

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРЕМ СРАВНЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

И. М. АМЕТОВ, А. Х. МИРЗАДЖАНЗАДЕ

(Уфа, Москва)

В теории фильтрации часто возникает необходимость оценить ту или иную модель, не решая уравнения, что особенно важно в тех случаях, когда эти уравнения не имеют точных решений, а точность применяемых приближенных методов не адекватна точности модели. В этих случаях представляет определенный интерес оценка решения «сверху» и «снизу». При удачной оценке это эффективный способ определения точности тех или иных приближенных методов, а также исходных моделей. В этом направлении весьма перспективным является применение теорем сравнения для уравнений параболического типа, приведенных в [1]. Эти теоремы применялись для задач теории фильтрации и ранее [2, 3]. Область применения теорем сравнения может быть значительно расширена как за счет новых задач, так и в случаях обобщения этих теорем.

В данной заметке приводятся некоторые обобщения теорем сравнения для задач с подвижными границами, встречающихся в теории фильтрации. Основная идея предлагаемого метода заключается в следующем. Решение ищется в виде многочлена по пространственной переменной. (Для простоты рассматривается одномерный случай.) Неизвестные коэффициенты в разложении решения находятся из граничных и начальных значений, а также из условия знакоопределенности оператора задачи. Таким образом строятся «верхнее» и «нижнее» решения, которые и дают решение исходной задачи с определенной погрешностью.

В работе применение этого метода показано на двух примерах.

1. Вытеснение газа водой. Как показано в многочисленных работах, давление в газовой зоне можно принять постоянным с большой степенью точности. В этом случае задачу вытеснения газа водой в одномерном варианте можно сформулировать следующим образом:

$$Lp = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < X < l(t), \quad t > 0, \quad l(0) = 0$$

$$p(0, t) = 1, \quad p(l(t), t) = 0, \quad -\alpha \frac{\partial p(l(t), t)}{\partial X} = \frac{dl(t)}{dt}, \quad \alpha > 0$$

Обоснование применения теорем сравнения для задач подобного типа дано в [4]. Оценками решения этой задачи являются функции $p_i(x, t)$ ($i=1, 2$), такие, что

$$(1.1) \quad Lp_1 \leq 0, \quad Lp_2 \geq 0$$

$$(1.2) \quad p_1(0, t) = 1, \quad p_1(l_1(t), t) = 0, \quad -\alpha \frac{\partial p_1(l_1(t), t)}{\partial X} = \frac{dl_1(t)}{dt}, \quad l_1(0) = 0$$

В этих условиях согласно [4] имеем

$$p_2(X, t) \geq p(X, t) \geq p_1(X, t), \quad t > 0, \quad 0 < X < l_i(t), \quad l_2(t) \geq l_1(t)$$

Положим, что функции $p_i(X, t)$ имеют вид

$$p_i(X, t) = a_i + b_i \frac{X}{l_i(t)} + C_i \left[\frac{X}{l_i(t)} \right]^n, \quad n > 1 \quad (i=1, 2)$$

Согласно (1.2) имеем

$$p_i(X, t) = 1 - \frac{1+C_i}{l_i(t)} X + C_i \left[\frac{X}{l_i(t)} \right]^n, \quad l_i(t) = \beta_i \sqrt{t}$$

$$\beta_i = \sqrt{2\alpha(1+c_i-nc_i)}, \quad i=1, 2$$

Подставляя найденные выражения для $p_i(X, t)$, $l_i(t)$ в (1.1), получаем

$$Lp_i = \frac{y_i}{2t} \left[1 + C_i - nC_i y_i^{n-1} \frac{n(n-1)C_i y_i^{n-3}}{\alpha(1+C_i-nc_i)} \right] \quad 0 \leq y_i \leq X l_i^{-1}(t)$$

$$L(p_1) \leq 0, \quad L(p_2) \geq 0$$

Необходимо подобрать значения C_1, C_2 так, чтобы неравенства (1.3) выполнялись при $0 \leq y_i \leq 1$. Кроме того, коэффициенты β_i должны быть действительными числами. Это приводит к условию $1 + C_i > nC_i$.

Для случаев $n=2, 3, 4$ и $\alpha=1$ возможные значения коэффициентов C_i, β_i легко вычисляются. Отметим, что решение, полученное методом последовательной смены стационарных состояний (случай $C_i=0$), является завышенным по сравнению с точным решением задачи.

Точность полученных оценок можно оценить, подсчитав следующие отношения:

$$\delta(t) = \frac{l_2(t)}{l_1(t)}, \quad \gamma(t) = \frac{\partial p_2(0, t)}{\partial X} \left[\frac{\partial p_1(0, t)}{\partial X} \right]^{-1}$$

В результате расчетов получены следующие значения: при $n=2$ $\delta=1.17, \gamma=0.67$; при $n=3$ $\delta=1.05, \gamma=0.94$; при $n=4$ $\delta=1.43, \gamma=0.61$.

