

УДК 532.526

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЛАМИНАРНОЙ ЗОНЫ СМЕШЕНИЯ С ВНЕШНИМ ПОТОКОМ

Г. П. ШИНКИН

(Москва)

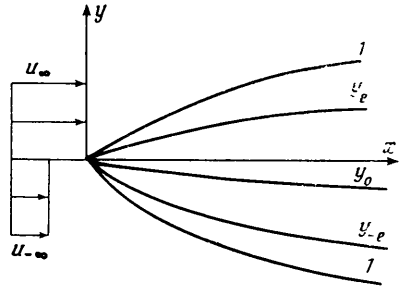
В гиперзвуковом приближении рассматривается взаимодействие ламинарной зоны смешения с внешним потоком через давление. Разделяющая линия тока находится из условия равенства индуцированного давления по обе стороны от зоны смешения [1]. В асимптотических областях слабого и сильного взаимодействия в приближении локального подобия, обоснованного для смешения потоков в [2], получены аналитические решения для толщин вытеснения, разделяющей линии тока и индуцированного давления. Установлен параметр взаимодействия.

1. Анализ взаимодействия будем проводить, считая, что смешиваются однородные потоки совершенного газа и что их числа Маха велики ($M_\infty \gg 1$, $M_{-\infty} \gg 1$, индексы ∞ и $-\infty$ соответствуют невозмущенным параметрам верхнего и нижнего потоков). Схема поля течения, индуцированного слоем смешения, изображена на фиг. 1, где x, y — прямоугольная система координат; y_e, y_{-e} — верхняя и нижняя границы слоя смешения соответственно; y_0 — нулевая линия тока; I — ударная волна.

Вязкая зона смешения рассматривается отдельно от невязкого ударного слоя. Такое разделение возможно, так как ударная волна не может совпадать с границами слоя смешения из-за низкого значения плотности в нем при гиперзвуковых числах Маха [3]. По этой же причине можно считать, что $y_e = y_0 + \delta_e$, $y_{-e} = y_0 + \delta_{-e}$, где

$$(1.1) \quad \delta_e = \int_{y_0}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e} \right) dy$$

$$\delta_{-e} = \int_{-\infty}^{y_0} \left(\frac{\rho u}{\rho_{-e} u_{-e}} - 1 \right) dy$$



Фиг. 1

толщины вытеснения слоя смешения (ρ, u — плотность, продольная составляющая скорости, индексы e и $-e$ соответствуют параметрам на верхней и нижней границах слоя смешения), а зона смешения эквивалентна обтекаемому телу с образующими y_e и y_{-e} . В приближении касательных клиньев индуцированное давление описывается соотношением [4]

$$(1.2) \quad \frac{p_e}{p_\infty} = 1 + \gamma K^2 \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} \right)^2 + \frac{1}{K^2}} + \frac{\gamma+1}{4} \right)$$

Здесь γ — показатель адиабаты, $K = M_\infty dy_e/dx$.

При исследовании взаимодействия через давление можно совершенно естественно выделить две асимптотические области слабого и сильного взаимодействия.

2. В области сильного взаимодействия $K^2 \gg 1$. При этом из (1.2) получим

$$(2.1) \quad \frac{p_e}{p_\infty} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} K^2 + \frac{3\gamma+1}{\gamma+1} + O(K^{-2})$$

Из условия равенства индуцированного давления по обе стороны от слоя смешения имеем

$$(2.2) \quad y_0 = - \frac{M_\infty \delta_e M_{-\infty} \delta_{-e}}{M_\infty + M_{-\infty}}$$

Для вычисления толщин вытеснения слоя смешения будем использовать принцип локального подобия [2], при этом будем считать для простоты $\rho u = c \mu$ (c — константа, μ — коэффициент вязкости). С учетом $M_e \gg 1$, $M_{-e} \gg 1$, $u_e = u_\infty$ выражения (1.1)

запишутся в виде

$$(2.3) \quad \delta_e = \delta_\infty \frac{\gamma-1}{2} \frac{\overline{\gamma c p_\infty u_\infty u_\infty}}{\gamma p_\infty} \frac{\sqrt{\int_0^x (p_e/p_\infty) dx}}{p_e/p_\infty}, \quad \delta_{-e} = -\delta_e \frac{\delta_{-\infty}}{\delta_\infty}$$

$$(2.4) \quad \delta_\infty = \int_0^\infty [i_{01}(\xi) - u_1^2(\xi)] d\xi, \quad \delta_{-\infty} = \int_{-\infty}^0 [i_{01}(\xi) - u_1^2(\xi)] d\xi$$

$$i_{01} = i_0/i_{0e}, \quad u_1 = u/u_e, \quad \xi = u_e \int_0^y \rho dy / \sqrt{\int_0^x \rho_e u_e dx}$$

Здесь i_0 — энтальпия торможения.

