xi_0 \leq \xi \leq U/U_\infty$ — стационарным, но в системе координат, связанной с ударной волной. В [1] указано на возможность уточнения решения задачи путем определения добавок из линеаризации относительно полученных решений уравнения (1.1). Показано [2], что в области $1 \leq \xi \leq U/U_\infty$ полученное в [1] решение является точным, а в области $0 \leq \xi \leq 1$ в силу сингулярности уравнения (1.3) из-за наличия линии $u - \xi = 0$ необходимо ставить граничные условия [2, 3]

$$(1.4) \quad \omega = 0, \quad u = 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1; \quad \partial \omega / \partial u = 0, \quad u = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1$$

$$(1.5) \quad \omega = \Omega_0(u), \quad \xi = 0; \quad \omega = \Omega_1(\xi = 1, u), \quad \xi = 1, \quad 0 \leq u \leq 1$$

Здесь $\Omega_0(u)$ — решение задачи Блазуса для пластины, а $\Omega_1(\xi, u)$ — решение задачи о пограничном слое за ударной волной на неограниченной



Фиг. 1

пластине [1, 6]

$$\Omega_1(\xi, u) = [\xi / (1 - \alpha\xi)]^{1/2} \omega_+(u, \alpha), \quad \alpha = U_\infty / U,$$

где $\omega_+(u, \alpha)$ удовлетворяет уравнению и условиям:

$$(1.6) \quad \omega_+ \frac{\partial \omega_+}{\partial u^2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha u) = 0, \quad \omega_+ = 0, \quad u = 1; \quad \frac{d\omega_+}{du} = 0, \quad u = 0$$

Для случая $\alpha = 0$, соответствующего импульсивному движению с постоянной скоростью из состояния покоя полубесконечной пластины [7], в [2] применен метод, сводящий (1.3) к интегродифференциальному уравнению, которое численно решено методом последовательных приближений. Авторы [2] отмечают, что процесс плохо сходится, особенно при $\xi \rightarrow 1$. В [8] путем выбора весовых функций улучшен процесс итераций и получено решение в диапазоне $1.1 \leq 1/\alpha \leq 2$.

Ниже получены численные результаты решения задачи, а также простые аппроксимационные формулы для напряжения трения во всем диапазоне α, ξ, u . Это стало возможно, во-первых, вследствие аналитического и численного решения уравнения (1.6) и, во-вторых, вследствие решения уравнения (1.3) методом интегральных соотношений [4, 5].

2. Решением задачи о пограничном слое за ударной волной на неограниченной пластине является [1, 6]

$$(2.1) \quad f = F(\zeta, \alpha), \quad \zeta = \Theta / (1/\xi - \alpha)^{1/2}$$

$$F''' + (\zeta - \alpha F)F'' / 2 = 0, \quad F(0, \alpha) = F'(0, \alpha) = 0, \quad F'(\infty, \alpha) = 1$$

При $\alpha = 0$ уравнение (2.1) приводит к решению Рэлея

$$F_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi dt \int_0^t \exp(-z^2/4) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\zeta \int_0^\xi \exp(-z^2/4) dz + 2 \exp(-\zeta^2/4) - 2 \right]$$

Полагая $F(\zeta, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\zeta) \alpha^k$, для $F_k(\zeta)$ получим

$$F_k''' + \zeta F_k'' / 2 = L(F_0, F_1, \dots, F_{k-1}, \zeta)$$

Эти уравнения интегрируются. В частности, для F_1 с учетом граничных условий имеем

$$F_1 = (\pi - 2)F_0 / (2\pi) - 0.5\zeta F_0^2 + 0.5F_0 \int_0^\xi F_0(\zeta) d\zeta + 0.5 \int_0^\xi (F_0 F_0' - F_0^2) d\zeta.$$

Поэтому при $\zeta = 0$

$$(2.2) \quad F_{01}''(0, \alpha) = F_0'' + \alpha F_1'' = \pi^{-1/2} [1 - \alpha(\pi - 2) / (2\pi)]$$

Линейная зависимость от α , вообще говоря, справедливая для $\alpha \ll 1$, хорошо аппроксимирует решение $F''(0, \alpha)$ во всем диапазоне $0 \leq \alpha \leq 1$. Ниже представлена разность $\Delta \times 10^4$ между значениями $F_{01}''(0, \alpha)$ и полученными численными расчетами (2.1).

