

мулой типа $C_y = (\pi/2)\alpha_k + 0.4\sigma$. Известное нелинейное решение по схеме Рябушинского [9] представлено кривой 3 (номера кривых возрастают от нижней кривой к верхней).

На этой же фиг. 1 приведены результаты всех имеющихся опытов [9], которые аппроксимируются полуэмпирическими формулами: Бетца — Седова [4, 9] (для больших σ) вида $C_y = (\pi/2)\alpha_k + \sigma$ (прямая 5 на фиг. 1) или Энштейна — Рейхардта [9] (малые σ) типа $C_y = (\pi/2)\alpha_k(1 + \sigma)$ (прямая 1 на фиг. 1).

На фиг. 2 представлены результаты систематических расчетов к.п.д. колеса осевой гидротурбины для суперкавитационного (I) и докавитационного (II) режимов работы, для различных относительных поступей $\lambda_i = Q/F_p \ln D = V_s/\pi n D$ в зависимости от безразмерной характеристики прочности (по В. М. Лаврентьеву) $\mu = B/A$.

Для суперкавитирующих насосов типа шнека с малой шириной лопасти (с относительным шагом решетки $t/b = 1$) построена диаграмма (фиг. 3) безразмерных статических напоров $h = \gamma H_c / \rho n^2 D^2$ в зависимости от относительного расхода $q = Q/\pi n D^3$

при различных шаговых отношениях $K = \frac{H}{D}$ (установочных углов подъема винтовых линии геликоида шнека). Здесь n_* и D_* соответствуют оптимальным значениям.

Анализ подобных систематических расчетов позволяет прийти к выводу, что для суперкавитирующих лопастных механизмов можно получить значения: 1) для гидродинамического качества C_y/C_x порядка от 20 (суперкавитирующие профили) до 15—10 (суперкавитирующие решетки с $t/b = 0.5—1.5$; 2) для к.п.д. осевого колеса (до 80—90% в случае суперкавитирующей турбины и до 65—75% в случае суперкавитирующего насоса).

Это позволяет рекомендовать подобные гидромашинны для использования в различных отраслях промышленности и для образцов новой техники с высокоскоростными параметрами.

Поступила 6 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников В. В., Боровский Б. И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1971.
2. Ивченко В. М. Теория лопастей на режимах суперкавитации. Прикладная механика, Киев, 1965, т. 1, № 12.
3. Задачи и методы гидродинамики подводных крыльев и винтов. Киев, «Наукова думка», 1966.
4. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
5. Івченко В. М. Про особливості струменя в просторових задачах гідродинаміки. Доповіді АН УРСР, 1966, № 5.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
7. Панченко А. П., Диогенов А. В. Структура сингулярных решений теории потенциала ускорений. В сб. «Асимптотические методы в теории систем», вып. 5. Иркутск, 1973.
8. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
9. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями. Гидромеханика, т. 5. М., ВИНТИ, 1971.

УДК 532.528

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

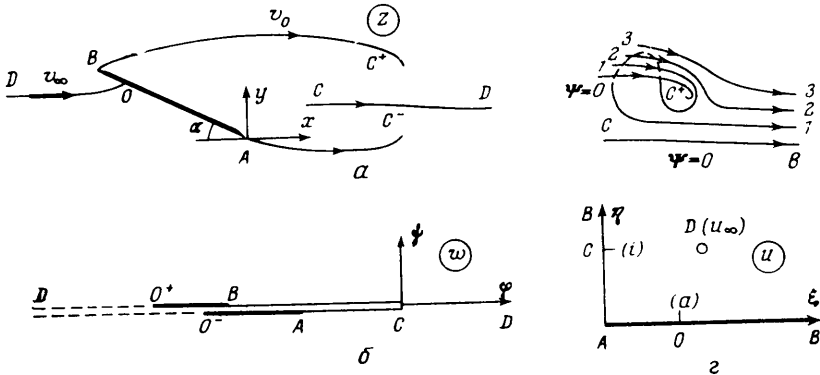
В основе теории кавитационного обтекания препятствий лежат физически обоснованные условия относительно давления в каверне и жидкости соответственно [1]

