

5. Сковорцов В. В., Носачев Л. В. Исследование структуры следа за сферическими моделями в потоке разреженной плазмы. Космические исследования, 1968, т. 6, вып. 2.
6. Сапожников Г. И., Сковорцов В. В. Исследование возмущенной зоны за сферой в потоке плазмы. Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1311.
7. Воронцов В. А., Груднистый В. В., Камеко В. Ф., Кошеленко В. В., Резниченко Ю. Т., Яскевич Э. П. Устройство для определения координат контура аэродинамической тени на телах сложной формы в свободномолекулярном потоке. Авт. свид. СССР № 351113, Кл. G 01 m 9/00, заявл. 20.IV.1970, Опубл. 13.IX.1972.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.
9. Баринов И. С., Жестков Б. Е., Омелик А. И., Орлова З. Т. Аэродинамическая установка со свободномолекулярным потоком и высокой температурой торможения. Теплофизика высоких температур, 1973, т. 11, № 3.
10. Омелик А. И. Экспериментальное определение скоростного отношения в свободномолекулярном потоке азота. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
11. Семенов Б. И. Балансно-компенсационный метод измерения молекулярных потоков. Приборы и техника эксперимента, 1969, № 1.
12. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.

УДК 533.697.4

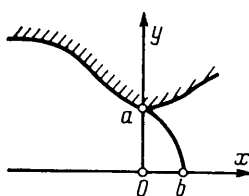
ОБ УДЕЛЬНОМ ИМПУЛЬСЕ ПОТОКА В МИНИМАЛЬНОМ СЕЧЕНИИ СОПЛА ЛАВАЛЯ И В ВЫХОДНОМ СЕЧЕНИИ СУЖАЮЩЕГОСЯ СОПЛА

А. Н. КРАЙКО, В. Е. СОКОЛОВ

(Москва)

Рассматривается вопрос о влиянии неравномерности параметров, вызванной двумерным характером течения, на величину удельного импульса потока в минимальном сечении сопла Лавали и в выходном сечении сужающегося сопла на сверхкритических режимах. Показано, что в приближении идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа соответствующая величина при непрерывном течении всегда превышает значение, вычисленное по одномерной теории для того же сопла и тех же параметров торможения газа.

1. Рассмотрим течение невязкого и нетеплопроводного газа в сужающемся – расширяющемся осесимметричном или плоском сопле Лавали на сверхкритических режимах, т. е. на режимах с переходом всего потока через скорость звука в окрестности минимального сечения сопла.



Фиг. 1

Пусть x и y – оси цилиндрической (в осесимметричном случае) или декартовой (в плоском) системы координат, причем ось x совмещена с осью (или плоскостью) симметрии сопла, как это показано на фиг. 1. Пусть, далее, p – давление, ρ – плотность, c – скорость звука, u и v – проекции вектора скорости газа $\mathbf{w}$ на оси x и y , а w – модуль $\mathbf{w}$. Поток на входе в сопло предполагается изопергетическим и изэнтропическим. Все переменные считаются безразмерными, причем в качестве масштабов скорости, плотности и давления берутся критические скорость и плотность потока c_* и ρ_* и произведение $\rho_* c_*^2$, а в качестве линейного масштаба – радиус (или полувысота) минимального сечения сопла. Напомним, что в данном случае все термодинамические переменные, в частности p , ρ и c – известные функции модуля скорости w .

Важными интегральными параметрами сопла являются массовый расход газа G в единицу времени, а также проекция на ось x потока импульса I и удельного импульса $i = I/G$ в минимальном сечении. Все эти величины зависят от формы сопла и определяются либо в процессе решения достаточно трудоемкой прямой задачи теории сопла Лавали, либо экспериментально, причем к точности расчета и эксперимента предъявляются весьма высокие требования. Последнее объясняется, в частности, тем, что указанные величины близки к значениям G_0 , I_0 и i_0 , определяемым для того же сопла из одномерного приближения. Поэтому двумерный расчет или эксперимент имеют смысл лишь при достаточно аккуратном определении соответствующих разностей (или отношений). Что касается одномерного («гидравлического») расчета, то он не представляет большого труда, поскольку в этом приближении в минимальном сечении сопла поток равномерен, параллелен оси x , а его параметры равны критическим, т. е. $v=0$, $\rho=u=w=1$ и $p=p_* \equiv p(1)$. Заметим, что для совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей κ при принятом способе безразмеривания $p_* = 1/\kappa$.

