

ОБ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛНАХ ПРИ НАЛИЧИИ ПОВЕРХНОСТНОГО ТОКА

А. Б. ВАТАЖИН

(Москва)

Рассмотрена структура электрогазодинамических ударных волн при наличии поверхностного тока. Найдено, что для определения величины поверхностного тока недостаточно соотношений на ударной волне. Недостающие соотношения получены из рассмотрения газодинамической и диффузионной структуры ударной волны.

Общие соотношения на электрогазодинамических ударных волнах записаны в [1]. В работах [1, 2] отмечено, что число соотношений на волне S при поверхностном токе $i=0$ недостаточно для определения всех электрогазодинамических параметров за волной (в области 2) через параметры втекающего в волну газа (в области 1). Недостающее условие сформулировано в результате исследования структуры волны S (поскольку таковая существует) [2].

Покажем, что в случае волн S при $i \neq 0$ величина поверхностного тока также не определяется соотношениями на S и должна находиться из рассмотрения структуры волны.

Соотношения на волне S имеют вид [1]

$$(1) \quad \begin{aligned} \rho_1 v_{1n} &= \rho_2 v_{2n} = m, & m \{v_n\} + \{p\} - \frac{\epsilon}{8\pi} \{E_n^2\} &= 0 \\ m \{v_t\} &= \frac{\epsilon}{4\pi} E_t \{E_n\}, & m \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} \right\} &= E_t i \\ \{j_n\} &= -\operatorname{div} i, & \{E_t\} &= 0, & \{E_n\} &= \frac{4\pi}{\epsilon} 0 \end{aligned}$$

Здесь n — нормаль, направленная в сторону области 2, v_t и E_t — составляющие векторов скорости и электрического поля в касательной к разрыву плоскости, v_n , E_n и j_n — проекции векторов v , E и плотности электрического тока j на нормаль n , θ и i — поверхностные плотности электрического заряда и тока, ρ и p — плотность и давление газа, γ — отношение удельных теплоемкостей, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды.

Если параметры в области 1 заданы, то выражения (1) можно рассматривать как систему уравнений для определения v_{n2} , v_{t2} , p_2 , ρ_2 , E_{n2} , E_{t2} , j_{n2} , θ и i . Нетрудно видеть, что число уравнений на два меньше числа перечисленных параметров. Для получения двух недостающих соотношений в общем случае необходимо рассмотреть структуру волны S .

Рассмотрим структуру ударной волны при малом параметре электрогазодинамического взаимодействия. В этом случае распределения газодинамических параметров в структурной зоне определяются уравнениями обычной газовой динамики с учетом диссипативных процессов (вязкости, теплопроводности) и считаются известными [2]. Скорость газа v_n монотонно убывает от величины v_{n1} до значения $v_{n2} < v_{n1}$, а касательная скорость v_t остается неизменной. Ширина δ структурной газодинамической зоны по порядку величины равна v/u_* , где v и u_* — характерные кинематическая вязкость и нормальная скорость газа.

Пусть закон Ома в структурной области имеет следующий вид:

$$(2) \quad j = q(v + bE) - D \nabla q \quad (D, b = \text{const})$$

где b и D — подвижность и коэффициент диффузии заряженных частиц. В электрогазодинамических течениях электрическое число Пекле $Pe = v_* L / D$ (определенное по характерному размеру задачи L , например характерному расстоянию в касательной к ударной волне плоскости) намного больше единицы, и эффекты диффузии в областях вне ударных волн можно не учитывать. Однако в зоне ударной волны эффекты диффузии становятся существенными [2]. Ширина Δ электрической диффузионной зоны по порядку величины равна D/u_* . Ширина h электрогазодинамической ударной волны, таким образом, равна $\max(\delta, \Delta)$. При этом выполняются условия

$$Re = v_* L / \nu \gg 1, \quad Pe = v_* L / D \gg 1, \quad \delta = v / u_*, \quad \Delta = D / u_*$$

$$\delta / L = 1 / Re \ll 1, \quad \Delta / L = 1 / Pe \ll 1, \quad h / L \ll 1$$

Изменения электрических параметров в структурной зоне описываются уравнениями $\operatorname{div} E = 4\pi q / \epsilon$, $\operatorname{div} j = 0$ и законом Ома (2). В перпендикулярном к ударной

волне направлении происходит сильное изменение нормальной составляющей электрического поля и электрический заряд q становится большой величиной

$$(3) \quad q = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E_n}{\partial n} + a, \quad a = \frac{\varepsilon}{4\pi} \left(\frac{\partial E_\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial E_\chi}{\partial \chi} \right)$$

Здесь τ, χ, n — ортогональная система координат с центром в рассматриваемой точке внутри ударной волны, характерные размеры по оси n и по осям τ, χ соответственно равны h и L , a — ограниченная величина. Из-за неограниченности величины q возникает поверхностный заряд и поверхностный ток (величина j ; неограниченная). Нормальный же ток j_n , который определяется условиями течения вне ударной волны, является ограниченной величиной.

