

Имеем

$$\operatorname{div} \pi = -\frac{2}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \Delta \mathbf{V} + \nabla \omega \times \mathbf{k} = \frac{4}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) - \nabla \omega \times \mathbf{k}$$

Из уравнения неразрывности следует

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho = (2\gamma RT)^{-1} \mathbf{V} \cdot \nabla (v^2) = -(\gamma RT)^{-1} v^2 \partial v / \partial l$$

где $\partial / \partial l$ — производная по направлению линии тока. При $v \rightarrow 0$

$$\nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) = -(\gamma RT)^{-1} (\partial v / \partial l) \nabla v^2 + O(v^2 \omega)$$

Подставляя в (2.10) эти выражения, используя (2.8) и оценки $\partial v / \partial n \sim \partial v / \partial l \sim \omega$, получим при $v \rightarrow 0$

$$(2.11) \quad \frac{d\Omega}{d\psi} \Gamma + \frac{1}{2} \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} Q = \frac{8}{3} \frac{1}{\gamma RT_0} \oint v \left(\frac{\partial v}{\partial l} \right)^2 dl$$

В сжимаемом газе при $|\mathbf{V}| \ll 1$ система уравнений (2.7), (2.9), (2.10) вместе с уравнением Клапейрона заменяет систему (1.5), (1.7), где $\omega = \text{const}$ для несжимаемой жидкости. Если решение этой системы существует, то $\Omega \sim dp_0 / d\psi \sim dT_0 / d\psi \sim 1$ и, следовательно, правая часть (2.11) имеет порядок Γ , т. е. не может быть отброшена при $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$.

Таким образом, в отличие от поступательного движения влияние сжимаемости в циркуляционной области при $\mu \rightarrow 0$ является существенным даже при малых скоростях потока. Попытка описания такого течения в рамках несжимаемой жидкости приводит, вообще говоря, к неправильному результату.

Действительно, подставим решение системы (1.5), (1.7) при $\omega = \text{const}$ $\rho = \text{const}$ в (2.7), (2.9), (2.11) при $p_0 = \rho_0 RT_0 : \omega(\psi)$, $T(\psi)$ вместо $\Omega(\psi)$, $T_0(\psi)$. Уравнение (2.7) удовлетворится без ограничений, а (2.9), (2.11) — только при $\gamma \rightarrow \infty$. Однако даже в последнем случае уравнение Клапейрона (с $\rho = \text{const}$) может быть удовлетворено только при $T_\psi = \text{const}$ (в соответствии с (2.6)). Для этого в (1.5) требуется, чтобы $\Gamma(\psi) = CQ(\psi)$, $C = \text{const}$, т. е. $v^2 = C\psi$, что соответствует круговой циркуляционной области.

Поступила 10 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt 2.
2. Нейланд В. Я. К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений с отрывными зонами. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.

УДК 532.517.013.4

О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ СОВМЕСТНО С ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Е. А. ДЕМЕХИН

(Краснодар)

Двухфазное течение пленок жидкости часто встречается в практике, однако существует ограниченное число теоретических работ, посвященных данной задаче. Задача о линейной устойчивости совместного движения вязкой пленки жидкости и потока газа была поставлена в [1] и в несколько иной формулировке в [2]. В [1–8] аналитически изучена линейная устойчивость плоскопараллельного движения пленки в некоторых предельных случаях. Вопрос о границах применимости аналитических подходов остается открытым. Поэтому необходим точный численный анализ задачи об устойчивости течения в достаточно широкой области.

В данной работе показана возможность раздельного решения задачи для газа и для жидкости. Уравнение Орра — Зоммерфельда интегрировалось численно; полученные результаты сравнивались с данными аналитических расчетов.

Исследуемое течение изображено на фиг. 1. Невозмущенная поверхность раздела соответствует началу координат. Величины, относящиеся к газу, будут обозначаться прописными латинскими буквами или греческими с индексом g ; величины, относя-

щиеся к жидкости, — строчными латинскими или греческими с индексом l . Профиль течения жидкости линеен. Газовый поток считается турбулентным. Так как масштаб турбулентных пульсаций намного меньше масштаба наблюдаемых при потере устойчивости длин волн, то турбулентными пульсациями пренебрегается и считается, что влияние турбулентности проявляется только через осредненный профиль скорости [9].