Как видно, наилучшие оценки получаются при $n=3$.

2. Неустановившаяся фильтрация вязкопластической жидкости. Предварительно докажем следующую теорему.

Пусть функции $v(X, t), u(X, t)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial X^2}, \quad 0 < X < l(t); \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2}, \quad 0 < X < S(t), \quad t > 0$$

$$v(l(t), t) = u(S(t), t) = 0, \quad \frac{\partial v(l(t), t)}{\partial X} = \frac{\partial u(S(t), t)}{\partial X} = \text{const} < 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial v}{\partial X} < 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial X} < 0$$

$$u(0, t) < v(0, t), \quad u(X, 0) < v(X, 0), \quad l(0) > S(0)$$

и обладают требуемой гладкостью и пусть известно, что $l(t), S(t)$ — строго возрастающие функции. Тогда имеют место неравенства

$$l(t) > S(t), \quad v(X, t) > u(X, t), \quad t > 0, \quad 0 < X < S(t)$$

Доказательство. Предположим противное, т. е. что при некотором $t=t_0$ будет $l(t_0) = S(t_0)$.

Запишем тождества

$$\frac{dv(l(t), t)}{dt} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial X} \frac{dl}{dt} \right)_{X=l(t)} = 0,$$

$$\frac{du(S(t), t)}{dt} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial X} \frac{dS}{dt} \right)_{X=S(t)} = 0$$

так как $dS(t_0)/dt \geq dl(t_0)/dt$, то получаем $\partial v(l(t_0), t_0)/\partial t \leq \partial u(S(t_0), t_0)/\partial t$.

С другой стороны, на основании теоремы сравнения [3] имеем, что при $0 \leq t \leq t_0$, $0 < X < S(t)$, $u(X, t) < v(X, t)$.

Поэтому

$$\left. \frac{\partial^2 v}{\partial X^2} \right|_{X=l(t_0), t=t_0} \geq \left. \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right|_{X=S(t_0), t=t_0}$$

Учитывая условия теоремы, приходим к противоречию.

Отметим, что путем предельного перехода можно заменить строгие неравенства в условии теоремы на нестрогие. Доказательство этого факта аналогично проведенному в [4].

Рассмотрим теперь метод построения оценок решения задачи о нестационарной фильтрации вязкопластической жидкости. Задача формулируется следующим образом:

$$(2.1) \quad Lp = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial^2 p}{\partial X^2} = 0, \quad 0 < X < l(t), \quad t > 0, \quad l(0) = 0$$

$$p(0, t) = 1, \quad p(l(t), t) = 0, \quad \frac{\partial p(l(t), t)}{\partial X} = -g = \text{const} < 0$$

Задаемся распределением давления в виде

$$p(X, t) = a_0 + a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 \quad (y = X/l(t))$$

Такой вид распределения давления выбран по следующим соображениям. Член $\sim X$ необходим для того, чтобы $\partial p(0, t)/\partial X \neq 0$. Отсутствие члена $\sim X^2$ связано с не-

обходимостью, чтобы $\partial^2 p(0, t)/\partial X^2 = 0$, так как $\partial p(0, t)/\partial t = 0$. Кроме того, при последующем анализе оказывается удобным, чтобы показатели степени при переменной y составляли арифметическую прогрессию. Этим объясняется отсутствие члена $\sim y^4$.

Так как граничных условий три, то один из коэффициентов оказывается неопределенным. Варьирование этого коэффициента позволяет повышать точность получаемых оценок.

Построим вначале верхнюю оценку решения исходной задачи. Положим $a_5 = -a$, где $a = \text{const} > 0$. Удовлетворяя граничным условиям (2.1), получаем

$$p(X, t) = 1 - \frac{3+2a-gl}{2} y + \frac{1+4a-gl}{2} y^3 - ay^5$$

Вычислим оператор Lp . Имеем

$$(2.2) \quad \begin{aligned} Lp &= \frac{y}{l^2} f(y) \left[l \frac{dl}{dt} - \varphi(y) \right] \\ f(y) &= \frac{3+2a}{2} - \left(3 \frac{1+4a}{2} - gl \right) y^2 + 5ay^4, \quad \varphi(y) = (3+12a-3gl-20ay^2) f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при $0 \leq a \leq 0.375$ функция $f(y) \geq 0$ при $0 \leq y \leq 1$. Следовательно, знак оператора Lp совпадает со знаком выражения в квадратных скобках (2.2). Имеем далее

$$Lp \geq \frac{y}{l^2} f(y) \left[l \frac{dl}{dt} - \max_{0 \leq y \leq 1} \varphi(y) \right]$$

