

ЛИТЕРАТУРА

1. Ting L. On the mixing of two parallel streams. J. Math. and Phys., 1959, vol. 38, p. 153—165.
2. Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П. Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Теоретическая гидромеханика, № 4. М., Оборонгиз, 1949.

УДК 532.526.013.4

О ВОЗМУЩЕНИЯХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ
В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕЙН, Ю. М. ШТЕМЛЕР

(Москва)

Нелинейное развитие волн Толмина — Шлихтинга в пограничном слое изучается с учетом непараллельности среднего течения. Исследование проводится с помощью модифицированного метода Стюарта — Ватсона [1—3]. Дается сравнение с результатами, полученными в обычном квазипараллельном подходе.

Без учета непараллельности возмущения конечной амплитуды рассматривались, например, в работах [1—8].

Рассматривается плоское движение вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение для функции тока ψ записывается в виде

$$(1) \quad \Delta\psi_l + \psi_y\Delta\psi_x - \psi_x\Delta\psi_y - 1/R\Delta^2\psi = 0$$

Здесь $R = Ul/\nu$ — число Рейнольдса, построенное по характерной длине l и скорости U , ν — кинематическая вязкость.

Представим функцию тока в виде суммы функций тока основного течения и возмущения

$$\psi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \varphi(x, y, t)$$

Предполагая, что φ_0 удовлетворяет (1), выпишем уравнение для φ

$$(2) \quad B\varphi = \varphi_y\Delta\varphi_x - \varphi_x\Delta\varphi_y$$

$$B \equiv -\frac{\partial\Delta}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\Delta}{\partial x} + \frac{\partial\Delta\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial\Delta\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\Delta}{\partial y} + \frac{1}{R}\Delta^2$$

Потребуем, чтобы скорости $u = \varphi_y$ и $v = -\varphi_x$ обращались в нуль на твердой границе и были ограничены в равномерном потоке.

Разложим $\varphi_0(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого $x = x_0$

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_0^0(y) + \varepsilon\varphi_0^1(y)\xi + O(\varepsilon), \quad \varphi_0^0(y) = \varphi_0(x_0, y), \quad \varepsilon\varphi_0^1(y) = \partial\varphi_0/\partial x|_{x=x_0},$$

$$\xi = x - x_0$$

Для течения Блазиуса размерная функция тока Φ_0 дается выражением

$$\Phi_0 = (\nu XU_\infty)^{1/2}f_0(\eta), \quad \eta = Y(U_\infty/\nu X)^{1/2}$$

Здесь X и Y — размерные координаты, U_∞ — скорость потока на бесконечности, а f_0 — решение задачи

$$2f_0''' + f_0f_0'' = 0, \quad f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = 1$$

Примем также, что

$$l = (\nu X_0/U_\infty)^{1/2}, \quad U = U_\infty, \quad \varepsilon = 1/R, \quad X_0 = x_0 l$$

Тогда

$$(3) \quad \varphi_0^0(y) = f_0(y), \quad \varphi_0^1(y) = 1/2[f_0(y) - yf_0'(y)]$$

Следуя [3] и учитывая непараллельность среднего течения, ищем решение нелинейной задачи в виде

$$(4) \quad \psi(x, y, t) = \varphi_0^0(y) + \varepsilon\varphi_0^1(y)\xi + A^2[\varphi_2^0(y) + \varepsilon\varphi_2^1(y)\xi] + \dots$$

$$\dots + A/(i\alpha)[- \varphi_{11}(y)e^{is} + \varphi_{11}^*(y)e^{-is}] + A^2/(2i\alpha)[- \varphi_{22}(y)e^{2is} - \varphi_{22}^*(y)e^{-2is}] +$$

$$+ A^2\{1/(i\alpha)[- \varphi_{13}(y)e^{is} + \varphi_{13}^*(y)e^{-is}] + \dots\} + \dots$$

Здесь звездочки обозначают комплексно-сопряженные величины

$$s = \alpha\xi + \omega t, \quad A = A(t), \quad \omega = \omega(A)$$

$$(5) \quad A^{-1}dA/dt = a_0 + a_2A^2 + \dots, \quad \omega + d\omega/dA(tdA/dt) = b_0 + b_2A^2 + \dots$$

$a_0 = \alpha c_i$, $b_0 = -\alpha c_r$ — собственные значения линейной задачи (α — продольное волновое число, $c = c_r + ic_i$ — комплексная скорость распространения возмущения), A и ω — амплитуда и частота основной волны, b_2 и a_2 — вклады порядка A^2 в частоту равновесного течения ($dA/dt=0$) и в коэффициент усиления соответственно.