Если предположить, что образующие эквивалентного тела y_e и y_{-e} описываются степенной кривой x^n , то из (2.1) следует, что $p_e/p_\infty \sim x^{2(n-1)}$. При таком законе изменения давления из (2.3) получим $\delta_e \sim x^{1/2-n}$, $\delta_{-e} \sim x^{1/2-n}$, а следовательно, и $y_e \sim x^{1/2-n}$. Из условия согласованности решения в членах низшего порядка получим, что $n=3/4$ ¹. Этот результат подсказывает, что решение для δ_e и δ_{-e} нужно искать в виде

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \delta_e &= x \delta_0 \left(\frac{1}{M_\infty} + \frac{1}{M_{-\infty}} \right) \chi^{1/2} \left[1 + \frac{\delta_1}{\chi} + O(\chi^{-2}) \right] \\ \delta_{-e} &= x \gamma_0 \left(\frac{1}{M_\infty} + \frac{1}{M_{-\infty}} \right) \chi^{1/2} \left[1 + \frac{\gamma_1}{\chi} + O(\chi^{-2}) \right] \\ \chi &= \frac{M_\infty^3}{1 + M_\infty/M_{-\infty}} \frac{1}{\gamma \text{Re}_\infty}, \quad \text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty} \end{aligned}$$

Подставив (2.5) в (2.1), получим для индуцированного давления

$$(2.6) \quad \frac{p_e}{p_\infty} = \frac{\gamma(\gamma+1)}{2} \chi \left[a + \frac{b}{\chi} + O(\chi^{-2}) \right]$$

$$(2.7) \quad a = \frac{9}{16} (\delta_0 - \gamma_0)^2, \quad b = \frac{15}{8} (\delta_0 - \gamma_0) (\delta_1 \delta_0 - \gamma_0 \gamma_1) + \frac{2(3\gamma+1)}{\gamma(\gamma+1)^2}$$

Подставляя выражение для давления (2.6) в (2.3) и сравнивая полученные зависимости с (2.5), имеем

$$(2.8) \quad \delta_0 = \delta_\infty \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)a}, \quad \gamma_0 = -\delta_0 \frac{\delta_{-\infty}}{\delta_\infty}, \quad \delta_1 = \gamma_1 = -\frac{3b}{4a}$$

Решая с учетом (2.7) эту систему уравнений, определяем коэффициенты в разложениях (2.5)

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \delta_0 &= \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\gamma-1}{\gamma(\gamma+1)} \frac{\delta_\infty}{1 + \delta_{-\infty}/\delta_\infty}}, \quad \gamma_0 = -\delta_0 \frac{\delta_{-\infty}}{\delta_\infty} \\ \gamma_1 &= \delta_1 = -\frac{16}{21} \frac{3\gamma+1}{\gamma(\gamma+1)^2} \frac{1}{(\delta_0 - \gamma_0)^2} \end{aligned}$$

3. Область слабого взаимодействия характеризуется малым возмущением первоначальных условий течения, вызываемым слоем смещения. Здесь $K \ll 1$, при этом из (1.2) получим

$$(3.1) \quad \frac{p_e}{p_\infty} = 1 + \gamma K + \frac{\gamma(\gamma+1)}{4} K^2 + O(K^3)$$

¹ В этих рассуждениях не используется приближение локального подобия, так как при рассматриваемых числах Маха, принятом законе для вязкости и $p_e/p_\infty \sim x^{2(n-1)}$ решение будет автомодельным.

