

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid. Mech.*, 1960, vol. 9, pt 3.
2. *Watson J.* On non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid. Mech.*, 1960, vol. 9, pt 3.
3. *Reynolds W. C., Potter M. C.* Finite amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid. Mech.*, 1967, vol. 27, pt 3.
4. *Шкадов В. Я.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельном течении Пуазейля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2, стр. 49–57.
5. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, стр. 791–794.
6. *Струминский В. В.* К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, стр. 1046.
7. *Лизачев О. А., Штерн В. П.* Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
8. *Уринцев А. Л.* Возникновение автоколебаний в пограничном слое. Сборник «Пристенное турбулентное течение». Тр. XVIII Сибирского теплофизического семинара, ч. I, Новосибирск, 1975.
9. *Chi-Hay Ling, Reynolds W. C.* Non-parallel flow corrections for the stability of shear flows. *J. Fluid. Mech.*, 1973, vol. 59, pt. 3.
10. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.528

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРКАВИТИРУЮЩИХ НАСОСОВ ИЛИ ГИДРОТУРБИН

В. М. ИВЧЕНКО

(Красноярск)

Излагается трехмерная линеаризованная теория суперкавитирующего насоса или гидротурбины с конечными размерами лопастей и каверн в трубе кругового сечения. Построено фундаментальное решение (потенциал источника в трубе) и указаны численные методы решения прямой и обратной краевых задач, необходимых для детального расчета и проектирования осевых гидромашин в режиме развитой кавитации. Приведены некоторые результаты расчетов.

Расчет характеристик водяных насосов и гидротурбин обычно производится в рамках одномерной, гидравлической теории, в том числе и для режимов кавитации (см., например, [1]). В режиме суперкавитации, когда каверны замыкаются далеко за пределами лопастей, даже малые изменения в форме лопастей и кинематике потока приводят к большим изменениям не только локальных, но и суммарных гидродинамических характеристик насоса или гидротурбины. Имеют место сильные взаимодействия лопастей, каверн и стенок трубы, существенно влияющие на все гидродинамические характеристики потока. Их учет в полной мере возможен лишь в рамках расширенной вихревой теории суперкавитирующей лопасти [2, 3], кратко изложению которой посвящена данная работа.

1. Краевые задачи. Для насосо- и гидротурбостроения представляют интерес две основные задачи: проектировочного и поверочного расчета, называемые соответственно обратной и прямой краевыми задачами.

Обратная задача заключается в определении формы суперкавитирующих лопастей и образующихся каверн $f_c, \Delta f$ по заданному распределению нагрузки $[p]$, представляемой некоторой гладкой функцией.

Для стационарных режимов работы насоса (гидротурбины) следует использовать условия непротекания, постоянства давления p_k в каверне и конечность ее размеров (так называемое условие замкнутости каверны как линейный аналог схемы Рябушинского), что приведет [3] к системе уравнений и граничных условий

$$(1.1) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1 + S_2} \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] L dS_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1}^* [p] \frac{\partial L}{\partial n'} dS_1 - \frac{[p]}{2} - (p_\infty - p_k)$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 f_c}{\partial s^2} = \frac{|\nabla F|}{4\pi\rho V_e^2} \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \iint_{S_1+S_2}^* \left[\frac{\partial p}{\partial n'} \right] \frac{\partial L}{\partial n} dS_k - \iint_{S_1}^{**} [p] \frac{\partial^2 L}{\partial n' \partial n} dS_k \right\}$$

$$s \rightarrow \infty \quad \frac{\partial f_c}{\partial s} = 0 \quad f_c = 0$$

$$(1.3) \quad \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] = \frac{\rho V_e^2}{|\nabla F|} \frac{\partial^2 \Delta f}{\partial s^2} \quad ([A] = A_+ - A_-)$$