Подставляя (3) — (5) в (2) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях A , получим с точностью до ε^0 (в линейной задаче малость членов порядка ε' показана в [9])

$$L_\alpha \varphi_{11} = 0, \quad \varphi_{11}(0) = \varphi_{11}'(0) = 0, \quad \varphi_{11}(\infty) \rightarrow 0$$

Аналогично для φ_{22} с точностью до ε^0 имеем

$$(7) \quad L_{2\alpha} \varphi_{22} = 2R(\varphi_{11} \varphi_{11}'' - \varphi_{11}'^2), \quad \varphi_{22}(0) = \varphi_{22}'(0) = 0, \quad \varphi_{22}(\infty) \rightarrow 0$$

Здесь

$$L_\alpha \equiv (d^2/dy^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[(W - c)(d^2/dy^2 - \alpha^2) - W''], \quad W = f_0'$$

Сохраняя в уравнении для среднего вторичного течения члены порядка ε и обозначив $D = d/dy$, имеем

$$(8) \quad 1/R D^4 \varphi_2^\circ - \varepsilon D[D\varphi_0^4 D\varphi_2^\circ - \varphi_0^4 D^2 \varphi_2^\circ - D^2 \varphi_0^\circ \varphi_2^4 + D\varphi_0^\circ D\varphi_2^4] = \\ = i/\alpha D^2[\varphi_{11}^* D\varphi_{11} - \varphi_{11} D\varphi_{11}^*]$$

Предположим, что среднее вторичное течение, как и основное течение, обладает свойством автомодельности, т. е. размерная функция тока среднего вторичного течения представляется в виде

$$\varphi_2 = (\nu X U_\infty)^{1/2} f_2(\eta)$$

Тогда

$$\varphi_2^\circ(y) = f_2(y), \quad \varphi_2^4(y) = 1/2[f_2(y) - y f_2'(y)]$$

Подставляя (3), (9) в (8), после однократного интегрирования получим для f_2 следующую задачу

$$f_2''' + 1/2 f_2 f_2'' + 1/2 f_2'' f_0 = iR/\alpha [\varphi_{11}^* \varphi_{11}' - \varphi_{11} \varphi_{11}^*]', \\ f_2(0) = f_2'(0) = 0, \quad f_2'(\infty) = 0$$

В квазипараллельном [1-6] подходе, т. е. считая все компоненты среднего течения функциями только от y , имеем

$$f_2''' = i(R/\alpha) [\varphi_{11}^* \varphi_{11}' - \varphi_{11} \varphi_{11}^*]', \quad f_2(0) = f_2'(0) = 0, \quad f_2'(\infty) < \infty$$

При этом, условие затухания продольной компоненты скорости на внешней границе пограничного слоя не может быть удовлетворено и заменяется условием ограниченности.

Таким, образом, учет непараллельности приводит к весьма существенному изменению уравнения для среднего вторичного течения.

Приравнявая коэффициенты при A^3 нулю, можно выписать уравнение для φ_{13} , условие разрешимости которого дает возможность определить постоянные a_2 и b_2

$$(a_2 + ib_2)J_1 + (J_{02} + J_{22}) = 0$$

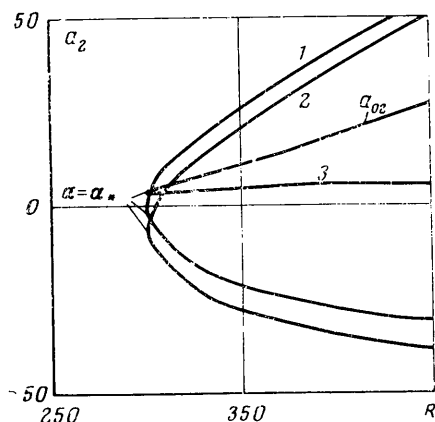
$$I_1 = \int_0^\infty (\alpha^2 \varphi_{11} g + \varphi_{11}' g') dy, \quad I_{02} = i\alpha \int_0^\infty [2\varphi_{11}' g' + \alpha^2 \varphi_{11} g + \varphi_{11} g''] f_2' dy \\ I_{22} = \int_0^\infty [\varphi_{22}' \varphi_{11}^* g' + 1/2 (3\alpha^2 g - g'') \varphi_{22}' \varphi_{11}^* + \varphi_{11}^* \varphi_{22} (3\alpha^2 g + g'')] dy$$

Здесь g ортогонально-сопряженная к φ_{11} функция, удовлетворяющая тем же граничным условиям [1-3].

