

ТУРБУЛЕНТНАЯ ВИХРЕВАЯ ПАРА В НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Ф. Б. КАПЛАНСКИЙ, А. М. ЭПШТЕЙН

(Таллин)

Автомодельная задача о движении турбулентной вихревой пары и переносе ею тепла решена численно. Проанализированы особенности полученных решений при различной скорости изменения коэффициента турбулентной вязкости.

1. Автомодельная задача о движении турбулентного вихревого кольца, возникающего в несжимаемой жидкости под действием направленного динамического импульса, и переносе им тепла впервые сформулирована в [1]. В предлагаемой работе рассматривается плоский аналог такой задачи. Доказательство существования и единственности решения для этого случая приведено в [2]. Практическим приложением данной задачи может служить расчет параметров пространственной струи в поперечном потоке на достаточно большом удалении от источника [3-5].

Основные предположения, содержащиеся в постановке задачи, сводятся к следующим: 1) архимедовы силы плавучести и силы вязкого трения пренебрежимо малы по сравнению с силами инерции и турбулентного трения; молекулярный перенос тепла мал по сравнению с турбулентным переносом; 2) турбулентные аналоги коэффициентов кинематической вязкости и температуропроводности ν_i и a_i зависят только от времени; кроме того, предполагается $\nu_i \sim a_i \sim L(t) V(t)$; где L , V — характерные масштабы движения (размер и скорость вихревой пары).

В этих предположениях исходные уравнения задачи запишутся в виде

$$(1.1) \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \nu_i \nabla^2 \xi \quad \left(\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$(1.2) \quad \nabla^2 \psi = -\xi, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a_i \nabla^2 T$$

где x , y — оси декартовой системы координат с началом на уровне источника (положительное направление x совпадает с направлением мгновенного импульса); u , v — составляющие скорости по направлениям x , y ; ψ — функция тока; ξ — вихрь; T — избыточная температура; t — время.

Для системы (1.1)–(1.3) имеют место законы сохранения импульса и теплосодержания при условии достаточно быстрого убывания вихря на бесконечности [6]

$$(1.4) \quad \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \xi y \, dx \, dy = I, \quad \iint_{-\infty}^{\infty} T \, dx \, dy = Q$$

Рассматриваемая задача является автомодельной [1]. Масштабы длины $L(t)$, скорости $V(t)$ и температуры $\theta(t)$ определяются с помощью следующих из (1.4) соотношений:

$$(1.5) \quad L^2 V = \chi_1 I, \quad L^2 \theta = \chi_2 Q$$

Полагая $V = \kappa dL/dt$, $L(t_0) = L_0$ и $t_0 = \kappa L_0^3 / 3\chi_1 I$, найдем

$$L = (3\chi_1 I t / \kappa)^{1/3}, \quad V = (\chi_1 I / \kappa)^{1/3} (3t)^{-2/3}, \quad \theta = (\kappa / 3\chi_1^2)^{2/3} \chi_2 Q (It)^{-2/3}$$

где κ, χ_1, χ_2 — произвольные постоянные.

Задание ненулевых начального момента t_0 и начального размера L_0 связано с применением метода установления при численном решении задачи.

Введем новые переменные

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{L}, & y' &= \frac{y}{L}, & u' &= \frac{u}{V}, & v' &= \frac{v}{V}, & \psi' &= \frac{\psi}{LV} \\ \zeta' &= \frac{\zeta L}{V}, & T' &= \frac{T}{\theta}, & v_t' &= \frac{v_t}{LV}, & a_t' &= \frac{a_t}{LV} \end{aligned}$$

Тогда система уравнений (1.1) — (1.3) для описания движения турбулентной вихревой пары и переноса ею тепла преобразуется к виду (штрих здесь и ниже опущен)

$$(1.6) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - 3\zeta + (\kappa u - x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + (\kappa v - y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \kappa v_t \nabla^2 \zeta, \quad \nabla^2 \psi = -\zeta$$

$$(1.7) \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} - 2T + (\kappa u - x) \frac{\partial T}{\partial x} + (\kappa v - y) \frac{\partial T}{\partial y} = \kappa a_t \nabla^2 T, \quad \tau = \frac{1}{3} \ln \left(\frac{t}{t_0} \right)$$

Граничные условия и условия нормировки для системы (1.6), (1.7) следующие:

$$(1.8) \quad \psi = \zeta = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (y=0), \quad \psi = \zeta = T = 0 \quad (x^2 + y^2 \rightarrow \infty)$$