α	0	0.9011	0.18349	0.28067	0.38234	0.5	0.60343	0.72678	0.86267	1.0
$\Delta \times 10^4$	0	60	122	188	254	340	635	971	1342	1793

Ошибка не превышает 0.7% при $0 \leq \alpha \leq 0.5$ и 3.8% при $0 \leq \alpha \leq 1$. Ошибку можно уменьшить до 1.1% для представления

$$F''(0, \alpha) = F_0''(0) - \alpha[F_0''(0) - F''(0, 1)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

и до 0.1% для представления

$$F''(0, \alpha) = F_0''(0) - 2\alpha[F_0''(0) - F''(0, 0.5)], \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

(2.3)

$$F''(0, \alpha) = F''(0, 1) + 2(1 - \alpha)[F''(0, 0.5) - F''(0, 1)], \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

Так как $\omega_+(0, \alpha) = F''(0, \alpha)$ и в силу непрерывной зависимости решения уравнения (1.6) от граничных условий при $u=0$, следует ожидать, что по крайней мере в некотором интервале $u > 0$ будет хорошо оправдываться линейная аппроксимация $\omega_+(u, \alpha)$ от α . Ниже приведено $\omega_+(u, \alpha)$ при $\alpha = 0, 0.5, 1.0$, и разности $\Delta_k \times 10^4$ ($k=1, 2, 3$), где

$$\Delta_1 = \omega_+(u, \alpha) - \{\omega_+(u, 0) - \alpha[\omega_+(u, 0) - \omega_+(u, 1)]\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$(2.4) \quad \Delta_2 = \omega_+(u, \alpha) - \{\omega_+(u, 0) - 2\alpha[\omega_+(u, 0) - \omega_+(u, 0.5)]\}, \quad 0 \leq \alpha \leq 0.5$$

$$\Delta_3 = \omega_+(u, \alpha) - \{\omega_+(u, 1) + 2(1 - \alpha)[\omega_+(u, 0.5) - \omega_+(u, 1)]\}, \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

u	$\alpha=0$	0.5	1.0
0.0	0.56419	0.50953	0.44375
0.1	0.55854	0.50470	0.43829
0.2	0.54749	0.49044	0.42255
0.3	0.52328	0.46699	0.30733
0.4	0.49325	0.43443	0.36329
0.5	0.45072	0.39264	0.32099
0.6	0.39696	0.34128	0.27090
0.7	0.32995	0.27960	0.21344
0.8	0.24601	0.20617	0.14890
0.9	0.14563	0.11779	0.07767

Из таблицы следует, что линейная аппроксимация $\omega_+(u, \alpha)$ от α имеет место практически во всем пограничном слое (соответствующие максимальные ошибки аппроксимации в процентах приведены в конце столбцов).

α	$u=0.3$			0.5			0.7			0.9		
	$k=1$	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
0.18349	28	4	—	27	2	—	38	5	—	31	3	—
0.38234	49	7	—	58	5	—	69	8	—	53	6	—
0.5	55	0	—	68	0	—	70	0	—	61	0	—
0.60343	56	—	14	70	—	16	81	—	18	64	—	13
0.86267	34	—	15	44	—	19	50	—	20	40	—	12
	1.1	0.3	0.3	1.8	0.3	0.8	3	0.3	1.0	4	0.3	0.8

3. Для решения (1.3) применяется метод интегральных соотношений в каждой из областей, где коэффициент при $\partial\omega/\partial\xi$ не меняет знак. Так как $\Omega_0(u)$, $\Omega_1(\xi, u)$ являются частными решениями уравнения (1.3), то его целесообразно представить в виде $\omega = \Omega_i + \omega_i^*$. (Индекс i принимает значение 0 или 1, если рассматриваем решение вблизи точек $\xi=0$ или $\xi=1$ соответственно.) Тогда

$$(3.1) \quad \omega_0^* = 0, \quad \xi = 0; \quad \omega_1^* = 0, \quad \xi = 1.$$

В области $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq \xi \leq 1$ проведем N линий

$$(3.2) \quad u_n = \frac{2(n-1)\xi}{N-1}, \quad n=1, 2, \dots, \frac{N+1}{2};$$

$$u_n = 1 - \frac{2(N-n)}{N-1}(1-\xi), \quad n = \frac{N+1}{2} + 1, \dots, N$$

где N — нечетное ($N \geq 3$), а линия $u = \xi$ входит в число заданных. В n -й полосе представим ω_{in}^* ($i=0, 1$) в виде

$$\omega_{0n}^* = \omega_{0n}, \quad \omega_{1n}^* = \xi^{1/2} \omega_{1n} / (1 - \alpha \xi)^{1/2}$$

$$\omega_{in} = \varphi_{n0}^i(\xi) + u \varphi_{n1}^i(\xi) + u^2 \varphi_{n2}^i(\xi), \quad (n=1, 2, \dots, N-1), \quad (i=0, 1)$$

Функции φ_{nj}^i ($j=0, 1, 2$) в силу (1.4) и условий непрерывности ω_{in} и $\partial \omega_{in} / \partial u$ на линиях u_n могут быть выражены через $N-1$ функций (например, $\varphi_{N-1,1}^i, \varphi_{k,2}^i$ ($k=2, 3, \dots, N-1$)).