$$(1) \quad p = p_0 = \text{const}, \quad p \geq p_0$$

Как показал Бриллюэн, каверны с непрерывной замкнутой границей, удовлетворяющие условиям (1), математически невозможны. Парадокс Бриллюэна обычно преодолевается путем искусственного изменения задней части каверны. Получаемые при этом кавитационные схемы помимо искусственности течения содержат трудность математического характера: система уравнений для неизвестных параметров в случае несимметричных течений является неопределенной. Проблема «лишнего» пара-

метра связана с тем, что в теории кавитационного обтекания для определения циркуляции до сих пор отсутствует удовлетворительная гипотеза, аналогичная гипотезе Жуковского — Чаплыгина в теории безотрывного обтекания профилей [2]. Для однозначности решения кавитационных задач приходится вводить дополнительные физически малооправданные условия. Например, в схеме Эфроса, как правило, задают направление возвратной струйки, в других схемах — величину циркуляции Γ скорости вдоль границ каверны и смачиваемой поверхности препятствия (обычно $\Gamma=0$).

В данной работе на примере стационарного кавитационного обтекания пластины безграничным потоком идеальной несжимаемой невесомой жидкости (фиг. 1, а) по-



(Фиг. 1)

казывается возможность однозначного построения потенциального течения, основанного лишь на физически оправданных условиях (1) и условии

$$(2) \quad \oint_L dz = 0,$$

выражающего возможность охвата каверны и препятствия непрерывной замкнутой кривой L .

Первое условие (1) совместно с кинематическими условиями на пластине приводит к известным из теории струй краевым условиям для функции $\omega(w) = \ln(dw/dz)$ на границах области изменения комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$ (фиг. 1, б)

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \omega &= \ln v_0 = \text{const} & (BC, AC), & \quad \operatorname{Im} \omega = \alpha(O^-A) \\ \operatorname{Im} \omega &= \alpha - \pi(O^+B), & \quad \omega^+(\varphi) &= \omega^-(\varphi + \Gamma) \quad (DO^+) \end{aligned}$$

Решение краевой задачи (3) в классе ограниченных в точке $C(w=0)$ функций приводит к известной кавитационной схеме [3], в которой условие (2) не может быть выполнено. Возникает вопрос, нельзя ли расширить класс функций, учитывающих все возможные особенности решения.

Теорема. Второе условие (1) допускает для функции $\omega(w)$ в точке «замыкания» каверны $w=0$ единственно возможную особенность вида

$$(4) \quad \omega(w) \sim -kw^{-1/2}$$

где k — вещественный положительный множитель. Здесь рассматривается та ветвь функции $w^{1/2}$, которая на действительной полуоси ($\varphi \geq 0$) принимает положительное значение.

Доказательство. В соответствии со вторым условием (1) из интеграла Бернулли следует, что $\operatorname{Re} \omega \leq \ln v_0$ в некоторой малой окрестности точки $w=0$, т. е. областью изменения функции $\omega(w)$ может быть внешность полукруга бесконечно большого радиуса. Тогда справедливо соотношение (4).

При доказательстве теоремы рассматривалась лишь малая окрестность точки $w=0$, поэтому второе условие (1) можно несколько ослабить, потребовав его выполнения лишь в некоторой окрестности задней части каверны. Теорема справедлива также в случае замыкания каверны на твердую поверхность. В самом деле, линия тока $\psi=0$ в окрестности точки $w=0$ отвечает в физической плоскости z границе каверны и некоторой поверхности твердого тела.