$$(1.4) \quad \Delta f(l_k) = 0, \quad \Delta f(s_0) = 0$$

Здесь N — число лопастей, f_- , f_+ , f_c — ординаты нижней, верхней и срединной поверхностей системы лопасть — каверна, L — фундаментальное решение (потенциал источника в трубе), $F=0$ — уравнение опорной поверхности (для геликоида $|\nabla F| = \cos^{-1}\beta_i$, β_i — угол подъема винтовой линии), $V_e = V_0 + [\omega_e \times r]$ — переносная скорость движения, S_1 , S_2 — следы лопастей и каверн на опорных поверхностях (геликоидах), $l_k(r)$ — длина каверны, $\Delta f(s, r)$ — толщина каверны, одна или две звездочки над знаком интеграла обозначают прямое значение интеграла или конечную часть по Адамару соответственно, p_∞ — давление на бесконечности перед насосом (гидротурбиной), s , r , n — естественная система координат (касательная, радиус и нормаль на поверхности геликоида).

Решение указанной системы четырех интегродифференциальных уравнений с сингулярным ядром позволяет определить четыре неизвестных ($[\partial p/\partial n]$, Δf , f_c и l_k) как функции координат s , r и найти форму потока, лопастей и каверн.

Для этого необходимо решить линейное интегральное уравнение (1.1), вычислить сингулярные интегралы в (1.2), дважды проинтегрировать (1.2) и (1.3) с учетом нелинейного условия (1.4), устанавливающего связь длины каверны на каждом радиусе r от числа кавитации для этого сечения

$$(1.5) \quad \sigma = (p_\infty - p_k)^{1/2} / \rho V_e^2$$

Прямая задача заключается в определении гидродинамических характеристик (скачков $[p]$ и $[\partial p/\partial n]$), а также формы образующихся каверн по заданной геометрии смачиваемой части лопастей, $f_k = f_- = f_c - 1/2 \Delta f$. Для этого аналогичным путем может быть получена система уравнений

$$(1.6) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1}^{**} \frac{1}{V_e} \int_{-\infty}^s [p]_k \left(s', r', n_k; t - \frac{s-x}{V_e} \right) \frac{\partial^2 L}{\partial n' \partial n} \left(\frac{x}{s'}, \frac{r}{r'}, \frac{n_j}{n_k} \right) dx dS_k +$$

$$+ \frac{1}{2V_e} \int_{-\infty}^s \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right]_j \left(s, r, n_j; t - \frac{s-x}{V_e} \right) dx - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1+S_2}^{**} \frac{1}{V_e} \left[\frac{\partial p}{\partial n'} \right]_k \times$$

$$\times \left(s', r', n_k; t - \frac{s-x}{V_e} \right) \frac{\partial L}{\partial n} \left(\frac{x}{s'}, \frac{r}{r'}, \frac{n_j}{n_k} \right) dx dS_k =$$

$$= \frac{\rho}{|\nabla F|} \left(\frac{\partial r}{\partial t} + V_e \frac{\partial}{\partial s} \right) f_{Hj}(r, s, n_j, t) + \alpha_j(r, s, n_j, t)$$

$$(1.7) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ \iint_{S_1}^* [p]_k \frac{\partial L}{\partial n'} dS_k - \iint_{S_1+S_2} \left[\frac{\partial p}{\partial n'} \right]_k L dS_k \right\} - \frac{[p]_j}{2} = p_\infty - p_k$$

$$(1.8) \quad \int_{s_0(r')}^{l_k(r')} \left(\frac{\partial r}{\partial t} + V_e \frac{\partial}{\partial s'} \right) \Delta f(r', s', n_k', t) ds' = 0 \quad [p]_k|_{s_k} = 0$$

Приведенным системам уравнений вида (1.1) — (1.8) соответствует возможность разделения (в рамках линейной теории) на составляющие течения, определяемые формой средней линии и толщиной системы профилей — каверна, и, следовательно, возможно применение методов разрывного потенциала и гипотезы плоских сечений [4].

