

ИНДУЦИРОВАННОЕ ТЕЧЕНИЕ ВБЛИЗИ ВХОДА СТРУИ В КАНАЛ

Я. А. ВАГРАМЕНКО

(Москва)

Рассматриваемое течение возникает в результате эжектирующего действия турбулентной струи в условиях, когда струя после истечения из цилиндрического насадка попадает в газоотводный канал. Такие условия реализуются в устройствах отвода газовых потоков. Обзор исследований течений, индуцированных струями, и решение ряда задач содержатся в [1]. Для рассматриваемой ниже задачи свойственно более сильное проявление локальных особенностей и конкретной геометрии течения, а также пространственной его неоднородности. Методом интегральных преобразований получены формулы для определения скорости обтекания насадка и течения в окрестности входа струи в газоход.

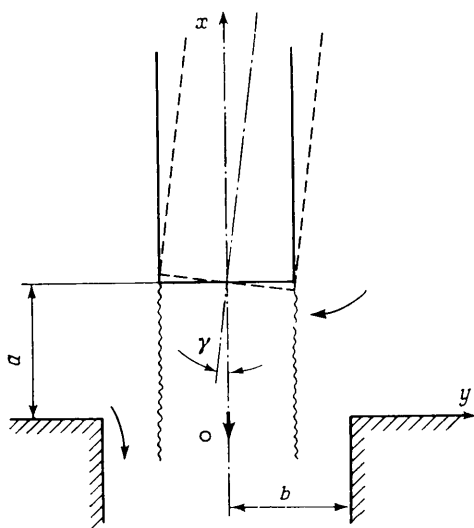
1. Так как парастание слоя смешения при небольших расстояниях среза насадка от входа в канал не приводит к существенному увеличению диаметра струи, предполагается, что поверхность, на которой происходит сток воздуха в струю, цилиндрическая (фиг. 1). Сток на этой поверхности — условной внешней границе слоя смешения — задается исходя из известного присоединенного расхода в струе. При указанных условиях эжектирование происходит начальным участком струи, в пределах кото-

рого поперечную скорость течения q_0 на внешней границе струи можно принять постоянной величиной [1-3]. Например, для дозвуковых струй $q_0 = 0.05u_0$, где u_0 — начальная скорость струи. Следует учитывать также сток воздуха в зазор между поверхностью струи и стенкой газоотводного канала. Для этого стока может быть указана скорость q_1 потока, индуцируемого в зазоре участком струи, заключенным в газоотводном канале (газоходе).

Индукцированное течение в окрестности входа в газоход существенно дозвуковое и его потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + y^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + y^{-2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} = 0$$

Здесь θ — азимутальный угол в плоскости $x = \text{const}$. Продольная координата x в отсчете от плоскости входа в газоход, радиальное расстояние y от оси струи исчисляются в радиусах насадка (струи) y_0 . Этот же масштаб



Фиг. 1

принят далее для других линейных размеров. Компоненты скорости u, v, w

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = y^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$$

выражены в масштабе q_0 . Азимутальная неравномерность потока может возникнуть при отклонении оси струи от вертикали к плоскости входа в канал.

Рассмотрим сначала осесимметричное течение, когда $w=0$, при этом $\varphi=\varphi_0(x, y)$. На поверхности струи и в зазоре скорости стока соответствуют компонентам скорости течения в радиальном и продольном направлениях. На остальных участках границы области течения (x, y) , включая боковую поверхность насадка $a \leq x < \infty$, нормальные к границе компоненты скорости равны нулю, кроме того, движение воздуха исчезает на бесконечно больших расстояниях. Тогда граничные условия запишутся в виде

$$(1.2) \quad \begin{aligned} y=1, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} &= \begin{cases} 1, & 0 < x < a; \\ 0, & x > a \end{cases}; \\ x=0, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} &= \begin{cases} m, & 1 < y < b \\ 0, & y > b \end{cases}, \quad m = q_1/q_0 \end{aligned}$$

где a — расстояние от среза насадка до плоскости входа в канал, b — радиус газоотводного канала. Решим граничную задачу (1.1), (1.2), применив интегральное преобразование Фурье в области $0 \leq x \leq \infty$ с ядром $\cos \lambda x$, $0 < \lambda < \infty$. Очевидно, что

$$(1.3) \quad \Phi_0'' + y^{-1} \Phi_0' - \lambda^2 \Phi_0 = \begin{cases} m, & 1 < y < b \\ 0, & y > b \end{cases}, \quad \Phi_0 = \int_0^\infty \varphi_0(x, y) \cos \lambda x \, dx$$

Решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию $\lim_{y \rightarrow \infty} \Phi_0 = 0$ при $y \rightarrow \infty$, имеет вид

$$(1.4) \quad \Phi_0 = \begin{cases} AK_0(\lambda y) + BI_0(\lambda y) - m\lambda^{-2}, & 1 < y < b \\ CK_0(\lambda y), & y > b \end{cases}$$

Здесь $I_0(z)$, $K_0(z)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода.