Решение краевой задачи (3) в классе функций, имеющих особенность (4), будет содержать по сравнению с решением [3] дополнительно еще один вещественный параметр, выбором которого можно полностью выполнить условие (2). Это дает основание полагать, что при кавитационном обтекании препятствий единственно возможным стационарным течением невязкой жидкости является течение с особенностью вида (4).

Следует отметить, что особенность (4) была предложена в [4] как одна из возможных кавитационных схем; при этом предполагалось, что циркуляция $\Gamma=0$. В последующих работах схема Тулина рассматривалась также при условии отсутствия циркуляции.

Для решения краевой задачи (3) отобразим область изменения комплексного потенциала w на первый квадрант вспомогательной плоскости u (фиг. 1, з).

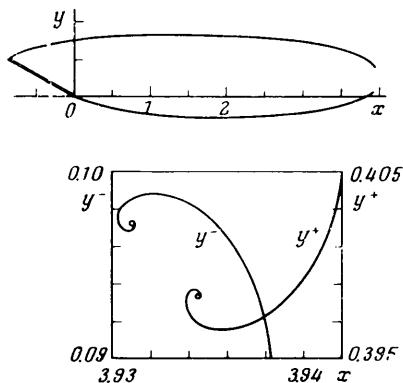
Соответствующие точки обозначены одинаковыми буквами. Производная отображающей функции

$$(5) \quad \frac{dw}{du} = N \frac{u(u^2 - a^2)(u^2 + 1)}{(u^2 - u_\infty^2)^2(u^2 - \bar{u}_\infty^2)^2}$$

где N — масштабная константа.

Краевая задача (3) в плоскости u после продолжения через минимую полуось переходит в краевую задачу Шварца в верхней полуплоскости. Особенность (4) порождает для функции $\omega(u)$ в точке $u=i$ простой полюс. Решение задачи в классе мероморфных функций можно найти, например, по формулам [5]

$$(6) \quad \omega = \ln \left(v_0 \frac{u-a}{u+a} \right) + \frac{2bu}{u^2+1} + (\alpha - \pi)i$$



Фиг. 2

С помощью функций (5) и (6) обычными методами теории струй [2] нетрудно определить геометрические и гидродинамические характеристики течения. Длина пластины

$$(7) \quad l = -e^{\alpha i} \int_0^\infty e^{-\omega(\xi)} \frac{dw(\xi)}{du} d\xi$$

Соотношение (2) — условие однозначности функции $z(u)$ вблизи точки $u=u_\infty$

$$(8) \quad \operatorname{res} \left[e^{-\omega(u_\infty)} \frac{dw(u_\infty)}{du} \right] = 0$$

Равенства (7) и (8) совместно с условием для скорости пабегающего потока $\omega(u_\infty) = \ln v_\infty$ составляет замкнутую систему пяти действительных уравнений относительно неизвестных параметров $N, a, b, u_\infty = e + id$. Таким образом, физические параметры (угол атаки α , число кавитации $\sigma = v_0^2/v_\infty^2 - 1$, длина пластины l) и условия (2) полностью определяют обтекание пластины с развитой кавитацией.

В таблице представлены числовые значения коэффициентов нормального давления $C_n = 2R/l\rho v_\infty^2$ и момента $C_m = 2M/l^2\rho v_\infty^2$, где R — величина результирующей сил давления на пластину, M — момент сил давления относительно передней кромки.

На фиг. 2 показана конфигурация каверны за пластиной единичной длины ($l=1$) при числе кавитации $\sigma=0.5$ и $\alpha=30^\circ$. Форма границ каверны в ее хвостовой части изображена в более крупном масштабе. Из фиг. 2 видно, что свободные поверхности в конце каверны образуют две быстросходящиеся спирали с полюсами в двух различных точках C^+ и C^- . Линия тока $\psi(x, y)=0$ в физической плоскости при переходе точки $C(w=0)$ терпит разрыв. За каверной ($\varphi \geq 0$) она представляет собой некоторую кривую, простирающуюся в обе стороны на бесконечность. Схематическое изображение линий тока в окрестности задней части каверны показано на фиг. 1, в.