2. Фундаментальное решение (источник в трубе). Представим искомое решение в форме

$$(2.1) \quad L = 1/l + \varphi, \quad l = \sqrt{r^2 + (r')^2} - 2rr' \cos(\theta - \varphi) + (z - \zeta)^2$$

Здесь $1/l$ — потенциал источника в безграничной жидкости, а φ представляет собой регулярную функцию координат. Для построения φ используем метод Фурье. В цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеем

$$(2.2) \quad \Delta \varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = - \left. \frac{\partial (1/l)}{\partial r} \right|_{r=1} = \frac{1-r' \cos(\theta-\psi)}{l^3}$$

Запишем решение для φ в форме интеграла Фурье с учетом симметрии по отношению к $(z-\zeta)$ и $(\theta-\psi)$

$$(2.4) \quad \varphi = \sum_m \varphi_m = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} A_m(\lambda) I_m[\lambda(r-r')] \cos \lambda(z-\zeta) \cos m(\theta-\psi) d\lambda$$

где I_m — модифицированная, гиперболическая функция Бесселя (много аргумента) первого рода, m -го порядка. Используя (2.3), получим

$$(2.5) \quad A_m(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos m(\theta'-\psi) \left\{ \frac{dI_m}{dr} [\lambda(1-r')] \right\} \times \\ \times \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1-r \cos(\theta'-\psi)}{[1+(r')^2 - 2r' \cos(\theta'-\psi) + (\xi-\zeta)^2]^{3/2}} \right\} \cos \lambda(\xi-\zeta) d\xi d\theta'$$

В частном случае источника, расположенного по оси трубы, $r'=0$, $m=0$ (осевая симметрия)

$$(2.6) \quad A_0(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda(\xi-\zeta)}{[1+(\xi-\zeta)^2]^{3/2}} \frac{d\xi}{I_1(\lambda)}$$

Здесь интеграл вычисляется через гиперболическую Бесселеву функцию второго рода K_1 в замкнутом виде и

$$(2.7) \quad \varphi_0 = - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{I_0(\lambda r)}{I_1(\lambda)} K_1(\lambda) \cos \lambda(z-\zeta) d\lambda$$

Очевидно, что решение (2.4) с коэффициентом $A_m(\lambda)$ по (2.5) вида $\varphi = \sum_m \varphi_m$

дает регулярные добавки, учитывающие влияние стенок трубы. Эту функцию целесообразно заранее затабулировать для различных значений аргументов.

3. Численные методы. В работах автора [3, 5] и его коллег были развиты численные методы решения аналогичных краевых задач теории суперкавитации применительно к различным лопастным механизмам. Основные из них, применимые для решения вышеизложенных краевых задач, заключаются в следующем.

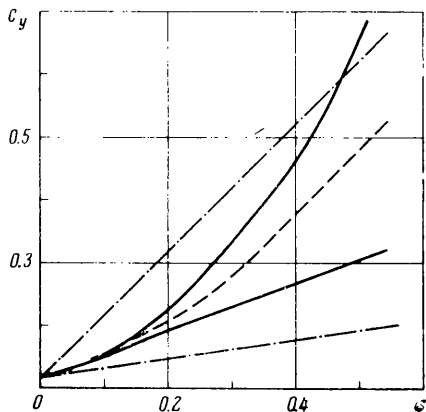
Метод обращения сингулярных интегралов основан на формулах обращения [6], в частных случаях известных как формулы Келдыша — Седова и Гахова — Чибриковой. Поскольку в указанном методе оперируют с одномерными интегралами, то он эффективен лишь для решения плоских или осесимметричных задач. В случае плоских решеток при этом целесообразно осуществить предварительно конформное отображение физической плоскости z на верхнюю полуплоскость параметрического переменного ζ

$$(3.1) \quad z = \frac{\tau}{\pi} (\zeta - b) \cos \beta + \frac{\tau}{\pi} \sin \beta \ln \frac{\sin \beta}{\sin(d-\zeta)}$$

где τ — шаг и β — угол выноса решетки, b и d — параметры преобразования; затем применить вышеуказанные формулы обращения. Однако отсутствие аналогичных формул обращения для двумерных сингулярных интегралов не позволяет распространить этот метод на пространственные течения.