Определяя произвольные функции $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, необходимо удовлетворить условию

$$y=1, \quad \Phi_0'(1, \lambda) = \lambda^{-1} \sin a\lambda$$

и условиям непрерывного сопряжения решений (1.4) при $y=b$. Соответствующая система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} AK_1(\lambda) - BI_1(\lambda) &= \lambda^{-2} \sin a\lambda \\ AK_0(\lambda b) + BI_0(\lambda b) &= m\lambda^{-2} + CK_0(\lambda b) \\ AK_1(\lambda b) + BI_1(\lambda b) &= CK_1(\lambda b) \end{aligned}$$

После определения произвольных функций и осуществления обратного преобразования

$$\varphi_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \Phi_0(\lambda, y) \cos \lambda x \, d\lambda$$

получаем следующее представление потенциала:

$$\varphi_0(x, y) = \varphi_0^o + \varphi_0^1$$

$$(1.5) \quad \varphi_0^0 = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda y)}{\lambda^2 K_1(\lambda)} \sin a\lambda \cos \lambda x d\lambda$$

$$\varphi_0^1 = \begin{cases} -\frac{2b}{\pi} m \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda y)}{\lambda K_1(\lambda)} [I_1(\lambda b) K_1(\lambda) - K_1(\lambda b) I_1(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda, & y > b \\ \frac{2b}{\pi} m \int_0^\infty \left\{ \frac{K_1(\lambda b)}{\lambda K_1(\lambda)} [I_0(\lambda y) K_1(\lambda) + K_0(\lambda y) I_1(\lambda)] - \frac{1}{b\lambda^2} \right\} \cos \lambda x d\lambda, & y < b \end{cases}$$

Компоненты скорости течения определяются из (1.5) в виде

$$(1.6) \quad v_0^0 = v_0^0 + v_0^1$$

$$v_0^0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda y)}{\lambda K_1(\lambda)} \sin \lambda a \cos \lambda x d\lambda$$

$$v_0^1 = \begin{cases} \frac{2bm}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda y)}{K_1(\lambda)} [I_1(\lambda b) K_1(\lambda) - K_1(\lambda b) I_1(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda, & y > b \\ \frac{2bm}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda b)}{K_1(\lambda)} [I_1(\lambda y) K_1(\lambda) - K_1(\lambda y) I_1(\lambda)] \cos \lambda x d\lambda, & y < b \end{cases}$$

$$(1.7) \quad u_0^0 = u_0^0 + u_0^1$$

$$u_0^0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda y)}{\lambda K_1(\lambda)} \sin \lambda a \sin \lambda x d\lambda$$

$$u_0^1 = \begin{cases} \frac{2bm}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(\lambda y)}{K_1(\lambda)} [I_1(\lambda b) K_1(\lambda) - K_1(\lambda b) I_1(\lambda)] \sin \lambda x d\lambda, & y > b \\ -\frac{2bm}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_1(\lambda b)}{K_1(\lambda)} [I_1(\lambda y) K_1(\lambda) + K_0(\lambda y) I_1(\lambda)] \sin \lambda x d\lambda, & y < b \end{cases}$$

Суммы несобственных интегралов (1.6), (1.7) представляют собой искомое решение задачи. Физически это решение соответствует положению двух стоков — к поверхности струи и в проем газохода. Влияние этих стоков можно проследить на течении непосредственно у поверхности цилиндра ($y=1$), где $u=u_0^0(x, 1)+u_0^1(x, 1)$.