Таким образом, стационарное потенциальное кавитационное течение неоднолистно, в то время как в действительности возможно лишь однолистное течение. Это противоречие между теоретически необходимым и физически возможным течением может быть устранено в нестационарном потоке.

Нестационарный процесс в конце каверны носит весьма сложный характер и пока не может быть описан математически. Однако эта нестационарность проявляется лишь локально и не оказывает существенного влияния на средние значения гидродинамических и геометрических характеристик течения вблизи обтекаемого тела. Укажем еще на одно явление, которое порождается особенностью (4) и согласуется в некотором смысле с действительностью. Из фиг. 1, в видно, что часть жид-

σ	$\alpha=5^\circ$	10°	15°	20°	30°	60°	90°
$C_n(\sigma, \alpha)$							
0.0	0.1281	0.2400	0.3379	0.4235	0.5639	0.8096	0.8798
0.1	0.1689	0.2767	0.3791	0.4707	0.6228	0.8911	0.9679
0.2	0.2531	0.3368	0.4346	0.5274	0.6864	0.9734	1.0564
0.3	0.3616	0.4156	0.5028	0.5929	0.7546	1.0566	1.1451
0.4	0.4828	0.5083	0.5817	0.6663	0.8273	1.1407	1.2341
0.5	0.6107	0.6113	0.6695	0.7467	0.9040	1.2257	1.3234
0.6	0.7419	0.7215	0.7645	0.8330	0.9844	1.3114	1.4130
0.7	0.8747	0.8370	0.8652	0.9246	1.0681	1.3980	1.5029
0.8	1.0080	0.9562	0.9707	1.0204	1.1550	1.4853	1.5929
0.9	1.1411	1.0781	1.0799	1.1200	1.2446	1.5732	1.6833
1.0	1.2763	1.2017	1.1922	1.2229	1.3368	1.6619	1.7738
$C_m(\sigma, \alpha)$							
0.0	0.0417	0.0810	0.1181	0.1529	0.2162	0.3596	0.4399
0.1	0.0573	0.0946	0.1333	0.1706	0.2392	0.3959	0.4840
0.2	0.0923	0.1185	0.1551	0.1828	0.2647	0.4329	0.5282
0.3	0.1402	0.1513	0.1830	0.2195	0.2928	0.4705	0.5726
0.4	0.1961	0.1915	0.2163	0.2502	0.3233	0.5087	0.6171
0.5	0.2569	0.2375	0.2544	0.2847	0.3561	0.5476	0.6617
0.6	0.3206	0.2880	0.2966	0.3225	0.3911	0.5871	0.7065
0.7	0.3860	0.3422	0.3423	0.3633	0.4281	0.6271	0.7514
0.8	0.4523	0.3990	0.3911	0.4067	0.4669	0.6677	0.7965
0.9	0.5191	0.4580	0.4423	0.4526	0.5076	0.7089	0.8416
1.0	0.5859	0.5186	0.4958	0.5006	0.5498	0.7505	0.8869

кости попадает внутрь каверны и затем возвращается снова в основной поток. Течение в реальных средах также имеет тенденцию затекания некоторого количества жидкости в каверну, которое периодически уносится основным потоком.

Автор выражает признательность Г. Ю. Степанову за полезные советы и В. Н. Васильеву за вычислительную работу.

Поступила 11 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
2. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М., Физматгиз, 1961.
3. Wu T. Y. A wake model for free — streamline flow theory, pt 1. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 2.
4. Tulin M. P. Supercavitating flows — small — perturbation theory. J. Ship Res., 1964, vol. 7, No. 3.
5. Терентьев А. Г. К линейной теории кавитационного обтекания препятствий. В сб. «Вопросы прикладной математики и механики», вып. 1. Чебоксары, 1971.