В невозмущенном случае на поверхности раздела выполняются условия

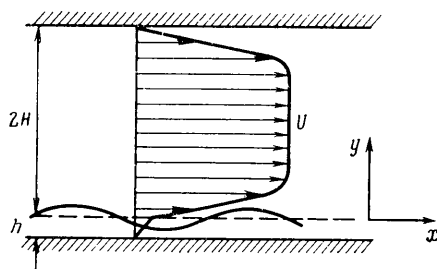
$$U_0 = u_0, \quad \mu_g \frac{dU_0}{dy} = \mu_l \frac{u_0}{h}$$

На средний поток накладываются малые возмущения

$$U \rightarrow U + U', \quad V \rightarrow V + V', \quad u \rightarrow u + u', \quad v \rightarrow v + v'$$

и рассматриваются возмущенные течения жидкости и газа.

Граничные условия, перенесенные на невозмущенную поверхность раздела, имеют вид



Фиг. 1

$$U' + \frac{dU_0}{dy} \xi' = u' + \frac{du_0}{dy} \xi', \quad V' = v'$$

$$v' = \frac{\partial \xi'}{\partial t} + u \frac{\partial \xi'}{\partial x}$$

$$\tau_g' + \frac{d\tau_g}{dy} \xi' = \tau_l' + \frac{d\tau_l}{dy} \xi'$$

$$P' - 2\mu_g \frac{\partial V'}{\partial y} =$$

$$= p' - 2\mu_l \frac{\partial v'}{\partial y} + \sigma \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} - g \xi'$$

Рассматривается устойчивость к возмущениям $\xi' = \xi \exp(i\alpha(x-ct))$. Далее величины в газе будут считаться безразмерными и отнесенными к скорости газа в середине потока U_m , половине высоты канала H , плотности газа ρ_g , динамической вязкости μ_g . Величины в жидкости будут отнесены к скорости на поверхности раздела u_0 , толщине пленки h , плотности жидкости ρ_l , динамической вязкости μ_l . (Тогда, например, безразмерное волновое число α_h при рассмотрении со стороны газа будет отличаться от волнового числа α_l со стороны жидкости в H/h раз и т. д.)

Введем безразмерные переменные F и f из соотношений

$$V' = -i\alpha_g F \xi_g \exp(i\alpha_g(X-CT)), \quad v' = -i\alpha_l f \xi_l \exp(i\alpha_l(x-ct))$$

Подстановка F и f в линеаризованные уравнения Навье — Стокса и уравнение расхода после исключения давления даст уравнение Орра — Зоммерфельда соответственно для газа и жидкости с условиями на границе раздела

$$(1) \quad L_g(F) \equiv \left\{ (U-C) \left(\frac{d^2}{dY^2} - \alpha_g^2 \right) - \frac{d^2 U}{dY^2} - (i\alpha_g R_g)^{-1} \left(\frac{d^2}{dY^2} - \alpha_g^2 \right)^2 \right\} F = 0$$

$$(2) \quad L_l(f) \equiv \left\{ (u-c) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_l^2 \right) - (i\alpha_l R_l)^{-1} \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_l^2 \right)^2 \right\} f = 0$$

$$(3) \quad \frac{dF}{dY} + Q = \left(\frac{u_0}{U_m} \right) \left(\frac{H}{h} \right) \frac{df}{dy} + \frac{\mu_g}{\mu_l} Q$$

$$(4) \quad F = C - U_0, \quad f = c - 1$$

$$(5) \quad \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha_l^2 f = \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \left(\frac{U_m}{u_0} \right)^2 \left(\frac{h}{H} \right) \left(\frac{R_l}{R_g} \right) \left(\frac{d^2 F}{dY^2} + \alpha_g^2 F \right)$$

$$(6) \quad p + 2i\alpha_l R_l^{-1} \frac{df}{dy} - \alpha_l^2 W e - G = \left(\frac{\rho_g}{\rho_l} \right) \left(\frac{U_m}{u_0} \right)^2 \left(\frac{h}{H} \right) \left(P + 2i\alpha_g R_g^{-1} \frac{dF}{dY} \right)$$

$$W e = \frac{\sigma}{\rho_l u_0^2 h}, \quad G = \frac{gh}{u_0^2}, \quad Q = \frac{dU_0}{dY}$$