Для вычисления несобственных интегралов введем аппроксимации

$$(1.8) \quad \frac{K_0(\lambda)}{K_1(\lambda)} = 1 - e^{-\beta\lambda}, \quad \beta \simeq 1.2; \quad \frac{K_1(\lambda y)}{K_1(\lambda)} = y^{-1/2} e^{-(y-1)\lambda}$$

вторая из этих аппроксимаций является точным асимптотическим представлением при $\lambda \rightarrow \infty$. Соотношения (1.8) пригодны во всей области ($y > 1, \lambda$), их использование в интегралах приводит к формулам

$$(1.9) \quad u_0^0(x, 1) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2 \frac{\beta^2 + (x-a)^2}{\beta^2 + (x+a)^2}$$

$$u_0^1(x, 1) = m[1 - bE_2(b, a+\delta)]$$

где δ — расстояние от среза насадка вдоль его образующей

$$(1.10) \quad E_2(r, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\lambda r)}{\lambda K_1(\lambda)} \sin \lambda \alpha \, d\lambda \simeq \frac{2}{\pi \sqrt{r}} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{r-1}$$

При отсутствии стока в зазор течение в окрестности насадка имеет только скорости u_0° , v_0° , которые можно выразить в виде ($y > 1$)

$$(1.11) \quad \begin{aligned} u_0^\circ &= E_1\left(y, \frac{a+x}{2}\right) - E_1\left(y, \frac{a-x}{2}\right) \\ v_0^\circ &= 1/2 [E_2(y, a-x) + E_2(y, a+x)] \end{aligned}$$

$$E_1(y, \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda y)}{\lambda K_1(\lambda)} \sin^2 \alpha \lambda \, d\lambda$$

Возможна аппроксимация

$$\frac{K_0(\lambda y)}{K_1(\lambda)} = y^{-1/2} e^{-(y-1)\lambda} (1 - e^{-\beta\lambda}) \quad (y \geq 1)$$

совпадающая с точным асимптотическим представлением при $\lambda \rightarrow \infty$. Вычисляя с ее помощью интеграл $E_1(y, \alpha)$ [4], получаем

$$E_1(y, \alpha) = \frac{1}{2\pi \sqrt{y}} \ln \frac{1 + 4\alpha^2(y-1)^{-2}}{1 + 4\alpha^2(y-1+\beta)^{-2}}.$$

Представляет интерес случай малого зазора ($b \rightarrow 1$), но конечного расхода Q

$$Q = \pi m (b^2 - 1) \simeq 2\pi \epsilon m \quad (\epsilon = b - 1 \ll 1)$$

Здесь расход выражен в масштабе $y_0^2 q_0$. Используя разложения функций $I_1(z)$, $K_1(z)$ [4], для течения, вызванного эжекцией в зазоре, можно определить

$$(1.12) \quad u_0^1 = \frac{Q}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_0(\lambda y)}{K_1(\lambda)} \sin \lambda x \, d\lambda, \quad v_0^1 = \frac{Q}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{K_1(\lambda y)}{K_1(\lambda)} \cos \lambda x \, d\lambda$$

Формулы (1.12) описывают течение, вызванное стоком в узкую коаксиальную щель вокруг цилиндрической поверхности.

Из (1.12), воспользовавшись аппроксимацией (1.8), по [4] находим скорости на поверхности насадка и на плоскости входа в канал

$$(1.13) \quad u_0^1(x, 1) = \frac{Q}{\pi^2} \frac{\beta}{x(x^2 + \beta^2)}$$

$$(1.14) \quad v_0^1(0, y) = \frac{\xi Q}{2\pi} (y-1)^{-1} y^{-1/2}$$

Из сравнения с точными вычислениями следует, что $\xi = 0.71$. Решения (1.12)–(1.14) имеют особенность на линии стока $x=0$, $y=1$, что является обычным свойством течений типа стока. Особенностью иного вида обладает решение (1.9), из которого видно, что скорость бесконечно возрастает при приближении к срезу насадка. Здесь слабая (логарифмическая) особенность — следствие разрывных граничных условий стока, однако она для практических расчетов заметных неудобств не представляет, так как уже

при $\delta = x - a = 0.02$ распределение скорости соответствует реальному. Можно видеть, что $u_0^1(x, 1)$ резко уменьшается с увеличением расстояния a , так что при определенном отходе насадка скорость у его поверхности определяется только выражением (1.9), которое можно записать в виде

$$(1.15) \quad u_0^0(x, 1) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{2a}{\delta} \right)^2 \left(1 + \frac{\beta^2}{\delta^2} \right) \left[\frac{\beta^2}{\delta^2} + \left(1 + \frac{2a}{\delta} \right)^2 \right]^{-1}$$

Из (1.15) следует, что при увеличении отхода насадка от плоскости устанавливается асимптотическое распределение скорости

$$u_0^0(x, 1) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{\beta^2}{\delta^2} \right) \simeq \frac{\beta^2}{2\pi\delta^2}$$

т. е. имеет место зависимость $u \sim \delta^{-2}$, обычная для точечного стока. Практически это справедливо при $a \geq 3$.