Известно, что неравномерность изоэнергетического и изоэнтропического потока в минимальном сечении сопла, обусловленная двумерностью течения, всегда ведет к уменьшению расхода G по сравнению с G_0 , т. е. к неравенству $G < G_0$. Последнее легко понять, если учесть, что плотность тока

$$\rho u \equiv \rho w \cdot (u/w)$$

где $\rho = \rho(w)$, а $u/w \leq 1$, достигает максимума при $u = w = 1$. Не останавливаясь на детальном обсуждении неравенства $I < I_0$, отметим, что оно считается общепринятым и не противоречит имеющимся в распоряжении авторов данным и известным им качественным соображениям. Выполнение указанных выше неравенств для G и I , по-видимому, явилось причиной весьма широко распространенного мнения, что такое же неравенство должно иметь место и для удельного импульса. Дальнейший анализ посвящен доказательству ошибочности подобной точки зрения, вернее, того, что в рамках идеального газа всегда выполняется противоположное неравенство $i > i_0$ и, следовательно, двумерность течения, уменьшая расход, увеличивает удельный импульс потока в минимальном сечении сопла (подчеркнем, что речь идет только о режимах запирания)

2. Докажем сформулированное в п. 1 утверждение. В согласии с определением G , I и i с точностью до несущественного множителя имеем

$$(2.1) \quad G = \int_0^a y^v \rho u \, dy, \quad i = \frac{I}{G} = \frac{1}{G} \int_0^a y^v (p + \rho u^2) \, dy$$

Здесь $v=0$ и 1 в плоском и в осесимметричном случаях соответственно, а интегралы берутся по отрезку oa оси y , совмещенной с плоскостью минимального сечения сопла.

Для любого замкнутого контура в плоскости течения в согласии с интегральным законом сохранения x -компоненты количества движения

$$\oint p y^v \, dy + \oint y^v \rho u (u \, dy - v \, dx) = 0$$

В силу этого формулу для i из (2.1) можно заменить на

$$(2.2) \quad i = \int_{\Gamma} \frac{p y^v}{G} \, dy + \int_{\Gamma} \frac{y^v \rho u}{G} (u \, dy - v \, dx)$$

где Γ — любая кривая, соединяющая точку a с произвольной точкой на оси x .

Пусть ψ — функция тока, которую введем дифференциальным равенством

$$d\psi = G^{-1} y^v \rho (u \, dy - v \, dx)$$

и условием: $\psi=0$ на оси симметрии. В соответствии с определением на стенке сопла $\psi=1$.

Переходя в (2.2) от x и y к x и ψ , получим

$$(2.3) \quad i = \int_{\Gamma} \left(\frac{p}{\rho u} + u \right) d\psi + \frac{p y^v v}{G u} \, dx$$

Так как в сужающейся части сопла v неположительно, а в расширяющейся — неотрицательно, то при непрерывном течении всегда существует линия $v=0$, которая соединяет точку b оси x с точкой a контура сопла. Используя ab в качестве Γ в (2.3) и записывая аналогичную формулу для i_0 , получающуюся из (2.3) при $\Gamma=oa$, где в одномерном приближении $u=w=1$, придем к соотношению

$$(2.4) \quad i = i_0 = \int_0^1 [z(w) - z(1)] d\psi, \quad z(w) = \frac{p}{\rho w^4} + w$$

Здесь $z(w)$ под знаком интеграла вычисляется на линии ab . Нетрудно показать, что

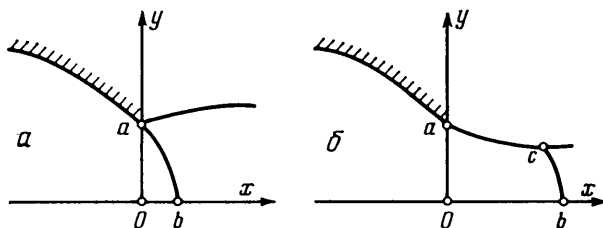
$$dz/dw = p(M^2 - 1)/\rho w^2 \quad (M = w/c)$$

Отсюда следует, что для произвольного газа единственный минимум функции $z(w)$ имеет место при $w=1$, т. е. что $z(w) - z(1) > 0$ при $w \neq 1$. Для совершенного газа, для которого $z(w) \sim w^{-1} + w$, это утверждение хорошо известно.