Так как $(u_0 H)/(U_m h) = Q(\mu_g/\mu_l)$, то (3) примет вид

$$(7) \quad \frac{dF}{dY} + Q \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_l} - \frac{\mu_g}{\mu_l} \frac{df}{dy} \right) = 0$$

Из (7) с учетом (5), (6) следует, что порядок df/dy не больше порядка dF/dY , но тогда в (7) можно пренебречь членом $(\mu_g/\mu_l) df/dy$: $dF/dY + Q = 0$.

Тогда задачи для газа и жидкости имеют вид

$$(8) \quad L_g(F) = 0$$

$$(9) \quad Y=0: \quad \frac{dF}{dY} + Q = 0, \quad F = C - U_0; \quad Y=2: \quad \frac{dF}{dY} = F = 0$$

$$(10) \quad L_l(f) = 0$$

$$(11) \quad y=0: \quad f = c - 1$$

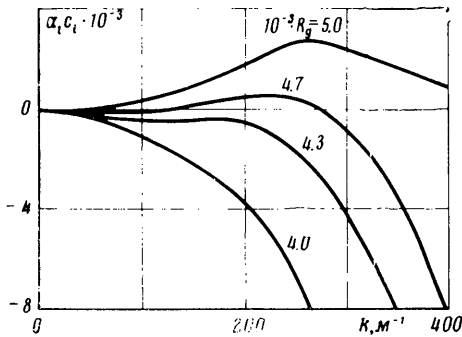
$$(12) \quad \frac{d^2 f}{dy^2} + \alpha_l^2 f = \kappa R_l T$$

$$(13) \quad p + 2i\alpha_l R_l^{-1} \frac{df}{dy} = \kappa(P - 2i\alpha_g R_g^{-1} Q) + \alpha_l^2 We + G$$

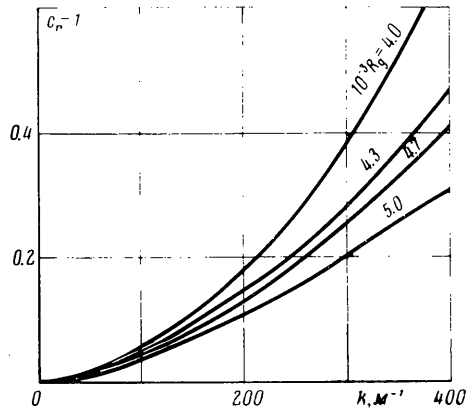
$$(14) \quad y=-1: \quad \frac{df}{dy} = f = 0, \quad \kappa = \frac{\rho_l}{\rho_g} \frac{\mu_g}{\mu_l} \frac{U_m}{u_0} \frac{1}{Q}$$

Здесь P и T — давление и касательное напряжение со стороны газового потока, определяемые из (8), (9).

Для сопряжения задач в жидкости и газе был использован тот экспериментальный факт [4-6], что скорости волн малы по сравнению с характерными скоростями



Фиг. 2



Фиг. 3

газового потока и имеют порядок скоростей жидкости в пленке. В краевой задаче для газа (8), (9) полагалось $C=0$, что полностью определяло задачу в газе. Численным интегрированием (8) с условиями (9) находились значения возмущений давления и касательного напряжения газа P и T на границе раздела. При известных значениях P и T задача для жидкости (10) — (14) определена.

