

К ТЕОРЕМЕ БЭТЧЕЛОРА О ЦИРКУЛЯЦИОННОЙ ОБЛАСТИ

Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Теореме Бэтчелора [1] может быть дана следующая формулировка: «Если плоское стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости, обладающее замкнутыми линиями тока в ограниченной области, является пределом решения уравнений Навье – Стокса (с постоянным коэффициентом вязкости μ) при $\mu \rightarrow 0$, то в этой области завихренность ω постоянна».

Ниже в аналогичных предположениях метод доказательства этой теоремы применяется для выявления связи между температурой и функцией тока идеальной жидкости в области с замкнутыми линиями тока. При учете зависимости вязкости от температуры для распределений вихря и температуры получена система уравнений, из которой, в частности, следует, что постоянная завихренность в циркуляционной области возможна только в исключительном случае квазитвердого вращения. Последнее очевидно: предельное течение должно быть решением уравнений Навье – Стокса; $\omega = \text{const}$ является таким решением только для несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью (за исключением квазитвердого вращения).

Для сжимаемого газа аналогичная система уравнений получена в [2]. Ниже рассматривается ее предельная форма при малой скорости потока в циркуляционной области. Оказалось, что при ограниченном значении показателя адиабаты в отличие от несжимаемой жидкости главная часть вихря не постоянна даже при постоянной вязкости, а распределение температуры торможения отличается от температурной зависимости в несжимаемой жидкости.

1. Рассмотрим общий случай плоского течения вязкой несжимаемой жидкости, когда коэффициент вязкости зависит от температуры.

Уравнения Навье – Стокса имеют вид [3]

$$(1.1) \quad \rho(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \text{div } P$$

Здесь $\mathbf{V}$ – соленоидальный вектор скорости, ρ – плотность, P – тензор напряжений. В дальнейшем будет использоваться представление $P = -pE + 2\mu \nabla \mathbf{V} + \mu \omega D$, где E – единичный оператор, D – оператор поворота вектора на прямой угол, $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{F} \times \mathbf{k}$, $\omega \mathbf{k} = \text{rot } \mathbf{V}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – правая тройка ортов декартовой системы координат, $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ лежат в плоскости течения, $\mu = \mu(T)$ – коэффициент вязкости, p – давление, T – температура.

Уравнение энергии возьмем в форме [3]

$$(1.2) \quad \nabla \cdot [\rho \mathbf{V} (c_v T + 1/2 |\mathbf{V}|^2) - P \cdot \mathbf{V} - \lambda \nabla T] = 0$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, $\lambda = \sigma \mu$, $\sigma = \text{const}$, c_v – теплоемкость.

В идеальной жидкости ω , T – произвольные функции от функции тока. В потоке с незамкнутыми линиями тока они могут быть определены при надлежащей формулировке граничных условий. В области циркуляционного движения постановка таких условий, как правило, представляется физически необоснованной. Ниже показывается, что учет в циркуляционной зоне диссипативных процессов в главном приближении (1.1), (1.2) позволяет определить с точностью до постоянных эти произвольные функции.

Итак, предположим, что при достаточно малых значениях μ в некоторой «циркуляционной» области $G(\psi)$ (ψ – функция тока) существует стационарное решение уравнений Навье – Стокса с замкнутыми линиями тока, достаточно гладкое, непрерывно зависящее вместе с производными $\mathbf{V}$, T от μ и переходящее при $\mu \rightarrow 0$ в решение уравнений идеальной жидкости, причем $G(\psi)$ непрерывно преобразуется в ограниченную область.

Главный член асимптотического разложения по μ при $\mu \rightarrow 0$ выражается через решение уравнений идеальной жидкости, поэтому $T = T(\psi) + o(1)$, $\omega = \omega(\psi) + o(1)$ ($\mu \rightarrow 0$).

Положим для определенности $\mathbf{V} = \nabla \psi \times \mathbf{k}$, $\psi \geq 0$, $\psi = 0$ в «центре» области, т. е. в точке, лежащей внутри всех замкнутых линий тока; $\mathbf{n} \cdot \nabla \psi = \partial \psi / \partial n = |\nabla \psi| = |\mathbf{V}|$, где $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к линии тока; $\omega = -\Delta \psi \leq 0$.