Поэтому для выполнения условия $Lp \geq 0$ достаточно, чтобы имело место уравнение

$$(2.3) \quad l \frac{dl}{dt} = \max_{0 \leq y \leq 1} \varphi(y)$$

Найдя максимальное значение функции $\varphi(y)$, минимизируем его по параметру a , определяя тем самым наилучшую в данных условиях оценку сверху для подвижной границы. Однако этот путь приводит к громоздким вычислениям. Поступим следующим образом. Определим условия, при которых $d\varphi/dy \leq 0$ при $0 \leq y \leq 1$.

Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$(2.4) \quad y_1 \geq 1, \quad y_2 \leq 0, \quad \frac{d\varphi(y_i)}{dy} = 0$$

Второе из этих неравенств дает $3/2(1+4a-gl)(1+4a) < 10a(3+2a)$. Учитывая, что $0 \leq gl \leq 1$, приходим к условию $3-36a+8a^2 \leq 0$. Следовательно, величина параметра a должна быть заключена в пределах $0.085 \leq a \leq 4.415$. Учитывая ранее полученное ограничение $0 < a < 0.375$, получаем $0.375 > a > 0.085$. Так как $3+2a-3gl > 0$, то при выбранных значениях параметра a первое неравенство (2.4) также выполняется.

Итак, получаем

$$\max_{0 \leq y \leq 1} \varphi(y) = \varphi(0) = 6(1+4a-gl)(3+2a)^{-1}$$

Соответственно, для верхней оценки $l_+(t)$ подвижной границы получаем уравнение

$$(2.5) \quad l_+ \frac{dl_+}{dt} = 6(1+4a-gl_+)(3+2a)^{-1}$$

Легко проверить, что чем меньше величина a , тем точнее оценка $l_+(t)$. Следовательно, выбираем $a = 0.087$.

Для построения нижней оценки решения положим $a_5 = b = \text{const} > 0$.

Распределение давления имеет вид

$$p(X, t) = 1 - \frac{3-2b-gl}{2} y + \frac{1-4b-gl}{2} y^3 + by^5$$

Легко проверить, что при $0 \leq y \leq 1$, $f_1(y) > 0$ при $b < 0.25$. Учитывая это, а также неравенство

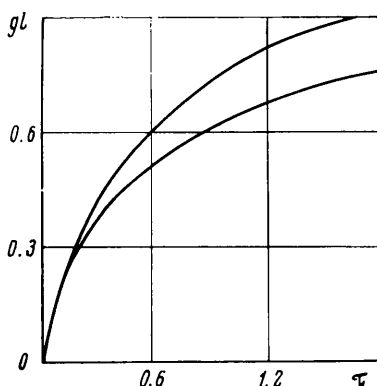
$$Lp \leq \frac{y}{l^2} f_1(y) \left[l \frac{dl}{dt} - \min_{0 \leq y \leq 1} \varphi_1(y) \right]$$

$$f_1(y) = \frac{3-2b}{2} - \left(3 \frac{1-4b}{2} - gl \right) y^2 - 5by^4, \quad \varphi_1(y) = (3-12b-3gl+20by)f_1^{-1}(y)$$

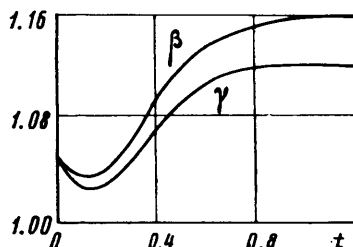
получаем, что подвижная граница для нижнего решения удовлетворяет уравнению

$$l_- \frac{dl}{dt} = \min_{0 \leq y \leq 1} \varphi_1(y)$$

Знак производной $d\varphi_1/dy$ совпадает со знаком выражения $\psi = 52b^2 - 6b + 4.5 + 30bgl - 7.5gl + 3g^2l^2$.



Фиг. 1



Фиг. 2

При $b \leq 0.05$ имеем $d\varphi/d(lg) < 0$. Следовательно, $\psi > 52b^2 + 24b > 0$. Поэтому $\min_{0 \leq y \leq 1} \varphi_1(y) = \varphi_1(0) = 6(1-4b-gl)(3-2b)^{-1}$.

Для подвижной границы нижнего решения получаем уравнение

$$(2.6) \quad l_- \frac{dl_-}{dt} = 6(1-4b-gl)(3-2b)^{-1}$$

Очевидно, чем меньше значение b , тем точнее нижняя оценка $l_-(t)$. Поэтому полагаем $b=0$.