Решение (10) — (14) будет существовать для некоторых особых значений c . Собственные значения c и собственные функции f (10) — (14) находились следующим образом: при некотором начальном приближении $c=c^{(0)}$ (10) численно интегрировалось методом Рунге — Кутты от $y=-1$ до $y=0$ так, чтобы оно удовлетворяло условиям (12) — (14). Условие (11) заменялось эквивалентным

$$c-1 = \psi(c-1), \quad \psi(c-1) \equiv (c-1) + \lambda[(c-1) - f(c-1)]$$

Величина λ подбиралась таким образом, чтобы последовательность отображений $(c-1)^{(n+1)} = \psi(c-1)^{(n)}$ была сжимающей.

Затем следует возвращение к задаче для газа при найденном значении $C = (u_0/U_m)c$. Находятся новые значения P и T и следует переход к задаче (10)–(14). Цикл повторяется до достижения требуемой точности.

Для рассмотренных в этой работе вариантов было достаточно считать для задачи в газе $C=0$. Следующие приближения могли менять в $c-1$ лишь четвертую значащую цифру. Если в задаче (8), (9), кроме того, считать $U_0=0$, то P и T – функции только R_g и волнового числа и находятся независимо от режимов течения пленки.

Расчеты велись для случая, когда газом был воздух, а жидкостью – вода. Принималось $\nu_l = 7.5 \cdot 10^{-7}$ м²/сек, $\nu_g = 1.6 \cdot 10^{-5}$ м²/сек, $\rho_l = 10^3$ кг/м³, $\rho_g = 1.15$ кг/м³, $\sigma = 7.2 \cdot 10^{-2}$ н/м.

Некоторые результаты расчетов приводятся на фиг. 2–4. Так, на фиг. 2, 3 показана зависимость коэффициента роста $\alpha_l c$ и скорости волны c_r от волнового числа при $R_l=10$ и различных значениях R_g . На фиг. 4 представлена кривая нейтральной устойчивости в координатах R_g-R_l . Кривая 4 представляет собой зависимость (c_r-1) от R_l при критических параметрах.

Пунктирные линии 2 и 3 соответствуют кривым нейтральной устойчивости по теориям работ [4, 6] соответственно.

При больших R_l вязкость играет малую гасящую роль, поэтому неустойчивость наступает при сравнительно малых критических скоростях по газу. Так как $c_r-1 > 0$, то происходит необратимый перенос энергии от газового потока к жидкости. При уменьшении R_l , как видно из фиг. 4, критическое число R_g увеличивается, что связано с возрастающим гасящим влиянием вязкости. Однако с $R_l \approx 12$ кривая нейтральной устойчивости начинает перемещаться вниз, и неустойчивость наступает при меньших значениях R_g .

Это связано с тем, что для очень тонких пленок силы аэродинамического подсоса превышают возрастающие силы веса и поверхностного натяжения [4], т. е. имеет место неустойчивость Кельвина – Гельмгольца, для которой влияние вязкости несущественно.

Автор благодарит Э. Э. Марковича за руководство работой и В. Я. Шкадова за внимание к работе и ряд полезных замечаний.

Поступила 27 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Feldman S. On the hydrodynamic stability of two viscous incompressible fluids in parallel uniform shearing motion. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, p. 343.
2. Зайцев А. А. К вопросу об устойчивости вязкой пленки на твердом теле в потоке газа. Докл. АН СССР, 1960, т. 130, вып. 6.
3. Miles J. W. The hydrodynamic stability of a thin film of a liquid in uniform shearing motion. J. Fluid Mech., 1960, vol. 8, p. 593.
4. Craic A. D. D. Wind-generated waves in thin liquid films. J. Fluid Mech., 1966, vol. 26, p. 369.
5. Craic A. D. D. Wind-generated waves in contaminated liquid films. J. Fluid Mech., 1968, vol. 31, p. 141.
6. Cohen L. S., Hanratty T. J. Generation of waves in the concurrent flow of air and a liquid. A. I. Ch. E. Journal, 1965, vol. 34, p. 467.
7. Любютская Л. В. Устойчивость плоскопараллельного потока вязкой жидкости под действием постоянного касательного напряжения и наклонной силы тяжести. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1961, стр. 1139.
8. Шкадов В. Я. К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3, стр. 133.
9. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary. J. Fluid Mech., 1959, vol. 6, p. 161.