Преобразовав $\text{div } P$, получим ($\mu_T = d\mu/dT$, $T_\psi = dT/d\psi$, $\omega_\psi = d\omega/d\psi$)

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \text{div } P &= -\nabla p + 2\nabla \mu \cdot \nabla \mathbf{V} + 2\mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{V}) + \nabla (\mu \omega) \times \mathbf{k} = \\ &= -\nabla p + 2\mu_T T_\psi (\nabla \psi \cdot \nabla \mathbf{V}) + (\mu_T T_\psi \omega - \mu \omega_\psi) \mathbf{V} \end{aligned}$$

После умножения (1.1) скалярно на элемент дуги dl линии тока и интегрирования по замкнутому контуру линии тока конвективные члены (без множителя μ) исчезнут. Используя (1.3) и переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, получим

$$(1.4) \quad \mu_T T_\psi Q = (\mu \omega_\psi - \mu_T T_\psi) G, \quad G = - \oint \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \oint |\mathbf{V}| dl, \quad Q = \oint (\partial |\mathbf{V}|^2 / \partial n) dl$$

Пропинтегрировав (1.2) по $G(\psi)$ и воспользовавшись формулой Грина, получим аналогично предыдущему, учитывая, что

$$(1.5) \quad \begin{aligned} P \cdot \mathbf{V} &= -p \mathbf{V} + 2\mu (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \mu \omega \mathbf{V} \times \mathbf{k} = -p \mathbf{V} + \mu \nabla (|\mathbf{V}|^2) + \mu \omega \nabla \psi \\ (\omega + \sigma T_\psi) G &= -Q \end{aligned}$$

Исключая из (1.4), (1.5) Q , получим

$$(1.6) \quad \mu \omega_\psi = -\sigma \mu_T (T_\psi)^2$$

Система (1.5), (1.6) вместе с уравнением Пуассона

$$(1.7) \quad \Delta \psi = -\omega(\psi)$$

может служить для определения в $G(\psi)$ неизвестных функций $\psi(x, y)$, $\omega(\psi)$, $T(\psi)$.

В случае $\mu = \text{const}$ эта система расщепляется: из (1.6) следует $\omega = \text{const}$, уравнение Пуассона решается при этом значении ω , после чего из (1.5) определяется $T(\psi)$.

Отметим некоторые свойства предельного решения (1.5)–(1.7).

1°. Так как $\mu_T \geq 0$ (обычно принимается $\mu = \mu_0 T^n$; $0.5 < n < 1$) из (1.6) следует $\omega_\psi \leq 0$, т. е. абсолютная величина вихря при перемещении изнутри циркуляционной области не убывает.

2°. $T_\psi \leq 0$. Для доказательства рассмотрим уравнение энергии в форме

$$c_V \rho \mathbf{V} \cdot \nabla T = \sigma \nabla \cdot (\mu \nabla T) + 2\mu [(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2], \quad \mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$$

Интегрируя по $G(\psi)$, используя формулу Грина и переходя к пределу при $\mu \rightarrow 0$, получим

$$(1.8) \quad -\sigma \mu_T \psi G = 2 \iint_{G(\psi)} \mu [(u_x^2 + v_y^2) + (u_y + v_x)^2] dx dy \geq 0$$

Выясним возможность аппроксимации решения (1.5)–(1.7) решением $\omega = \text{const}$ (например, вблизи центра области). Полагая $\omega_\psi = 0$, получим из (1.6) $T_\psi = 0$ при $\mu_T \neq 0$. Однако из (1.5) следует, что это возможно только при $|\mathbf{V}|^2 = C\psi$, т. е. циркуляционная область должна быть круговой (квазитвердое вращение). Таким образом, указанная аппроксимация возможна в общем случае, только если производная μ_T близка к нулю. Для использования зависимости $\mu = \mu_0 T^n$ требуется, чтобы в $G(\psi)$ было $T \gg 1$.

2. Для сжимаемого газа, как уже отмечалось, аналогичная (1.5), (1.6) система приведена в [2]. В связи с тем что наиболее типичным, по-видимому, является случай малых скоростей в $G(\psi)$, представляет интерес упрощенная форма этих уравнений при $|\mathbf{V}| \ll 1$. Ограничимся для простоты случаем $\mu = \text{const}$. Для получения уравнений вида (1.5)–(1.7) произведем процедуры, аналогичные вышеописанным, с уравнениями вязкого газа, а затем перейдем к пределу при $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$. Получаемые при этом уравнения будут отличаться от соответствующих уравнений для несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье–Стокса и энергии сжимаемого газа по-прежнему имеют вид (1.1), (1.2), если под P понимать выражение $P = -(p + \frac{1}{3}\mu \text{div } \mathbf{V})E + 2\mu \nabla \mathbf{V} + \mu \omega D$. Уравнением состояния (вместо $\rho = \text{const}$) будет уравнение Клапейрона $p = \rho RT$ (R – газовая постоянная), уравнением неразрывности $\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0$. Обозначим $\mu \lambda = P + pE$. Интегрируя (1.2) по области G , воспользовавшись формулой Грина и уравнением состояния, получим

$$(2.1) \quad \oint (\pi \cdot \mathbf{V} + \sigma \nabla T) \cdot \mathbf{n} dl = 0$$