2. При несовпадении оси струи с вертикалью к плоскости входа в газопровод возникает азимутальная неравномерность в индуцированном потоке, которая вызвана близостью насадка к плоскости $x=0$. В таком случае необходимо рассматривать задачу о пространственном индуцированном течении, описываемом уравнением (1.1). Получим решение этой задачи методом возмущений при небольших углах перекоса γ . Представим потенциал течения в виде

$$(2.1) \quad \varphi = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y, \theta)$$

где φ_1 — потенциал возмущений, возникающих вследствие перекоса струи, который удовлетворяет уравнению (1.1). В системе координат, связанной с осью насадка, граничное условие на плоскости входа в канал запишем в виде

$$(2.2) \quad x=0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \nu + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \nu = q$$

где q — нормальная к площадке компонента скорости, θ — угол наклона образующей поверхности насадка в вертикальной плоскости $\theta = \text{const}$.

Условие (2.2) учитывает обтекание плоскости $x=0$ ($y > b, q=0$) и «протекание» ($y < b, q=q_1$), т. е. сток в зазор. Примем

$$\nu = \gamma \cos \theta$$

Используя в (2.2) выражения (2.1), с точностью до членов второго порядка малости получим при $x=0$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) \gamma \cos \theta = q$$

Отсюда следует граничное условие

$$(2.3) \quad x=0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\gamma \cos \theta \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = -\gamma \cos \theta v_0(0, y)$$

С учетом (2.3) произведем косинус-преобразование уравнения вида (1.1) для φ_1

$$(2.4) \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y^2} + y^{-2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta^2} + y^{-1} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} - \lambda^2 \Phi_1 = \gamma \cos \theta v_0(0, y)$$

$$\Phi_1 = \int_0^\infty \varphi_1 \cos \lambda x dx$$

Поскольку при $\theta=0, \theta=\pi$ перетекание вокруг насадка отсутствует, что

следует из соображений симметрии течения, то здесь $\partial \Phi_1 / \partial \theta = 0$. Следовательно

$$(2.5) \quad \theta=0, \quad \theta=\pi, \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = 0$$

Условию (2.5) и уравнению (2.4) удовлетворяет решение вида

$$\Phi_1 = \cos \theta f(\lambda, y)$$

так что для введенной функции $f(\lambda, y)$ имеем уравнение

$$(2.6) \quad f'' + \frac{1}{y} f' - (\lambda^2 + y^{-2}) f = \gamma s, \quad [s = v_0(0, y)]$$

На боковой поверхности насадка $y=1$, $\partial \Phi_1 / \partial y = 0$, следовательно

$$(2.7) \quad y=1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Кроме того, потенциал возмущений исчезает в дальней окрестности струи, т. е.

$$(2.8) \quad x^2 + y^2 \rightarrow \infty, \quad f=0$$

Условия (2.7), (2.8) определяют решение уравнения (2.6)

$$f = CK_1(\lambda y) + \gamma I_1(\lambda y) \int_0^y sy K_1(\lambda y) dy - \gamma K_1(\lambda y) \int_0^y sy I_1(\lambda y) dy$$

Произвольная функция $C(\lambda)$ в этом решении определяется согласно (2.7)

$$C(\lambda) = -\frac{\gamma}{K_1'(\lambda)} \left[I_1'(\lambda) \int_0^1 sy K_1(\lambda y) dy - K_1'(\lambda) \int_0^1 sy I_1(\lambda y) dy \right]$$

Здесь штрихом обозначены производные по y , в которых принято $y=1$. Осуществляя обратное интегральное преобразование, получаем

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \varphi_1 = & -\frac{2}{\pi} \gamma \cos \theta \int_0^\infty \left\{ \frac{K_1(\lambda y)}{K_1'(\lambda)} \left[I_1'(\lambda) \int_0^1 sy K_1(\lambda y) dy - \right. \right. \\ & \left. \left. - K_1'(\lambda) \int_0^1 sy I_1(\lambda y) dy \right] + K_1(\lambda y) \int_0^y sy I_1(\lambda y) dy - \right. \\ & \left. - I_1(\lambda y) \int_0^y sy K_1(\lambda y) dy \right\} \cos \lambda x d\lambda \end{aligned}$$

Рассмотрим, например, как решение (2.9) может быть использовано для определения обтекания насадка. Поскольку при $y=1$

$$\varphi_1 = -\frac{2}{\pi} \gamma \cos \theta \int_0^\infty \left\{ \left[\frac{K_1(\lambda)}{K_1'(\lambda)} I_1'(\lambda) - I_1(\lambda) \right] \int_0^1 sy K_1(\lambda y) dy \right\} \cos \lambda x d\lambda$$