В нулевом приближении для толщин вытеснения имеем

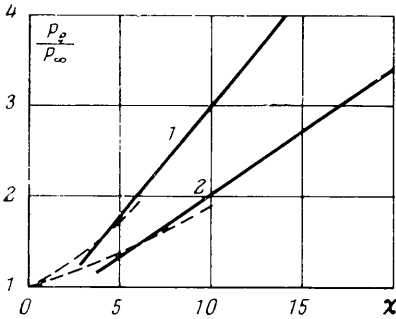
$$\delta_e^0 = \int_{y_0}^{\infty} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{\infty}} \right) dy = x \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{1}{M_{\infty}} + \frac{1}{M_{-\infty}} \right) \delta_{\infty} \chi$$

$$\delta_{-e}^0 = - \int_{-\infty}^{y_0} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_{\infty} u_{-\infty}} \right) dy = -x \frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{1}{M_{\infty}} + \frac{1}{M_{-\infty}} \right) \delta_{-\infty} \chi$$

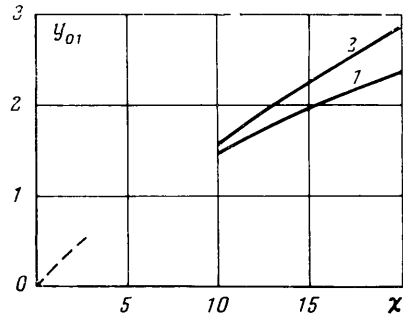
Формула для давления (3.1) с учетом (3.2) и (2.2) примет вид

$$(3.3) \quad \frac{p_e}{p_{\infty}} = 1 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{4} (\delta_{\infty} + \delta_{-\infty}) \chi + \frac{\gamma(\gamma+1)(\gamma-1)^2}{64} (\delta_{\infty} + \delta_{-\infty})^2 \chi^2 + O(\chi^3)$$

Разложение (3.3) верно именно до членов второго порядка, так как можно показать (в частности, на основе локального подобия), что в первом приближении



Фиг. 2



Фиг. 3

$\delta_e^1 = \delta_e^0 + \text{const}$, $\delta_{-e}^1 = \delta_{-e}^0 + \text{const}$, т. е. наклон эквивалентного тела в первом приближении не изменяется.

4. Как для слабого, так и для сильного взаимодействия коэффициенты разложения по χ зависят от величин δ_{∞} и $\delta_{-\infty}$, которые в свою очередь при рассматриваемых числах Маха зависят только от отношения скоростей $u_{-\infty}/u_{\infty}$ и числа Прандтля Pr . Используя рассчитанные профили автомодельного смещения [2], можно определить $\delta_{-\infty}$ и δ_{∞} . Так при $\text{Pr}=0.72$ и $u_{-\infty}/u_{\infty}=0.1, 0.3$ $\delta_{\infty}=0.28, \delta_{-\infty}=0.55$ и $\delta_{\infty}=0.2, \delta_{-\infty}=0.31$ соответственно. Коэффициенты разложения при $\gamma=1.4$ принимают следующие значения: $\delta_0=0.17, \gamma_0=-0.33, \gamma_1=-2$ ($u_{-\infty}/u_{\infty}=0.1$); $\delta_0=0.15, \gamma_0=-0.23, \gamma_1=-3.4$ ($u_{-\infty}/u_{\infty}=0.3$).

Введем для удобства безразмерную нулевую линию тока

$$(4.1) \quad y_{01} = \frac{y_0}{x} \left(\frac{\delta_{\infty}}{M_{\infty}} - \frac{\delta_{-\infty}}{M_{-\infty}} \right)^{-1}$$

Тогда в области сильного взаимодействия формулы для давления (2.6) и нулевой линии тока (4.1) примут вид: $p_e/p_{\infty}=0.24\chi-0.59, y_{01}=0.59\chi^{1/2}(1-2/\chi)$ при $u_{-\infty}/u_{\infty}=0.1$ и $p_e/p_{\infty}=0.14\chi+0.63, y_{01}=0.75\chi^{1/2}(1-3.4/\chi)$ при $u_{-\infty}/u_{\infty}=0.3$. В области слабого взаимодействия $p_e/p_{\infty}=1+0.12\chi+0.006\chi^2$ ($u_{-\infty}/u_{\infty}=0.1$), $p_e/p_{\infty}=1+0.07\chi+0.002\chi^2$ ($u_{-\infty}/u_{\infty}=0.3$), $y_{01}=0.2\chi$.

На фиг. 2, 3 дано графическое представление решений. Пунктирная линия соответствует решениям в области слабого взаимодействия, сплошная — в области сильного взаимодействия ($1-u_{-\infty}/u_{\infty}=0.1, 2-u_{-\infty}/u_{\infty}=0.3$). Решения для давления на фиг. 2 продолжены в область таких значений χ , где они в силу своей асимптотичности, вообще говоря, не могут быть применены. Но, как видно из графика, эти решения достаточно плавно переходят друг в друга, т. е., за исключением узкой переходной области, описывают всю область взаимодействия.

Автор благодарит И. П. Мурзинова и В. Я. Нейланда за советы и замечания.