По методу коллокаций искомые функции распределения $[p]$ и $[\partial p / \partial n]$ задаются рядами по выбранным базисным функциям $\mu_{nm}(s, r)$ с неопределенными коэффици-

ентами C_{nm} (аналог метода Рунца — Галеркина). Удовлетворяя граничным условиям в nm -х точках интегральных уравнений, получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения C_{nm} численным путем. При этом целесообразно также выделить элементарное сингулярное решение [5, 7]. Для численного определения сингулярных интегралов, имеющихся в системах уравнений (1.1) — (1.8), удобно при этом использовать прием выделения особой точки M малой Δ областью. Так, для прямоугольной ΔS -области ($\Delta S = \Delta s \Delta r$) имеем для конечной части интеграла по Адамару, главного значения интеграла по Коши и прямого значения интеграла соответственно



Фиг. 1

$$\Delta P_1(M) = \frac{\mu_{nm}(M)}{4\pi} \iint_{\Delta S}^{**} \frac{\partial^2 L}{\partial n' \partial n} dS_Q =$$

$$(3.2) \quad = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{1}{\Delta s} + \frac{1}{\Delta r} \right) \mu_{nm}(M)$$

$$(3.3) \quad \Delta P_2(M) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Delta S}^{*} [\mu_{nm}(Q) - \mu_{nm}(M)] \frac{\partial^2 L}{\partial n' \partial n} dS_Q =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left[\frac{\partial^2 \mu_{nm}}{\partial s^2}(M) \Delta s + \frac{\partial^2 \mu_{nm}}{\partial r^2}(M) \Delta r \right] + O(\Delta^2)$$

$$(3.4) \quad \Delta P_3(M) =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\Delta S}^{*} \mu_{nm}(Q) \frac{\partial L}{\partial n}(M, Q) dS_Q = O(\Delta^2)$$

Устойчивость и точность вычислений на ЭЦВМ М-20 иллюстрируются выборочными данными.

Ниже показана устойчивость вычисления интеграла по Адамару, когда опорная поверхность представляет собой геликоид с $\beta_i = 45^\circ$.

$\Delta = \Delta s = \Delta r$	0.10	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03
$P_\Sigma = \iint_{S-\Delta S}$	1.7019	2.2659	2.6680	3.2050	3.9466	5.0308	6.9348
$\Delta P_\perp = \iint_{\Delta S}^{**}$	-2.2508	-2.8135	-3.2154	-3.7513	-4.5016	-5.6270	-7.5027
$P_1 = P_\Sigma + \Delta P_1$	-0.5489	-0.5476	-0.5474	-0.5463	-0.5559	-0.5966	-0.5679

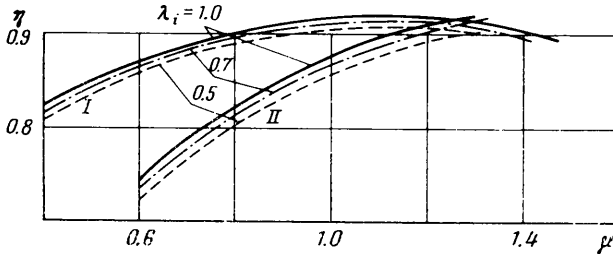
Ниже приведена оценка точности вычисления кривизны потока для прямоугольного крыла с удлинением $\lambda=2$, где в числителе указаны точные значения, а в знаменателе — вычисленные на ЭЦВМ М-20 при $\Delta = \Delta s = \Delta r = 0.07$.

x	$y=0$	0.4	0.8	1.2
0	0.1779/0.1798	0.1795/0.1793	0.1872/0.1879	0.2041/0.2046
0.4	0.2078/0.2082	0.2091/0.2097	0.2160/0.2159	0.2370/0.2371
0.8	0.4593/0.4584	0.4605/0.4602	0.4663/0.4665	0.4817/0.4814