Если линия $v=0$ не совпадает с oa , что, как известно, может быть только при плоской звуковой поверхности, то на ab $w \neq 1$. Поэтому в согласии с (2.4) имеем $i > i_0$.

3. Рассмотрим теперь режим сверхкритического истечения из сужающегося сопла в покоящуюся среду с давлением $p_e < p_*$. Так как сопло сужается, то на его стенке слева от точки a вертикальная компонента скорости $v \leq 0$. Если струя, истекающая из сопла, расширяется (фиг. 2, а), что всегда имеет место при достаточно малых p_e , то на границе струи справа от кромки сопла v положительно. Поэтому при непрерывном течении в некоторой окрестности среза в этом случае, как и для сопла Лавала, имеется линия ab , на которой $v=0$. Дальнейшее доказательство опирается на использование формулы (2.4) и не отличается от приведенного выше.

Пусть теперь струя газа, вытекая из сопла, продолжает сужаться, как показано на фиг. 2, б. Здесь линия bc , на которой $v=0$, не приходит на кромку сопла. В ка-



Фиг. 2

честве кривой Γ в (2.3) в этом случае возьмем ломаную, состоящую из линии bc и отрезка ac границы струи. На этом отрезке $p=p_e$, $d\psi=0$, а $(v/u)dx=dy$. В соответствии с этим из (2.3) получим

$$(3.1) \quad i - i_0 = \int_0^1 [z(w) - z(1)] d\psi + \frac{p_e}{G(1+\nu)} (y_a^{1+\nu} - y_c^{1+\nu})$$

где $z(w)$ под знаком интеграла вычисляется на bc .

Нетрудно видеть, что при $p_e < p_*$ оба слагаемых в правой части (3.1) положительны. Действительно, положительность первого доказывается так же, как и ранее, а положительность второго следует из неравенства $y_a > y_c$. Справедливость последнего очевидна, так как c — ближайшая к срезу сопла точка границы, в которой $v=0$, а слева от нее v на границе струи отрицательна.

Заканчивая изложение, остановимся на двух моментах. Во-первых, отметим, что справедливость выполненного выше анализа ограничена случаями непрерывного течения слева от линии ab или bc . Скачки уплотнения, если они есть, не только вызывают возрастание энтропии, в силу которого функция z перестает быть функцией только w , но могут привести, например, к тому, что линия $v=0$, начинающаяся в точке a , не будет приходить на ось сопла. Во-вторых, подчеркнем, что из неравенства $i > i_0$ для сужающегося сопла не вытекает с необходимостью такое же неравенство для удельных тяг r и r_0 , поскольку $r = i - p_e / (1+\nu)G$, а $r_0 = i_0 - p_e / (1+\nu)G_0$, причем, как уже указывалось, $G_0 > G$.

В заключение отметим, что непосредственной причиной, побудившей авторов предпринять данное исследование, явились результаты Е. Я. Черняк, которая проводила решение прямой задачи теории сопла Лавала с использованием некоторой модификации метода, первоначально предложенного в [1, 2]. В. Л. Зимонт, анализируя эти результаты, обратил внимание на то, что неравенство $i > i_0$ выполнялось во всех рассчитанных примерах. Авторы благодарят указанных товарищей, а также У. Г. Пирумова и А. А. Сергиенко, сообщивших им дополнительную информацию по рассмотренному вопросу.

Поступила 20 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
2. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Расчет смешанного течения газа в соплах. Тр. Секции по числ. методам в газ. динамике 2-го Междунар. colloквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем, 1969, т. 2, М., ВЦ АН СССР, 1971, стр. 3–26.