Поступила 12 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Ting L. On the mixing of two parallel streams. J. Math. and Phys., 1959, vol. 38, p. 153—165.
2. Мурзинов И. Н., Шинкин Г. П. Ламинарное смешение однородных потоков при наличии градиента давления. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
3. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Теоретическая гидромеханика, № 4. М., Оборонгиз, 1949.

УДК 532.526.013.4

О ВОЗМУЩЕНИЯХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ
В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

С. Я. ГЕРЦЕНШТЕИН, Ю. М. ШТЕМЛЕР

(Москва)

Нелинейное развитие волн Толмина — Шлихтинга в пограничном слое изучается с учетом непараллельности среднего течения. Исследование проводится с помощью модифицированного метода Стюарта — Ватсона [1—3]. Дается сравнение с результатами, полученными в обычном квазипараллельном подходе.

Без учета непараллельности возмущения конечной амплитуды рассматривались, например, в работах [1—3].

Рассматривается плоское движение вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение для функции тока ψ записывается в виде

$$(1) \quad \Delta \psi_t + \psi_y \Delta \psi_x - \psi_x \Delta \psi_y - 1/R \Delta^2 \psi = 0$$

Здесь $R = Ul/\nu$ — число Рейнольдса, построенное по характерной длине l и скорости U , ν — кинематическая вязкость.

Представим функцию тока в виде суммы функций тока основного течения и возмущения

$$\psi(x, y, t) = \varphi_0(x, y) + \varphi(x, y, t)$$

Предполагая, что φ_0 удовлетворяет (1), выпишем уравнение для φ

$$(2) \quad \begin{aligned} B\varphi &= \varphi_y \Delta \varphi_x - \varphi_x \Delta \varphi_y \\ B &\equiv -\frac{\partial \Delta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \frac{\partial \Delta \varphi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Delta \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \frac{1}{R} \Delta^2 \end{aligned}$$

Потребуем, чтобы скорости $u = \varphi_y$ и $v = -\varphi_x$ обращались в нуль на твердой границе и были ограничены в равномерном потоке.

Разложим $\varphi_0(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности некоторого $x = x_0$

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_0^0(y) + \varepsilon \varphi_0^1(y) \xi + O(\varepsilon), \quad \varphi_0^0(y) = \varphi_0(x_0, y), \quad \varepsilon \varphi_0^1(y) = \partial \varphi_0 / \partial x|_{x=x_0},$$

$$\xi = x - x_0$$

Для течения Блазиуса размерная функция тока Φ_0 дается выражением

$$\Phi_0 = (\nu X U_\infty)^{1/2} f_0(\eta), \quad \eta = Y(U_\infty / \nu X)^{1/2}$$

Здесь X и Y — размерные координаты, U_∞ — скорость потока на бесконечности, а f_0 — решение задачи

$$2f_0''' + f_0 f_0'' = 0, \quad f_0(0) = f_0'(0) = 0, \quad f_0'(\infty) = 1$$

Примем также, что

$$l = (\nu X_0 / U_\infty)^{1/2}, \quad U = U_\infty, \quad \varepsilon = 1/R, \quad X_0 = x_0 l$$

Тогда

$$(3) \quad \varphi_0^0(y) = f_0(y), \quad \varphi_0^1(y) = 1/2[f_0(y) - y f_0'(y)]$$

Следуя [3] и учитывая непараллельность среднего течения, ищем решение нелинейной задачи в виде

$$(4) \quad \begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \varphi_0^0(y) + \varepsilon \varphi_0^1(y) \xi + A^2 [\varphi_0^2(y) + \varepsilon \varphi_0^3(y) \xi] + \dots \\ &\dots + A / (i\alpha) [-\varphi_{11}(y) e^{is} + \varphi_{11}^*(y) e^{-is}] + A^2 / (2i\alpha) [-\varphi_{22}(y) e^{2is} - \varphi_{22}^*(y) e^{-2is}] + \\ &+ A^2 \{1 / (i\alpha) [-\varphi_{13}(y) e^{is} + \varphi_{13}^*(y) e^{-is}] + \dots\} + \dots \end{aligned}$$

Здесь звездочки обозначают комплексно-сопряженные величины

$$s = \alpha \xi + \omega t, \quad A = A(t), \quad \omega = \omega(A)$$

$$(5) \quad A^{-1} dA/dt = a_0 + a_2 A^2 + \dots, \quad \omega + d\omega/dA (tdA/dt) = b_0 + b_2 A^2 + \dots$$