Подставляя (3) в уравнение (2) и оставляя в последнем главные члены, получим

$$(4) \quad j_t = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial E_n}{\partial n} (v_t + bE_t)$$

$$(5) \quad 0 = \frac{\partial E_n}{\partial n} (v_n + bE_n) - D \frac{\partial^2 E_n}{\partial n^2}$$

$$\theta = \frac{\varepsilon}{4\pi} (E_{n2} - E_{n1})$$

Интегрирование уравнения (4) по ширине ударной волны с учетом условий $\partial E_t / \partial n = 0$, $\partial v_t / \partial n = 0$ позволяет выразить поверхностный ток i через поверхностный заряд θ

$$(6) \quad i = \theta (v_t + bE_t)$$

Уравнение (5) можно представить в виде

$$(7) \quad \frac{\partial E}{\partial x} (u + E) - K \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = 0$$

$$K = \frac{D}{hu_*}, \quad \frac{n}{h} = x, \quad E_n = \frac{u_*}{b} E(x; \tau, \chi), \quad v_n = u_* n$$

Здесь $u = u(x, \tau, \chi)$ — заданная функция, определяемая вязкой (газодинамической) структурой ударной волны, безразмерный параметр $K=0$ при отсутствии диффузии (в этом случае $h=\delta$) и является величиной порядка единицы при $D \gg \nu$ (в этом случае $h=\Delta$, а профиль скорости в первом приближении аппроксимируется разрывной функцией).

Если существует структура волны, то величина E при $x \rightarrow -\infty$ должна стремиться к значению E_1 , а при $x \rightarrow +\infty$ асимптотически выходить на некоторое значение E_2 . Решение уравнения (7), таким образом, должно обладать свойством, что $(\partial E / \partial x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Покажем, что требование существования структуры волны позволяет определить величину E_2 .

Проинтегрировав по x выражение (7), получим

$$(8) \quad \frac{\partial E}{\partial x} = \text{const} \exp \left[\frac{1}{K} \int_0^x (u + E) dx \right]$$

При $x \rightarrow \pm\infty$ величина E равна своим значениям, соответствующим бездиффузионному решению, для которого $j = q(v + bE)$. Для определенности будем считать, что $q > 0$, $v_{n1} > 0$, $j_{n1} > 0$. Если исключить ситуацию, когда электрический ток подтекает к ударной волне не только из области 1, но и из области 2, то $j_{n2} > 0$.

Учитывая эти замечания, имеем неравенство $u_1 + E_1 > 0$, и выражение (8) удовлетворяет условию $(\partial E / \partial x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$.

Величина $u_2 + E_2 = \kappa(\tau, \chi)$ должна быть неотрицательной. Согласно (8), условию $(\partial E / \partial x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ в случае $x > 0$ удовлетворить невозможно. Поэтому

$$(9) \quad \kappa = 0, \quad E_{n2} = -v_{n2}/b$$

Кроме того, необходимо, чтобы интеграл в правой части выражения (8) при $x \rightarrow \infty$ стремился к отрицательной величине. Поэтому сумма $u + E$ в структурной зоне при больших x должна быть отрицательной величиной.

Рассмотрим два предельных случая. Пусть диффузия отсутствует ($K=0$). Из (7) находим

$$(10) \quad \frac{\partial E}{\partial x} (u+E) = 0$$

Согласно (10), решение на одном из участков имеет вид $E=E_1=\text{const}$, на другом $E=-u$. Склеивание решений производится в точке $x=x_*$, где $u(x_*)+E_1=0$. Таким образом, ударные волны с поверхностным зарядом образуются при условиях $E_1<0$, $u_2+E_1<0$. Нормальная составляющая электрического поля определяется условием (9). Этот случай подробно исследован в [2].

Пусть $D \gg v$. Тогда, как указывалось выше, можно считать, что $u=u_1$ при $x<0$, $u=u_2$ при $x>0$, $K=1$. Решения уравнения (7) находятся в областях $x<0$ и $x>0$ и склеиваются в сечении $x=0$, исходя из условий непрерывности величин E и $\partial E/\partial x$. В результате получаем

$$(11) \quad \begin{aligned} x<0: \quad E &= \alpha \frac{B \exp(\alpha x) + 1}{1 - B \exp(\alpha x)} - u_1 \\ x>0: \quad E &= - \left(\frac{1}{2} x + A \right)^{-1} - u_2 \\ \alpha &= u_1 + E_1 \end{aligned}$$

$$(12) \quad \frac{1}{A^2} = \alpha^2 (Y^2 - 1), \quad u_1 - \alpha Y = \frac{1}{A} + u_2, \quad Y = \frac{1+B}{1-B}$$

Условия (12) служат для определения постоянных A и B .

Итак, в общем случае два недостающих соотношения на ударной волне имеют вид (6) и (9).

Поступила 29 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.

Технический редактор Н. С. Евсеева