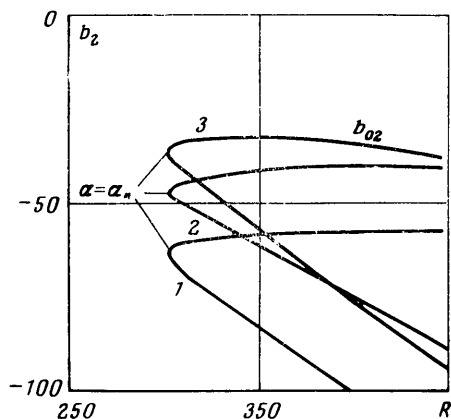
Нелинейный анализ дает возможность определить постоянную a_2 и тем самым выяснить наличие мягкого или жесткого возбуждения. Величины a_2 и b_2 могут быть представлены в виде

$$a_2 = a_{02} + a_{22}, \quad b_2 = b_{02} + b_{22}$$

Здесь вклад a_{02} обусловлен искажением зависимости основной гармоники от y при изменении среднего течения. Вклад a_{22} возникает из-за генерации основной гармоники [1-3].



Фиг. 1



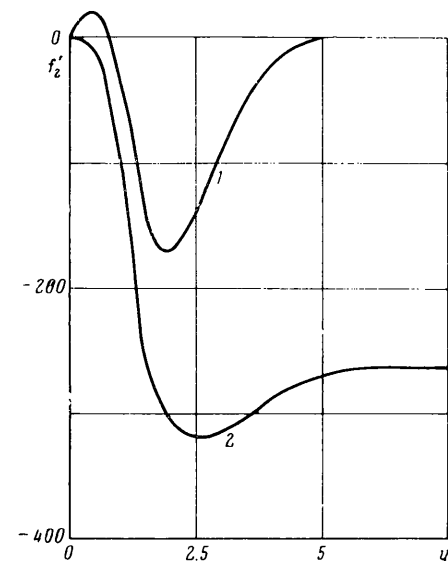
Фиг. 2

На фиг. 1 и 2 приводятся зависимости нелинейных поправок к коэффициенту усиления $a_2(R)$ и к частоте равновесного течения $b_2(R)$, полученные с учетом непараллельности среднего течения (линии 1) и в квазипараллельном подходе (линии 2). Там же приведены зависимости a_{02} и b_{02} от числа Рейнольдса, полученные с учетом непараллельности (линии 3).

Расчеты, проведенные в квазипараллельном подходе показывают, что нелинейная поправка к коэффициенту усиления a_2 обращается в нуль на нейтральной кривой линейной теории устойчивости при волновом числе α , несколько большем критического α_* . На верхней ветви нейтральной кривой значение a_2 положительно, т. е. возможно жесткое возбуждение, на нижней ветви нейтральной кривой a_2 отрицательно, т. е. возможно мягкое возбуждение. Отсюда, в частности, следует, что в малой окрестности критического числа Рейнольдса для течения в пограничном слое характерна мягкая неустойчивость (фиг. 1, линия 2). Нелинейная поправка к частоте равновесного течения b_2 отрицательна в рассмотренном диапазоне чисел Рейнольдса, причем верхняя ветвь нейтральной кривой соответствует нижней ветви кривой $b_2(R)$.

Фиг. 1 (линия 1) показывает, что учет непараллельности среднего течения приводит к небольшому изменению нелинейной поправки к коэффициенту усиления. По-прежнему на нижней ветви нейтральной кривой и при критических значениях параметров имеет место мягкое возбуждение. Характерен лишь сдвиг кривой $a_2(R)$ за счет увеличения a_{02} , приводящий к незначительному расширению области жесткого возбуждения. Уравнение для частоты ω изменяется с учетом непараллельности среднего течения более заметно: коэффициент b_2 может уменьшаться примерно на 30% (фиг. 2, линия 1).