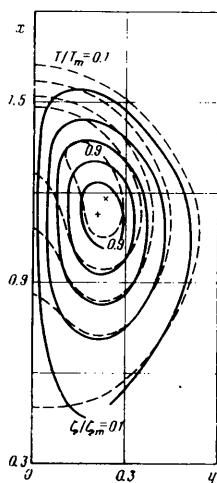
$$(1.9) \quad \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} y \zeta \, dx \, dy = \frac{1}{\chi_1} \iint_{-\infty}^{\infty} T \, dx \, dy = \frac{1}{\chi_2}$$

2. Краевая задача (1.6) — (1.9) из соображений симметрии решалась в полуплоскости xy . В качестве расчетной области выбирался прямоугольник $x_1 \leq x \leq x_2$, $0 \leq y \leq y_1$. Для грубой оценки размеров прямоугольника и сдвига его относительно начала координат предварительно рассматривалась модельная задача, дающая приближенное решение для краевой задачи (1.6) — (1.9) в окрестности некоторой характерной точки (x_0, y_0) , где предполагается $u(x_0, y_0) \gg v(x_0, y_0)$. Решение модельной задачи имеет следующий вид (ср. [1]):

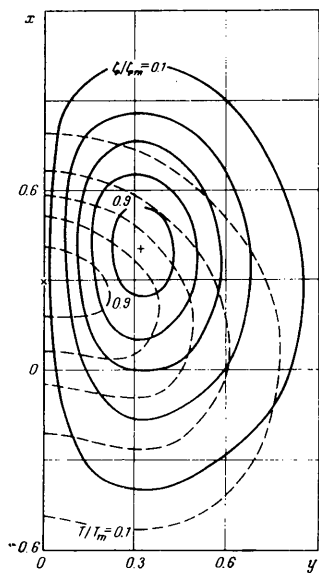
$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi_0 &= \frac{1}{\pi \chi_1} \left[1 - \exp \left(- \frac{(x-x_0)^2 + y^2}{2\kappa v_t} \right) \right] \frac{y}{(x-x_0)^2 + y^2} \\ \zeta &= \frac{1}{\pi v_t^2 \kappa^2 \chi_1} y \exp \left(- \frac{(x-x_0)^2 + y^2}{2\kappa v_t} \right), \\ T &= \frac{1}{2\pi a_t \kappa \chi_2} \exp \left(- \frac{(x-x_0)^2 + y^2}{2\kappa a_t} \right) \end{aligned}$$

где $x_0 = u(x_0, y_0)$. Отметим, что это решение удовлетворяет уравнениям (1.6), (1.7) при $u \ll x$, $v \ll y$.

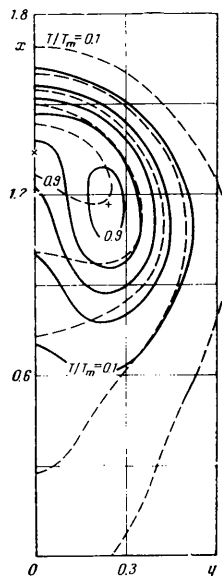
Для представляющих практический интерес значений ν_i порядка 10^{-1} — 10^{-2} экспоненциальные составляющие функции (2.1) достаточно быстро стремятся к нулю, и течение можно считать практически потенциальным уже на относительно небольшом расстоянии от точки (x_0, y_0) . Таким образом, если границы области счета находятся в области потенциального течения, распределения ψ , ξ и T на этих границах могут быть заданы согласно (2.1). Для ξ и T эти условия соответствуют снесению граничных условий из бесконечности на границы прямоугольника. Выполнен-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

ные расчеты также показали, что задание нулевых значений функции тока на границах прямоугольника не отразилось на характере полученного решения в активной зоне смещения (зоне существенно отличных от нуля значений $\xi(x, y)$). Поэтому в расчетах принималось $\psi = \xi = T = 0$ на внешних границах прямоугольника.