Интегрируем (1.3) по u от u_n до u_{n+1}

$$(3.3) \quad \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left[(\Omega_i + \omega_{in}^*) \frac{\partial^2 (\Omega_i + \omega_{in}^*)}{\partial u^2} + \xi (\xi - u) \frac{\partial (\Omega_i + \omega_{in}^*)}{\partial \xi} + \frac{1}{2} u (\Omega_i + \omega_{in}^*) \right] du = 0$$

$$i=0, 1; \quad n=1, 2, \dots, N-1$$

получим $2(N-1)$ обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями, вытекающими из (1.5).

Непосредственное численное решение этих уравнений невозможно, ибо φ_{nj}^i экспоненциально малы вблизи точек $\xi=0$ и $\xi=1$, которые являются сильно особыми. Найдем поэтому асимптотические разложения решения при $\xi \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$ методом, предложенным в [5].

Пренебрегая членами $O(\omega_{in}^2)$ (в силу выбора Ω_0 и Ω_1), при $\xi \rightarrow 0$, $\xi \rightarrow 1$, получим $2(N-1)$ линейных однородных дифференциальных уравнений

$$(3.4) \quad \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left[\Omega_0^2 \frac{\partial^2 \omega_{0n}}{\partial u^2} + \xi (\xi - u) \frac{\partial \omega_{0n}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} u \omega_{0n} \right] du = 0$$

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}} \left[\omega_{+2} \frac{\partial \omega_{1n}}{\partial u^2} + (1 - \alpha \xi) (\xi - u) \frac{\partial \omega_{1n}}{\partial \xi} - \frac{1}{2} (1 - \alpha u) \omega_{1n} \right] du = 0$$

Например, для $N=3$

$$(3.5) \quad \omega_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{u^2}{\xi} + \xi - 2 \right) y_1^i + (u^2 - 1) y_2^i$$

$$\omega_{12} = (u-1) y_1^i + (u^2 - 1) y_2^i, \quad y_1^i = \varphi_{21}^i, \quad y_2^i = \varphi_{22}^i$$

где функции y_1^i и y_2^i удовлетворяют уравнениям и условиям

$$(3.6) \quad \sum_{j=1}^2 Q_{nj}^i \frac{dy_j^i}{d\xi} + \sum_{j=1}^2 q_{nj}^i y_j^i + W_n^i = 0 \quad (n=1, 2; \quad i=0, 1)$$

$$y_j^0 = 0, \quad \xi = 0; \quad y_j^1 = 0, \quad \xi = 1$$

Коэффициенты Q_{nj}^i , q_{nj}^i , W_n^i легко получить из (3.4)

$$\begin{aligned} Q_{11}^0 &= 1/2 \xi^4 (12 - 7\xi), & Q_{12}^0 &= 1/12 \xi^4 (6 - \xi^2) \\ Q_{21}^0 &= 1/6 \xi (1 - \xi)^3, & Q_{22}^0 &= 1/12 \xi (3 + \xi) (1 - \xi)^3, & Q_{nj}^1 &= (\alpha - 1/\xi) Q_{nj}^0 / \alpha \\ q_{11}^0 &= -1/48 \xi^3 (12 + \xi), & q_{12}^0 &= -1/8 \xi^3 (2 - \xi^2), & q_{11}^1 &= \alpha q_{11}^0 + 1/8 (4 - \xi) \xi^2 \\ q_{21}^0 &= 1/12 (1 + 2\xi) (1 - \xi)^2, & q_{22}^0 &= 1/8 (1 - \xi^2)^2 \\ q_{12}^1 &= \alpha q_{12}^0 + 1/6 \xi^2 (3 - \xi^2), & q_{21}^1 &= -\alpha q_{21}^0 + 1/8 (4 - \xi) \xi^2, & q_{22}^1 &= \alpha q_{22}^0 + 1/6 (2 + \xi) \end{aligned}$$

$$W_1^0 = -(y_1^0 + 2\xi y_2^0) \int_0^\xi \Omega_0^2(u) du, \quad W_2^0 = 2y_2^0 \int_\xi^1 \Omega_0^2(u) du$$

$$W_1^1 = (y_1^1 + 2\xi y_2^1) \int_0^\xi \omega_+(u) du, \quad W_2^1 = -2y_2^1 \int_\xi^1 \omega_+(u) du$$