С учетом уравнения неразрывности (1.2) можно представить в форме

$$(2.2) \quad \begin{aligned} C_p \rho \mathbf{V} \cdot \nabla T_0 &= \mu \text{div} (\pi \cdot \mathbf{V} + \sigma \nabla T) \\ (T_0 &= T + v^2/2C_p, \quad v = |\mathbf{V}|, \quad C_p = C_V + R, \quad \gamma = C_p/C_V) \end{aligned}$$

Обозначим $p_0 = p(T_0/T)^{\gamma/(\gamma-1)}$, $\rho_0 = p_0/RT_0$ (как известно, в идеальном газе p_0 , T_0 сохраняются вдоль линий тока). Уравнение (1.1) представим в виде

$$\frac{v^2}{2RT_0} \nabla T_0 + \nabla \ln p_0 - \frac{1}{RT} \mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = \frac{\mu}{p} \text{div } \pi$$

Умножим его скалярно на элемент дуги линии тока $d\mathbf{l}$ и проинтегрируем вдоль замкнутой линии тока. С учетом (2.2) получим

$$(2.3) \quad \oint \frac{1}{p} (\text{div } \pi) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{2C_p} \oint \frac{v}{pT_0} \text{div} (\pi \cdot \mathbf{V} + \sigma \nabla T) dl$$

Главные члены при $\mu \rightarrow 0$ уравнений (2.1), (2.3) (относительно неизвестных $p_0(\psi)$, $T_0(\psi)$ — полного давления и температуры торможения в идеальном газе) являются аналогами уравнений (1.5), (1.6) с учетом сжимаемости. По форме они отличаются от уравнений [2]; это отличие облегчает получение их предельной формы при $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$.

Модифицируем функцию тока идеального газа ψ по формуле $\nabla \psi = \mathbf{k} \times \mathbf{V} \rho / \rho_0(\psi)$. В связи с тем что $\rho/\rho_0(\psi) \rightarrow 1$ при $v \rightarrow 0$, $\nabla \psi \rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{V}$, т. е. при этом ψ совпадают с функцией тока несжимаемой жидкости.

Преобразовав $\text{rot } \mathbf{V} = \omega \mathbf{k}$, получим вместо (1.7)

$$(2.4) \quad \Delta \psi = - \frac{\rho}{\rho_0} \omega - \frac{T_0 \rho v}{2\gamma RT \rho_0} \frac{\partial(v^2/T_0)}{\partial n} \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} = \frac{v \rho}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \psi} \right)$$

Здесь $\partial/\partial n$ — производная по нормали к линии тока. В идеальном газе для ω имеет место выражение

$$(2.5) \quad -\omega = \frac{p}{\rho_0} \frac{d \ln p_0}{d\psi} + \frac{\rho v^2}{2\rho_0} \frac{d \ln T_0}{d\psi}$$

При $v \rightarrow 0$ в предположении, что $dT_0/d\psi \sim dp_0/d\psi$, получим

$$(2.6) \quad \omega = \Omega(\psi) = -\rho_0^{-1} dp_0/d\psi$$

Выражение $\Omega(\psi)$ при $\rho_0(\psi) = \text{const}$ совпадает с выражением $\omega(\psi)$ в несжимаемой жидкости.

При $v \rightarrow 0$ получим из (2.4), учитывая, что $\omega \sim |\nabla v|$, получим

$$(2.7) \quad \Delta \psi = -\Omega(\psi)$$

Для дальнейшего понадобится выражение $\partial\omega/\partial\psi$. Дифференцируя (2.5) и переходя к пределу при $v \rightarrow 0$, получим

$$(2.8) \quad \frac{\partial\omega}{\partial\psi} = \frac{d\Omega}{d\psi} + \frac{1}{2} \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} \frac{\partial(v^2)}{\partial\psi}$$

Преобразуем соотношение (2.1), удерживая в нем только главные члены, описываемые решением идеального газа

$$0 = \oint [2(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \omega \mathbf{V} \times \mathbf{k} - 2/3 \mathbf{V} (\text{div } \mathbf{V})] \cdot \mathbf{n} dl + \\ + \sigma (dT_0/d\psi) \oint v (\rho/\rho_0) dl + \sigma (2C_p)^{-1} \oint (\partial v^2/\partial n) dl$$

При $v \rightarrow 0$ получим

$$(2.9) \quad (\Omega + \sigma T_{0\psi}) \Gamma = -Q [1 - \sigma/(2C_p \gamma)]$$