Определяя поперечную координату характерной точки как

$$y_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi y \, dx \, dy \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi \, dx \, dy \right]^{-1} = \left[\chi_1 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \xi \, dx \, dy \right]^{-1}$$

получим с помощью (2.1) примерную величину сдвига расчетной области относительно начала координат

$$(2.2) \quad x_0 = \frac{2}{\pi^2 \nu_i \chi_1} \left[e^{-\pi/4} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) - 1 \right]$$

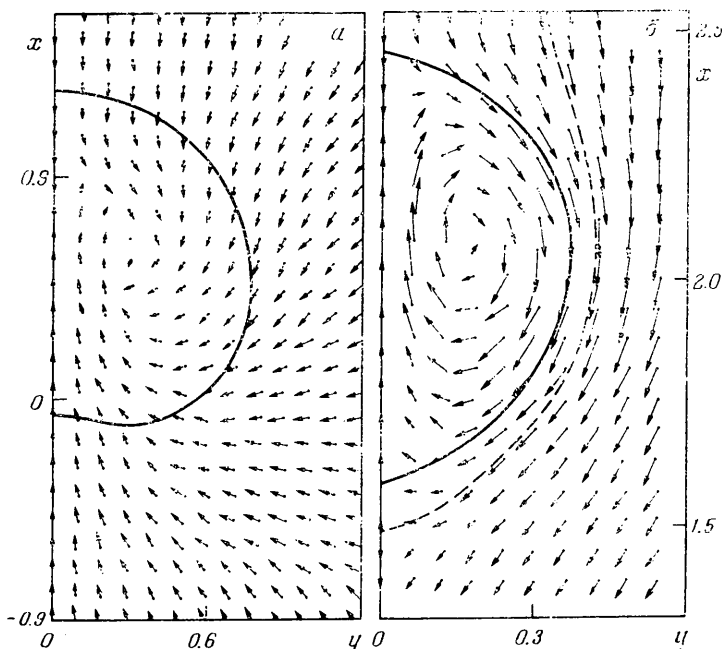
3. Уравнения (1.6), (1.7) решались с помощью явной конечно-разностной схемы, аппроксимирующей данные уравнения с первым порядком по времени и вторым — по пространственным переменным. Конвективные члены в уравнении (1.6) аппроксимировались специальным образом, что обеспечивало сохранение средней кинетической энергии при $\nu_i = 0$ и препятствовало фиктивному росту вихря [7]. Структура применявшейся схемы подробно описана в [8]. Количество итераций, необходимых для установления, удалось существенно сократить с помощью мультипликативной поправки для ψ , получаемой на каждом временном слое из условий (1.9).

Алгоритм решения задачи заключался в отыскании решения для системы уравнений (1.6) с последующим решением уравнения (1.7) при использовании значе-

ний ψ в узлах разностной сетки. Начальные распределения для ψ , T задавались согласно (2.1).

Расчеты проводились на квадратной разностной сетке с числом ячеек 42×21 и 61×14 для различных значений $\nu_i = 0.02 - 0.1$ и $Pr_i = \nu_i / a_i = 0.5 - 1.25$. При этом принималось $\kappa = \chi_1 = \chi_2 = 1$.

4. На фиг. 1 и 2 показаны распределения ξ , T соответственно при $\nu_i = 0.04$ и 0.1 , $Pr_i = 1$. Фиг. 3 иллюстрирует распределения T при $Pr_i = 0.5$ и 1.25 , $\nu_i = 0.04$. На фиг. 1—3 изолинии $\xi/\xi_m = \text{const}$, $T/T_m = \text{const}$ проведены с шагом 0.2. При уменьшении ν_i кроме естественного уменьшения площади



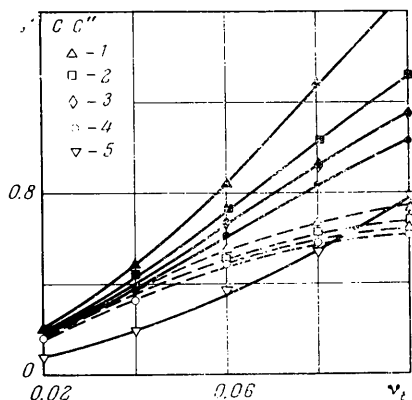
Фиг. 4

активной зоны турбулентного смешения наблюдается все большее отличие искомых распределений от симметричных распределений типа (2.1). Для распределения T это выражается в концентрации тепла в области вблизи максимума вихря, что при достаточно малых значениях ν_i приводит к образованию замкнутой периферийной зоны, где температура превышает ее максимальное значение на оси симметрии. Аналогичный эффект дает увеличение числа Pr_i . Изолинии ξ вытягиваются в сторону, противоположную направлению импульса вихревой пары. При $\nu_i = 0.02$ зона, где ξ имеет существенно отличные от нуля значения, в виде узкой полосы тянется вдоль оси симметрии вплоть до нижней границы области счета. Аналогичная картина наблюдается и для полей T .