Разрешаем систему (3.6) относительно производных при $\xi \rightarrow 0$, ($i=0$)

$$\begin{aligned} \xi^3 \frac{d\varphi_{21}^0}{d\xi} &= \left[6\Omega_{00}^2 + \frac{13}{2} \Omega_{00}^2 \xi + \left(\frac{5}{2} + \frac{51}{8} \Omega_{00}^2 \right) \xi^2 + \dots \right] \varphi_{21}^0 + \\ &+ [12\Omega_{00}^2 \xi + (3 + 24I_0 + 13\Omega_{00}^2) \xi^2 + \dots] \varphi_{22}^0 \\ (3.7) \quad \xi^3 \frac{d\varphi_{22}^0}{d\xi} &= - \left[4\Omega_{00}^2 + 3\Omega_{00}^2 \xi + \left(2 + \frac{13}{4} \Omega_{00}^2 \right) \xi^2 + \dots \right] \varphi_{21}^0 - \\ &- \left[8\Omega_{00}^2 \xi + \left(\frac{5}{2} + 6\Omega_{00}^2 + 24I_0 \right) \xi^2 + \dots \right] \varphi_{22}^0 \end{aligned}$$

$$\Omega_0(u) = \Omega_{00} + \Omega_{03}u^3 + \dots, \quad I_0 = \int_0^1 \Omega_0^2(u) du, \quad \Omega_{00} = 0.332$$

Невырожденное преобразование [5]

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \begin{pmatrix} \varphi_{21}^0 \\ \varphi_{00}^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix} \xi + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \Omega_{00}^2 - \frac{4I_0}{\Omega_{00}^2} - \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{27} + \frac{8I_0}{9\Omega_{00}^2} & 0 \end{pmatrix} \xi^2 + \dots \right\} \begin{pmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

переводит систему (3.7) в систему с диагональной матрицей

$$\begin{aligned} \xi^3 \frac{d\sigma_1^0}{d\xi} &= \left[6\Omega_{00}^2 - \frac{3}{2} \Omega_{00}^2 \xi + r_0 \xi^2 + \dots \right] \sigma_1^0, & r_0 &= \frac{1}{2} + \frac{3}{8} \Omega_{00}^2 - 16I_0 \\ \xi^3 \frac{d\sigma_2^0}{d\xi} &= [-r_1 \xi^2 + \dots] \sigma_2^0, & r_1 &= \frac{1}{2} + 8I_0 \end{aligned}$$

которая интегрируется

$$\begin{aligned} (3.9) \quad \sigma_1^0 &= (c_{13}^0 + \dots) \xi^{r_0} \exp [-3\Omega_{00}^2/\xi^2 + 3\Omega_{00}^2/(2\xi)], \\ \sigma_2^0 &= (c_{23}^0 + \dots) \xi^{-r_1}. \end{aligned}$$

Расходящиеся решения проще найти непосредственной подстановкой обобщенного ряда

$$(3.10) \quad \varphi_{2j}^0 = \xi^r \sum_{k=0}^{\infty} c_{kj}^0 \xi^k$$

в уравнение (3.6), тогда $r = -(1/2 + 8I_0)$. Поэтому для случаев $N > 3$ расходящиеся решения будем искать в форме (3.10). (Их определение необходимо лишь для того, чтобы убедиться, сколько произвольных постоянных общего решения в силу граничных условий равны нулю.)

При $\xi \rightarrow 1$ разрешаем систему (3.6) относительно производных, записывая первые члены разложения.