На фиг. 3 линии 1, 2 изображают при $R=302.4$, $\alpha=0.172$ зависимость от y скорости среднего вторичного течения, полученную с учетом непараллельности и в пред-



Фиг. 3

положении квазипараллельности. Для непараллельного течения характерен более наполненный профиль в окрестности стенки.

Функции Φ_{11} , Φ_{22} , g находились с помощью метода Рунге — Кутты и процедуры ортогонализации, предложенной в [10]. Интегралы J_1 , J_{02} , J_{22} и функция тока среднего вторичного течения также вычислялись по методу Рунге — Кутты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stuart J. T.* On the non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid. Mech.*, 1960, vol. 9, pt 3.
2. *Watson J.* On non-linear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. *J. Fluid. Mech.*, 1960, vol. 9, pt 3.
3. *Reynolds W. C., Potter M. C.* Finite amplitude instability of parallel shear flows. *J. Fluid. Mech.*, 1967, vol. 27, pt 3.
4. *Шкадов В. Я.* О нелинейном развитии возмущений в плоскопараллельном течении Пуазейля. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 2, стр. 49—57.
5. *Андрейчиков И. П., Юдович В. И.* Об автоколебательных режимах, отвечающих-ся от течения Пуазейля в плоском канале. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, стр. 791—794.
6. *Струминский В. В.* К нелинейной теории развития аэродинамических возмущений. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, стр. 1046.
7. *Лихачев О. А., Штерн В. Н.* Автоколебательное течение в пограничном слое. ПМТФ, 1975, № 4.
8. *Уринцев А. Л.* Возникновение автоколебаний в пограничном слое. Сборник «Пристенное турбулентное течение». Тр. XVIII Сибирского теплофизического семинара, ч. 1, Новосибирск, 1975.
9. *Chi-Hay Ling, Reynolds W. C.* Non-parallel flow corrections for the stability of shear flows. *J. Fluid. Mech.*, 1973, vol. 59, pt. 3.
10. *Годунов С. К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. н., 1961, т. 16, вып. 3.

УДК 532.528

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СУПЕРКАВИТИРУЮЩИХ НАСОСОВ ИЛИ ГИДРОТУРБИН

В. М. ИВЧЕНКО

(Красноярск)

Излагается трехмерная линеаризованная теория суперкавитирующего насоса или гидротурбины с конечными размерами лопастей и каверы в трубе кругового сечения. Построено фундаментальное решение (потенциал источника в трубе) и указаны численные методы решения прямой и обратной краевых задач, необходимых для детального расчета и проектирования осевых гидромашин в режиме развитой кавитации. Приведены некоторые результаты расчетов.

Расчет характеристик водяных насосов и гидротурбин обычно производится в рамках одномерной, гидравлической теории, в том числе и для режимов кавитации (см., например, [1]). В режиме суперкавитации, когда каверы замыкаются далеко за пределами лопастей, даже малые изменения в форме лопастей и кинематике потока приводят к большим изменениям не только локальных, но и суммарных гидродинамических характеристик насоса или гидротурбины. Имеют место сильные взаимодействия лопастей, каверы и стенок трубы, существенно влияющие на все гидродинамические характеристики потока. Их учет в полной мере возможен лишь в рамках расширенной вихревой теории суперкавитирующей лопасти [2, 3], кратко изложению которой посвящена данная работа.

1. Краевые задачи. Для насосо- и гидротурбостроения представляют интерес две основные задачи: проектировочной и поверочного расчета, называемые соответственно обратной и прямой краевыми задачами.

Обратная задача заключается в определении формы суперкавитирующих лопастей и образующихся кавер f_c, Λ по заданному распределению нагрузки $[p]$, представляемой некоторой гладкой функцией.

Для стационарных режимов работы насоса (гидротурбины) следует использовать условия непротекания, постоянства давления p_h в кавере и конечность ее размеров (так называемое условие замкнутости каверы как линейный аналог схемы Рябушинского), что приведет [3] к системе уравнений и граничных условий

$$(1.1) \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1 + S_2} \left[\frac{\partial p}{\partial n} \right] L dS_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \iint_{S_1}^* [p] \frac{\partial L}{\partial n'} dS_1 - \frac{[p]}{2} - (p_\infty - p_h)$$