Упростим (2.3) при $v \rightarrow 0$. Из формулы $\nabla \cdot (\pi \cdot \mathbf{V}) = (\nabla \cdot \pi) \cdot \mathbf{V} + |\pi \cdot (\nabla \mathbf{V})|$ следует, что $\text{div} (\pi \cdot \mathbf{V}) dl \sim v (\text{div } \pi) \cdot d\mathbf{l}$, а так как по (2.9) оба члена в (2.1) при $v \rightarrow 0$ одного порядка, получим, что в (2.3) можно пренебречь правой частью по сравнению с левой, т. е.

$$(2.10) \quad \oint (\text{div } \pi) d\mathbf{l} = 0$$

Имеем

$$\operatorname{div} \pi = -\frac{2}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + 2 \Delta \mathbf{V} + \nabla \omega \times \mathbf{k} = \frac{4}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) - \nabla \omega \times \mathbf{k}$$

Из уравнения неразрывности следует

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \ln \rho = (2\gamma RT)^{-1} \mathbf{V} \cdot \nabla (v^2) = -(\gamma RT)^{-1} v^2 \partial v / \partial l$$

где $\partial / \partial l$ — производная по направлению линии тока. При $v \rightarrow 0$

$$\nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) = -(\gamma RT)^{-1} (\partial v / \partial l) \nabla v^2 + O(v^2 \omega)$$

Подставляя в (2.10) эти выражения, используя (2.8) и оценки $\partial v / \partial n \sim \partial v / \partial l \sim \omega$, получим при $v \rightarrow 0$

$$(2.11) \quad \frac{d\Omega}{d\psi} \Gamma + \frac{1}{2} \frac{d \ln \rho_0}{d\psi} Q = \frac{8}{3} \frac{1}{\gamma RT_0} \oint v \left(\frac{\partial v}{\partial l} \right)^2 dl$$

В сжимаемом газе при $|\mathbf{V}| \ll 1$ система уравнений (2.7), (2.9), (2.10) вместе с уравнением Клапейрона заменяет систему (1.5), (1.7), где $\omega = \text{const}$ для несжимаемой жидкости. Если решение этой системы существует, то $\Omega \sim dp_0/d\psi \sim dT_0/d\psi \sim 1$ и, следовательно, правая часть (2.11) имеет порядок Γ , т. е. не может быть отброшена при $|\mathbf{V}| \rightarrow 0$.

Таким образом, в отличие от поступательного движения влияние сжимаемости в циркуляционной области при $\mu \rightarrow 0$ является существенным даже при малых скоростях потока. Попытка описания такого течения в рамках несжимаемой жидкости приводит, вообще говоря, к неправильному результату.

Действительно, подставим решение системы (1.5), (1.7) при $\omega = \text{const}$ $\rho = \text{const}$ в (2.7), (2.9), (2.11) при $p_0 = \rho_0 RT_0$: $\omega(\psi)$, $T(\psi)$ вместо $\Omega(\psi)$, $T_0(\psi)$. Уравнение (2.7) удовлетворится без ограничений, а (2.9), (2.11) — только при $\gamma \rightarrow \infty$. Однако даже в последнем случае уравнение Клапейрона (с $\rho = \text{const}$) может быть удовлетворено только при $T_\psi = \text{const}$ (в соответствии с (2.6)). Для этого в (1.5) требуется, чтобы $\Gamma(\psi) = CQ(\psi)$, $C = \text{const}$, т. е. $v^2 = C\psi$, что соответствует круговой циркуляционной области.

Поступила 10 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Batchelor G. K. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number. J. Fluid Mech., 1956, vol. 1, pt 2.
2. Нейланд В. Я. К асимптотической теории плоских стационарных сверхзвуковых течений с отрывными зонами. Изв. АН СССР, МЖТ, 1970, № 3.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М., «Наука», 1970.

УДК 532.517.013.4

О ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНОК ЖИДКОСТИ СОВМЕСТНО С ГАЗОВЫМ ПОТОКОМ

Е. А. ДЕМЕХИН

(Краснодар)

Двухфазное течение пленок жидкости часто встречается в практике, однако существует ограниченное число теоретических работ, посвященных данной задаче. Задача о линейной устойчивости совместного движения вязкой пленки жидкости и потока газа была поставлена в [1] и в несколько иной формулировке в [2]. В [1–3] аналитически изучена линейная устойчивость плоскопараллельного движения пленки в некоторых предельных случаях. Вопрос о границах применимости аналитических подходов остается открытым. Поэтому необходим точный численный анализ задачи об устойчивости течения в достаточно широкой области.

В данной работе показана возможность раздельного решения задачи для газа и для жидкости. Уравнение Орра — Зоммерфельда интегрировалось численно; полученные результаты сравнивались с данными аналитических расчетов.

Исследуемое течение изображено на фиг. 1. Невозмущенная поверхность раздела соответствует началу координат. Величины, относящиеся к газу, будут обозначаться прописными латинскими буквами или греческими с индексом g ; величины, относя-