В случае $\alpha \neq 1$, $\varphi_{21}^1 = z y_{11}^1 - 2 y_{21}^1$; $\varphi_{22}^1 = y_{21}^1$

$$(3.11) \quad \begin{aligned} z^4 \frac{dy_{11}^1}{dz} &= (z^3 + \dots) y_{11}^1 + \left(\frac{16 \Phi_\alpha(z)}{1-\alpha} + \dots \right) y_{21}^1 \\ z^4 \frac{dy_{21}^1}{dz} &= (z^3 + \dots) y_{11}^1 + \left(\frac{8 \Phi_\alpha(z)}{1-\alpha} + \dots \right) y_{21}^1 \end{aligned}$$

$$(3.12) \quad \begin{aligned} \alpha &= 1; \quad \varphi_{21}^1 = y_{11}^1 - 2 y_{21}^1, \quad \varphi_{22}^1 = y_{21}^1 \\ z^5 \frac{dy_{11}^1}{dz} &= \left[\left(\frac{8 \Phi_1(1)}{5} + \frac{3}{2} \right) z^4 + \dots \right] y_{11}^1 + [16 z \Phi_1(1) + \dots] y_{21}^1 \\ z^5 \frac{dy_{21}^1}{dz} &= \left[\left(\frac{16}{5} \Phi_1(1) + 1 \right) z^3 + \dots \right] y_{11}^1 + [8 \Phi_1(1) + \dots] y_{21}^1 \end{aligned}$$

$$z = 1 - \xi, \quad \Phi_\alpha(z) = \int_{1-z}^1 \omega_+^2(u, \alpha) du$$

Для ω_+ в верхней области пограничного слоя справедливо

$$\begin{aligned} \alpha \neq 1; \quad \omega_+ &= \left(\frac{1-\alpha}{\pi} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right), \\ u &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\eta \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right) d\eta, \quad \eta = \xi \left(\frac{1-\alpha}{2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 1; \quad \omega_+ = \kappa_1(1-u) + \kappa_2(1-u)^2 + \dots, \quad \kappa_1 = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-u) du}{\omega_+(u, 1)}$$

В случае $\alpha \neq 1$, переходя к новой переменной η при $\xi \rightarrow 1$ по формуле

$$z = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_\eta^\infty \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right) d\eta \approx \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\eta} \exp \left(-\frac{\eta^2}{2} \right) \quad \eta \rightarrow \infty$$

и пользуясь приближением для $\Phi_\alpha(z)$, получим

$$(3.13) \quad \Phi_\alpha(\eta) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1-\alpha}{2} \int_\eta^\infty \exp \left(-\frac{3\eta^2}{2} \right) d\eta \approx \left(\frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{1-\alpha}{6\eta} \exp \left(-\frac{3\eta^2}{2} \right) \quad \eta \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned} \eta^{-3} \frac{dy_{11}^1}{d\eta} &= (-\eta^{-2} + \dots) y_{11}^1 - \left(\frac{8}{3} + \dots \right) y_{21}^1, \\ \eta^{-3} \frac{dy_{21}^1}{d\eta} &= (-\eta^{-2} + \dots) y_{11}^1 - \left(\frac{4}{3} + \dots \right) y_{21}^1 \end{aligned}$$

Невырожденное преобразование

$$\begin{pmatrix} y_{11}^1 \\ y_{21}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3/2 \\ -3/4 & 0 \end{pmatrix} \eta^{-2} + \dots \right\} \times \begin{pmatrix} \sigma_1^1 \\ \sigma_2^1 \end{pmatrix}$$

переводит (3.13) в интегрируемую систему

$$\eta^{-3} \frac{d\sigma_1^1}{d\eta} = (\eta^{-2} + \dots) \sigma_1^1, \quad \eta^{-3} \frac{d\sigma_2^1}{d\eta} = -(\eta^3/3 + 2\eta^{-2} + \dots) \sigma_2^1$$

Следовательно, главные члены асимптотического разложения общего решения системы (3.6) имеют вид

$$\alpha \neq 1$$

$$y_{11}^1 = \sigma_1^1 + 2\sigma_2^1, \quad y_{21}^1 = -(3\eta^{-2}/4 + \dots) \sigma_1^1 + \sigma_2^1$$

$$\sigma_1^1 = c_{13}^1 \exp(\eta^2/2 + \dots), \quad \sigma_2^1 = c_{23}^1 \exp(-\eta^4/3 + \dots)$$

$$\alpha = 1$$

$$y_{11}^1 = \sigma_1^1 + 2z\sigma_2^1, \quad y_{21}^1 = -(\kappa_1)^2 [2\Phi_1(1)/15 + \eta^{1/2}/24 + \dots] \sigma_1^1 + \sigma_2^1.$$

$$\sigma_1^1 = c_{13}^1 z^{-[24\Phi_1(1)/5 + 1/2]}, \quad \sigma_2^1 = c_{23}^1 \exp[-8(\kappa_1)^2/(3z) + \dots]$$