Наглядное представление о характере взаимодействия вихревой пары с окружающим течением дают векторные поля относительной скорости $\mathbf{w} = \mathbf{w}(u, v) - \mathbf{r}(x, y)$ на фиг. 4, а, б (сплошная линия соответствует границе термически активной зоны по изотерме $T = 0.1T_m$ для $Pr_i = 1.0$). При $\nu_i = 0.1$ (см. фиг. 4, а) все линии тока относительного движения направлены внутрь термически активной зоны и скорость вовлечения в эту зону распределена сравнительно равномерно вдоль границы последней. Такая картина течения сохраняется в основном при $\nu_i > 0.04$. При этом с уменьшением ν_i увеличивается относительная доля вовлекаемой в активную зону

массы через фронтальную границу, в то время как через тыловую границу интенсивное вовлечение наблюдается лишь вблизи оси симметрии. В промежутке $0.02 < v_i < 0.04$ картина течения меняется. Появляется нулевая линия тока относительного движения (показана на фиг. 4, 6 пунктиром), разделяющая область течения на две. Перенос завихренности и тепла из внутренней области во внешнюю происходит только путем турбулентной диффузии. При этом за вихревой парой образуется подобие гидродинамического и теплового следов, что и объясняет полученные в расчетах особенности распределений ξ и T . Возможность образования гидродинамического следа подтверждается опытными данными по вихревым кольцам [9].

На фиг. 5 представлены в зависимости от v_i и Rg_i количественные характеристики расширения вихревой пары: $C = y_0/x_{mT}$, $C' = y_0/x_0$, $C'' = y_0/x_{\xi}$; x_0 , y_0 — наибольшие высота и ширина термически активной зоны по изотерме $T = 0.1T_m$; x_{mT} — высота точки, где температура имеет максимальное значение на оси симметрии; x_{ξ} , y_{ξ} — ордината и абсцисса точки, где $\xi = \xi_m$. Сплошные кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям $Rg_i = 0.5, 0.75, 1, 1.25$ для C , пунктирные кривые — тем же значениям Rg_i для C' , кривая 5 иллюстрирует изменение C'' .



Фиг. 5

Полученные в опытах с вихревыми парами [10] значения $C' = 0.17—0.38$, а также значения $C = 0.6—1.4$ в опытах со струей в поперечном потоке [11] укладываются в пределы значений соответствующих коэффициентов, полученных в численных расчетах. Это свидетельствует о том, что принятые в данной работе значения v_i действительно охватывают случаи, представляющие практический интерес.

В заключение авторы благодарят Г. И. Петрова, Л. А. Чудова и участников руководимого ими семинара за обсуждение работы.

Поступила 1 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Луговцов Б. А. О движении турбулентного вихревого кольца и переносе им пассивной примеси. В сб. «Некоторые проблемы математики и механики». Л., «Наука», 1970.
2. Пузычев В. В. Корректность плоского аналога задачи о движении турбулентного вихревого кольца. В сб. «Динамика сплошной среды», вып. 8. Новосибирск, 1971.
3. Шандоров Г. С. Истечение в сносящий поток из отверстий в стене канала и распространение струй в сносящем потоке. Тр. ЦИАМ, 1955, № 263.
4. Keffer J. F., Baines W. D. The round turbulent jet in a cross-wind. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt 4.
5. Scorer R. S. Natural aerodynamics. London, Pergamon Press., 1958.
6. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М., «Мир», 1973.
7. Phillips N. A. An example of non-linear computational instability. In: The atmosphere and the sea in motion. N. Y., Rockefeller Inst. Press., 1959.
8. Аракава А. Схема численного интегрирования уравнения движения жидкости на длительный срок: случай двумерного потока несжимаемой жидкости. В сб. «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Л., Гидрометеоиздат, 1968.
9. Maxworthy T. Turbulent vortex rings. J. Fluid Mech., 1974, vol. 64, pt 2.
10. Richards J. M. Puff motions in unstratified surroundings. J. Fluid Mech., 1965, vol. 21, pt 1.
11. Гендриксон В., Энштейн А. Экспериментальное исследование неизоэтермической струи в сносящем потоке. Изв. АН ЭССР, Физика, Математика, 1973, т. 22, № 3.