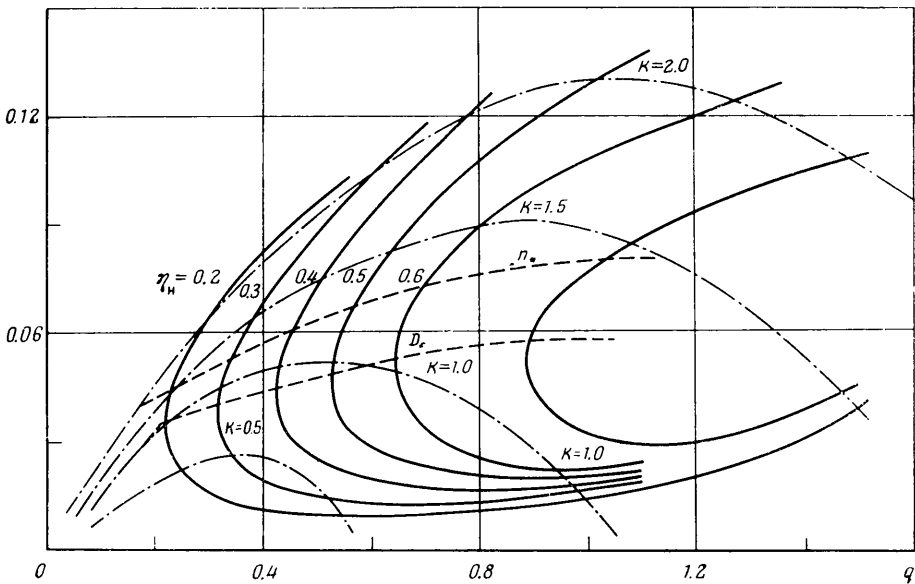
По методу дискретных особенностей непрерывное распределение скачков $[p]$ и $[\partial p / \partial n]$ заменяется дискретным (типа δ -функций по Δ -областям). По числу выбранных дискретных особенностей система сингулярных уравнений удовлетворяется в стольких же точках, сдвинутых относительно первых на $2(\Delta s/4)$ и $2(\Delta r/4)$. При

достаточно большом числе опорных точек эти дискретные значения и будут представлять собой искомые распределения. В аэродинамике крыла самолета идея подобного метода возникла еще в 30-х годах; она была усовершенствована и доведена до практических приложений [8].

Приближенные приемы расчета и проектирования осевых суперкавитирующих насосов и гидротурбин могут быть развиты на базе основных уравнений (1.1) — (1.8)



Фиг. 2



Фиг. 3

и сведены в принципе к аналогичным подходам, широко применяемым в теории некавитирующих и суперкавитирующих корабельных двигателей [3] и сводящимся к расчету индуктивных скоростей по теории песущей линии с учетом конечности числа лопастей, радиального зазора, подпорного давления и образующихся каверн и к введению поправок на дополнительный скос и кривизну потока от нагрузки и толщины системы лопастей — каверна.

Сечения лопастей при этом могут быть определены по изолированным профилям или решеткам.

4. Некоторые результаты. Развитая теория основана на линеаризованных уравнениях гидродинамики идеальной жидкости и потому в принципе применима лишь для малых нагрузок, углов атаки и чисел кавитации. Однако сравнение с известными точными аналитическими решениями задач в нелинейной постановке и опытами показывает относительно хорошее соответствие вплоть до $\alpha_k = 10^\circ$ и $\sigma = 0.1$.

Так, на фиг. 1 представлена зависимость коэффициента подъемной силы C_y от числа кавитации σ при кромочном угле атаки $\alpha_k = 5^\circ$ для суперкавитирующей пластинки. Сплошной линией 4 нанесены результаты расчетов по изложенной теории (по методу потенциала ускорений [2] для задач суперкавитации [3]). Линейная аппроксимация этого решения, изображенная линией 2, может быть выражена фор-

мулой типа $C_y = (\pi/2)\alpha_k + 0.4\sigma$. Известное нелинейное решение по схеме Рябушинского [9] представлено кривой 3 (номера кривых возрастают от нижней кривой к верхней).