Аналогично, в случае $N=5$ для системы (3.4) существует два сходящихся и два расходящихся решения при $\xi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 1$ соответственно. Асимптотическое решение при $N=5$ в силу граничных условий при $\xi \rightarrow 0, 1$ имеет вид

$$\xi \rightarrow 0$$

$$\varphi_{41}^0 = \frac{153}{208} \xi^2 \sigma_1^0 + \frac{27}{69} \xi^{3/2} \sigma_2^0, \quad \varphi_{42}^0 = -\frac{17}{39} \xi^2 \sigma_1^0 - \frac{16}{69} \xi^{3/2} \sigma_2^0$$

$$\varphi_{32}^0 = \frac{85}{39} \xi^2 \sigma_1^0 + \frac{80}{69} \xi^{3/2} \sigma_2^0, \quad \varphi_{22}^0 = -\sigma_1^0 - \frac{1}{4} \xi^{1/2} \sigma_2^0$$

$$\sigma_1^0 = c_{15}^0 \exp(-\lambda_1/\xi^3 + \dots), \quad \sigma_2^0 = c_{25}^0 \exp(-\lambda_2/\xi^2 + \dots)$$

$$\lambda_1 = 128\Omega_{00}^2/11, \quad \lambda_2 = 69\Omega_{00}^2/13$$

$$\xi \rightarrow 1; \quad \alpha \neq 1$$

$$\varphi_{41}^1 + 2\varphi_{42}^1 = 12.9017z\sigma_1^1 + 0.5684z\sigma_2^1$$

$$\varphi_{42}^1 = 11.9017\sigma_1^1 - 1.5684\sigma_2^1, \quad \varphi_{32}^1 = \sigma_1^1 + \sigma_2^1$$

$$\varphi_{22}^1 = \int_0^1 \{ [-2.2574 - 30.4158I_1(1/2, 0)/(1-\alpha)] \times (\varphi_{41}^1 + 2\varphi_{42}^1) \} \times \frac{dz}{d\eta} d\eta$$

$$\sigma_1^1 = c_{15}^1 \exp(-\lambda_3\eta^4/4 + \dots), \quad \sigma_2^1 = c_{25}^1 \exp(-\lambda_4\eta^4/4 + \dots)$$

$$\lambda_3 = 0.6481, \quad \lambda_4 = 10.0186, \quad I_1(1/2, 0) = \int_0^{1/2} \omega_+(u, \alpha) du$$

$$\xi \rightarrow 1, \quad \alpha = 1$$

$$\varphi_{41}^1 = -1.5022z\sigma_1^1 + 0.3624z\sigma_2^1, \quad \varphi_{42}^1 = -1.3858\sigma_1^1 + \sigma_2^1$$

$$\varphi_{32}^1 = -0.1164\sigma_1^1 - 0.6376\sigma_2^1, \quad \varphi_{22}^1 = 0$$

$$\sigma_1^1 = c_{15}^1 \exp(-c^2\lambda_5/z), \quad \sigma_2^1 = c_{25}^1 \exp(-c^2\lambda_6/z)$$

$$\lambda_5 = 3.8884, \quad \lambda_6 = 60.1116, \quad c = \kappa_1/\sqrt{3}$$

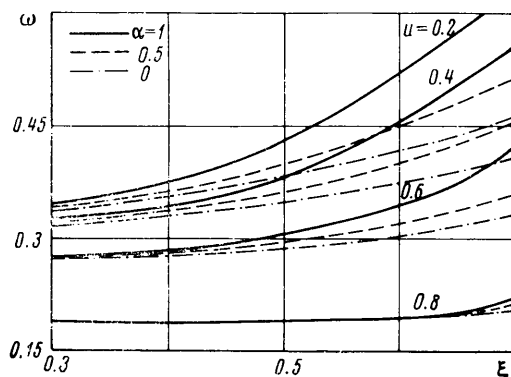
Здесь $z=1-\xi$, c_{15}^1 , c_{25}^1 — произвольные постоянные.