Решения уравнений (2.5) и (2.6) с учетом начального условия (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} -l_+ \frac{3+2a}{g} - \frac{1+4a}{g^2} (3+2a) \ln \left(1 - \frac{gl_+}{1+4a} \right) &= t \\ -l_- \frac{3-2b}{g} - \frac{1-4b}{g^2} (3-2b) \ln \left(1 - \frac{gl_-}{1-4b} \right) &= t \end{aligned}$$

Графики функций $gl_+(\tau)$ (1), $gl_-(\tau)$ (2), где $\tau = tg^2$ приведены на фиг. 1. Как видно, максимальная погрешность в определении подвижной границы составляет 17%.

Производная $\partial p(0, t)/\partial X$ оценивается следующим образом:

$$(2.7) \quad \frac{3+2a-gl_+(t)}{2l_+(t)} \leq \frac{\partial p(0, t)}{\partial X} \leq \frac{3-2b-gl_-(t)}{2l_-(t)}$$

Для расхода жидкости q при $X=0$ имеем оценки

$$(2.8) \quad \frac{3+2a+gl_+(t)}{2l_+(t)} \leq q \leq \frac{3-2b+gl_-(t)}{2l_-(t)}$$

Точность оценок (2.7) определяется функцией

$$\beta(t) = [3 - 2b - gl_-(t)][3 + 2a + gl_+(t)]^{-1} l_+(t) l_-^{-1}(t)$$

точность оценок (2.8) — функцией

$$\gamma(t) = [3 - 2b - gl_-(t)][3 + 2a + gl_+(t)]^{-1} l_+(t) l_-^{-1}(t)$$

Графики функций $\beta(t)$, $\gamma(t)$ приведены на фиг. 2.

Как видно из приведенных графиков, максимальная погрешность в определении производной при $X=0$ составляет $\approx 17\%$, точность в определении расхода $\approx 10\%$.

Увеличивая степень многочлена, аппроксимирующего решение, можно повысить точность получаемых оценок, но при этом сильно усложняются вычисления.

Авторы благодарят О. П. Давыдова за помощь при проведении вычислений.

Поступила 18 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968.
2. Пирвердян А. М. Об одном способе оценок приближенных решений уравнения нестационарной фильтрации жидкости и газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
3. Ентов В. М. Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1.
4. Даниэлян Ю. С., Аметов И. М. Об оценках решений задач Стефана. Изв. вузов, Нефть и газ, 1973, № 4.

УДК 533.6.011

СВЕРХЗВУКОВОЕ НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ПРИ БЫСТРОМ ТОРМОЖЕНИИ

Л. И. ТУРЧАК

(Москва)

При медленном торможении тела, когда его скорость за конечное время меняется мало, картина течения соответствует стационарному обтеканию при локальном значении скорости движения тела. В этом случае используется квазистационарный подход.

Данная статья посвящена анализу течений при быстром торможении тел в идеальном газе. Для численного решения системы нелинейных нестационарных уравнений газовой динамики использован сеточно-характеристический (СХ) метод [1], разработанный под руководством О. М. Белоцерковского. При составлении программы на ЭВМ за основу принята программа А. С. Холодова.

Расчеты проведены для полусферы и цилиндрического торца при их осесимметричном торможении от чисел Маха $M_0=10$ и 20 до $M_1=4, 2, 1$.

Анализ результатов показывает, что в случае быстрого торможения тела при сверхзвуковой скорости головная ударная волна может отходить от него на значительное расстояние, возвращаясь после установления стационарной картины обтекания к своему положению при $M=M_1$. Время установления зависит от соотношения значений начальной, до торможения, и конечной, после торможения, скоростей движения тела и его формы и практически не зависит от времени торможения.

Исследован переходный процесс для случая, когда движущееся с гиперзвуковой скоростью тело тормозится до звуковой скорости. При этом интенсивность ударной волны после окончания торможения остается существенной на значительном расстоянии от тела; она зависит от начальной скорости тела и времени торможения. С помощью рассмотренного здесь подхода можно моделировать некоторые явления связанные с движением метеорных тел в атмосфере.

Использование СХ метода позволяет существенно расширить диапазон изменения скоростей и времени торможения по сравнению с [2], а также исследовать неустановившиеся течения около тел сложной формы.

1. Постановка задачи и метод решения. Осесимметричное тело радиуса миделева сечения R движется со сверхзвуковой скоростью V_0 под нулевым углом атаки в идеальном газе, плотность которого ρ_∞ . (Размерные величины R , V_0 , ρ_∞ — характерные параметры задачи, с помощью которых соответственно обезразмерены все остальные значения.)

В некоторый момент времени ($t=0$) тело начинает тормозиться, его скорость