На этой же фиг. 1 приведены результаты всех имеющихся опытов [9], которые аппроксимируются полумпирическими формулами: Бетца — Седова [4, 9] (для больших σ) вида $C_y = (\pi/2)\alpha_k + \sigma$ (прямая 5 на фиг. 1) или Энштейна — Рейхардта [9] (малые σ) типа $C_y = (\pi/2)\alpha_k(1 + \sigma)$ (прямая 1 на фиг. 1).

На фиг. 2 представлены результаты систематических расчетов к.п.д. колеса осевой гидротурбины для суперкавитационного (I) и докавитационного (II) режимов работы, для различных относительных поступей $\lambda_i = Q/F_p \ln D = V_s/\pi n D$ в зависимости от безразмерной характеристики прочности (по В. М. Лаврентьеву) $\mu = B/A$.

Для суперкавитирующих насосов типа шнека с малой шириной лопасти (с относительным шагом ретретики $t/b = 1$) построена диаграмма (фиг. 3) безразмерных статических напоров $h = \gamma H_c / \rho n^2 D^2$ в зависимости от относительного расхода $q = Q/\pi n D^3$ при различных шаговых отношениях $K = \frac{H}{D}$ (установочных углов подъема винтовой

линии геликоида шнека). Здесь n_* и D_* соответствуют оптимальным значениям.

Анализ подобных систематических расчетов позволяет прийти к выводу, что для суперкавитирующих лопастных механизмов можно получить значения: 1) для гидродинамического качества C_y/C_x порядка от 20 (суперкавитирующие профили) до 15—10 (суперкавитирующие решетки с $t/b = 0.5—1.5$; 2) для к.п.д. осевого колеса (до 80—90% в случае суперкавитирующей турбины и до 65—75% в случае суперкавитирующего насоса).

Это позволяет рекомендовать подобные гидромашины для использования в различных отраслях промышленности и для образцов новой техники с высокоскоростными параметрами.

Поступила 6 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Б. В., Боровский Б. И. Теория и расчет агрегатов питания жидкостных ракетных двигателей. М., «Машиностроение», 1971.
2. Ивченко В. М. Теория лопасти на режимах суперкавитации. Прикладная механика, Киев, 1965, т. 1, № 12.
3. Задачи и методы гидродинамики подводных крыльев и винтов. Киев, «Наукова думка», 1966.
4. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев, «Наукова думка», 1969.
5. Івченко В. М. Про особливості струменя в просторових задачах гідродинаміки. Доповіді АН УРСР, 1966, № 5.
6. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
7. Панченков А. И., Диогенов А. В. Структура сингулярных решений теории потенциала ускорений. В сб. «Асимптотические методы в теории систем», вып. 5. Иркутск, 1973.
8. Белоцерковский С. М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М., «Наука», 1965.
9. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями. Гидромеханика, т. 5. М., ВИНТИ, 1971.

УДК 532.528

К НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ КАВИТАЦИОННОГО ОБТЕКАНИЯ ПРЕПЯТСТВИЙ

А. Г. ТЕРЕНТЬЕВ

(Чебоксары)

В основе теории кавитационного обтекания препятствий лежат физически обоснованные условия относительно давления в каверне и жидкости соответственно [1]

$$(1) \quad p = p_0 = \text{const}, \quad p \geq p_0$$

Как показал Бриллюэн, каверны с непрерывной замкнутой границей, удовлетворяющие условиям (1), математически невозможны. Парадокс Бриллюэна обычно преодолевается путем искусственного изменения задней части каверны. Получаемые при этом кавитационные схемы помимо искусственности течения содержат трудность математического характера: система уравнений для неизвестных параметров в случае несимметричных течений является неопределенной. Проблема «лишнего» пара-