При $\alpha \rightarrow 0$ асимптотические решения совпадают с полученными в [5]. Систему (3.3) интегрируем численно, за начальные условия в точках $\xi^* \ll 1$ и $1 \gg 1 - \xi^* > 0$ принимаем значения соответствующих асимптотических решений. Сопряжение решений производим на линии $\xi = \xi_0 = \text{const}$ по условию

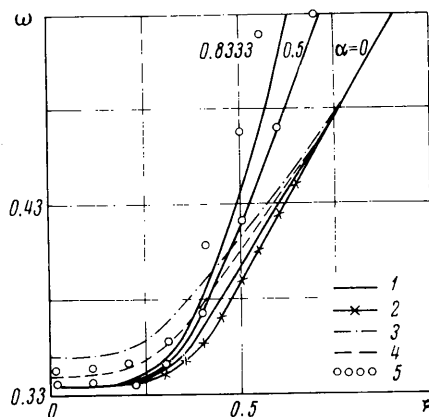
$$(3.14) \quad \Omega_0 + \omega_n^* = \Omega_1 + \omega_1^*$$

Если представить Ω_0 и Ω_1 в каждой полосе в виде квадратного трехчлена Ω_{0n} и Ω_{1n} по u , то в силу идентичности представления Ω_{0n} и Ω_{1n} с ω_{0n}^* и ω_{1n}^* (условия для Ω_{0n} и Ω_{1n} совпадают с условиями для ω_{0n}^* и ω_{1n}^*) для сопряжения решения во всей области определяем все оставшиеся произвольные постоянные при любом ξ . Из факта наилучшего представления $\Omega_1 - \Omega_0$ квадратными трехчленами определяется ξ_0 .

На фиг. 1 приведено напряжение трения на пластине для $\alpha=0, 0.1835, 0.3833, 0.5, 0.6034, 0.7265, 0.8627, 1.0$ (кривые 1—8 соответственно). Ре-



Фиг. 2



Фиг. 3

шение $\omega(\xi, u, \alpha)$ в области $0.7 \leq \xi \leq 1$ отличается незначительно от соответствующего решения $\Omega_1(\xi, u, \alpha)$, поэтому имеет место аппроксимация по формуле (2.4). Расчеты показали, что такая аппроксимация справедлива во всем диапазоне $0 \leq \xi \leq 1$.

На фиг. 2 представлено распределение $\omega(\xi, u, \alpha)$ для $0.3 \leq \xi \leq 0.7$ и $\alpha=0, 0.5, 1$. Ниже приведены значения в случае $N=5$.

u	$\xi=0.3$	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
$\alpha=0$							
0	0.33997	0.35002	0.36579	0.38212	0.40011	0.41865	0.43260
0.1	0.33932	0.34909	0.36372	0.37958	0.39721	0.41547	0.43361
0.3	0.33069	0.33764	0.34685	0.35901	0.37372	0.38974	0.40617
0.5	0.30169	0.30510	0.31034	0.31576	0.32492	0.33638	0.34928
0.7	0.24054	0.24129	0.24281	0.24510	0.24805	0.25160	0.25574
0.9	0.11960	0.11960	0.11960	0.11962	0.11965	0.12018	0.12084
$\alpha=0.5$							
0	0.34264	0.35604	0.37215	0.39634	0.41896	0.44452	0.47176
0.1	0.34188	0.35492	0.37071	0.39352	0.41551	0.44056	0.46734
0.3	0.33178	0.34187	0.35506	0.37175	0.38870	0.40972	0.43335
0.5	0.30234	0.30689	0.31389	0.32291	0.33593	0.34892	0.36624
0.7	0.24060	0.24158	0.24363	0.24668	0.25062	0.25535	0.26087
0.9	0.11960	0.11960	0.11961	0.11962	0.11967	0.12037	0.12125
$\alpha=1.0$							
0	0.34530	0.36205	0.38457	0.41344	0.44930	0.49263	0.54397
0.1	0.34444	0.36073	0.38160	0.40955	0.44454	0.48698	0.53747
0.3	0.33348	0.34609	0.36000	0.38091	0.40896	0.44474	0.48878
0.5	0.30299	0.30869	0.31743	0.32769	0.34338	0.36644	0.39822
0.7	0.24065	0.24190	0.24443	0.24825	0.25318	0.25909	0.26599
0.9	0.11962	0.11962	0.11963	0.11965	0.11968	0.12057	0.12166

Значения $\omega(\xi, u, \alpha)$ для других α вычисляются по формулам

$$\omega(\xi, u, \alpha) = (1 - \alpha\xi)^{-1/2} \{ \omega(\xi, u, 0) - [\omega(\xi, u, 0) - (1 - \xi)^{1/2} \omega(\xi, u, 1)] \alpha \},$$
(3.15)

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

или

$$\omega(\xi, u, \alpha) = (1 - \alpha\xi)^{-1/2} \{ \omega(\xi, u, 0) - 2\alpha [\omega(\xi, u, 0) - (1 - \xi/2)^{1/2} \omega(\xi, u, 0.5)] \},$$
(3.16)

$$0 \leq \alpha \leq 0.5$$

$$\omega(\xi, u, \alpha) = (1 - \alpha\xi)^{-1/2} \{ (1 - \xi)^{-1/2} \omega(\xi, u, 1) + 2(1 - \alpha) [(1 - \xi/2)^{1/2} \omega(\xi, u, 0.5) - (1 - \xi)^{1/2} \omega(\xi, u, 1)] \}, \quad 0.5 \leq \alpha \leq 1$$

Формула (3.15) определяет ω с точностью до 3% при $0 < u < 0.9$ и 1% при $u=0$, а формула (3.16) — с точностью до 1 и 0,3% соответственно.

Решение в области $0 \leq \xi \leq 0.25$ определяется по (3.5), (3.8), причем c_{13}^0 можно взять из аппроксимационной формулы $c_{13}^0 = -(2.99 + 5.68\alpha) 10^3$. Ниже представлена разность $\Delta_4 10^4$

$$\Delta_4 = \omega(\xi, 0, \alpha) |_{N=3} - \omega(\xi, 0, \alpha) |_{N=5}$$

α	$\xi=0.30$	0.35	0.4	0.45	0.5	0.55	0.6
0	340	353	294	233	170	90	58
0.5	338	351	302	241	178	94	64
1.0	340	358	312	252	191	99	73

Отсюда видно, что максимальное отличие составляет на линии сопряжения ($\xi_0=0.377$) 1.4%.

Таким образом, из полученного во всем диапазоне ξ, u, α решения следует, что при $0 \leq \xi \leq 0.25$ течение практически не отличается от стационарного течения в пограничном слое на полубесконечной пластине; при $0.7 \leq \xi \leq 1$ — от течения за ударной волной на неограниченной пластине; при $0.25 < \xi < 0.7$ происходит трансформация этих течений.

В области $1 \leq \xi < U/U_\infty$ аппроксимационные формулы (2.3) при $u=0$ дают точность, аналогичную точности интерполяционной формулы работы [6]. В области $0 \leq \xi \leq 1$ проведено сравнение напряжения трения на пластине результатов расчета (сплошные кривые 1) с данными работ [2, 8, 9] для $\alpha=0, 0.5, 0.8333$ (фиг. 3). В работах [2, 8] применен метод, сводящий уравнение (1.3) к интегродифференциальному уравнению, которое численно решается методом последовательных приближений. В [2] получен результат для $\alpha=0$ (кривая 2), а в [8], где учитывалось изменение произведения ρ поперек пограничного слоя, получены данные для $\alpha=0.5, 0.7519, 0.8333, 0.8696, 0.8929, 0.9049$. На фиг. 3 приведены значения для $\alpha=0.5, 0.8333$, взятые из [8] (индекс 5). В [9] для $\alpha=0$ задача решалась асимптотическим методом Мексина и получено два приближения (фиг. 3, кривые 3, 4 — первое и второе приближение соответственно)

Поступила 23 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Демьянов Ю. А. Формирование пограничного слоя на пластине с движущимся скачком уплотнения. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
2. Lam S. H., Crocco L. Note on the shock induced unsteady laminar boundary layer on a semi-infinite flat plate. J Aero/Space Sci., 1959, vol. 26, No. 1.
3. Gevrey M. Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique. J. math. pures et appl., Ser 6. 1913, vol. 9, No. 4; 1914, vol. 10, No. 2.

4. Дородницын А. А. Об одном методе решения уравнений ламинарного пограничного слоя. ПМТФ, 1960, № 3.
 5. Демьянов Ю. А., Феоктистов В. В. Применение метода интегральных соотношений к решению сингулярного уравнения параболического типа, встречающегося в теории пограничного слоя. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1975, т. 15, № 2.
 6. Mirels H. Boundary layer behind shock or thin expansion wave moving into stationary fluid. Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Techn. Notes, 1956, No. 3712.
 7. Stewartson K. On the impulsive motion of a flat plate in viscous fluid. Quart. Mech. and Appl. Math., 1951, vol. 4, pt 1.
 8. Федермен Е. Д. Теплообмен и касательное напряжение в неустановившемся пограничном слое на плоской пластине, образованном при прохождении ударной волны. Ракетная техника и космонавтика, 1968, т. 6, № 3.
 9. Kennedy L. A. Impulsive motion of a semi-infinite flat plate in a viscous fluid. Appl. Sci. Res., 1973, vol. 27, No. 5.
-