то, учитывая выражение вронскиана

$$K_1(\lambda) I_1'(\lambda) - I_1(\lambda) K_1'(\lambda) = \lambda^{-1}$$

получаем

$$\varphi_1(x, 1, \theta) = -\frac{2\gamma}{\pi} \cos \theta \int_0^\infty \left[\int_0^1 sy K_1(\lambda y) dy \right] \frac{\cos \lambda x}{\lambda K_1'(\lambda)} d\lambda$$

Отсюда находим продольную и трансверсальную компоненты скорости при $y=1$

$$u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{2\gamma}{\pi} \cos \theta \int_0^{\infty} \left[\int_{\infty}^1 sy K_1(\lambda y) dy \right] \frac{\sin \lambda x}{K_1'(\lambda)} d\lambda \quad (2.10)$$

$$w_1 = \frac{1}{y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = \frac{2\gamma}{\pi} \sin \theta \int_0^{\infty} \left[\int_{\infty}^1 sy K_1(\lambda y) dy \right] \frac{\cos \lambda x}{\lambda K_1'(\lambda)} d\lambda$$

Здесь согласно (1.6)

$$s = v_0^0(0, y) + v_0^1(0, y)$$

Можно воспользоваться приближенными формулами (1.10), (1.11), (1.14), так что

$$v_0^0(0, y) = \frac{2}{\pi \sqrt{y}} \operatorname{arctg} \frac{a}{y-1}, \quad v_0^1(0, y) = \begin{cases} 0.114Qy^{-1/2}(y-1)^{-1}, & y > b \\ 0, & y < b \end{cases}$$

Тогда (2.10) следует представить в виде

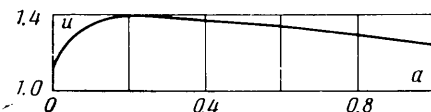
$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2\gamma}{\pi} \cos \theta \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_{\infty}^1 y^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{a}{y-1} K_1(\lambda y) dy + \right. \\ &\quad \left. + 0.114Q \int_{\infty}^b y^{1/2} (y-1)^{-1} K_1(\lambda y) dy \right] \frac{\sin \lambda x}{K_1'(\lambda)} d\lambda \\ w_1 &= \frac{2\gamma}{\pi} \sin \theta \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_{\infty}^1 y^{1/2} \operatorname{arctg} \frac{a}{y-1} K_1(\lambda y) dy + \right. \\ &\quad \left. + 0.114Q \int_{\infty}^b y^{1/2} (y-1)^{-1} K_1(\lambda y) dy \right] \frac{\cos \lambda x}{\lambda K_1'(\lambda)} d\lambda \end{aligned}$$

Последние формулы совместно с (1.9), (1.13) позволяют полностью определить асимметричное обтекание насадка индуцированным потоком. Очевидно, что скорость V обтекания определяется из выражения

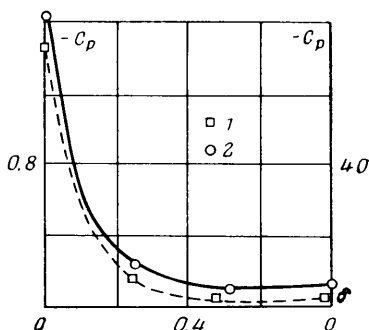
$$V^2 = (u_0 + u_1)^2 + (v_0 + v_1)^2 + w^2$$

3. В заключение рассмотрим несколько примеров применения полученных формул.

Воздействие двух стоков — стока



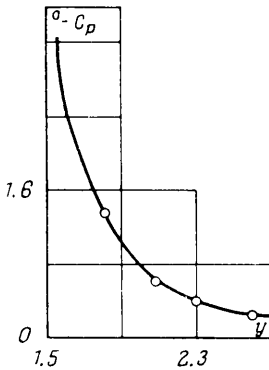
Фиг. 2



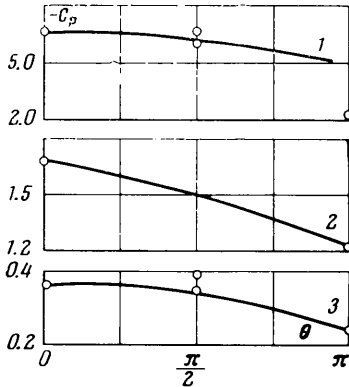
Фиг. 3

к поверхности струи и стока в проем газоотводного канала — таково, что влияние первого увеличивается, а влияние второго уменьшается с увеличением расстояния до насадка. Это в определенных условиях дает максимум индуцированной скорости вблизи насадка. На фиг. 2 для примера показано

расчетное изменение скорости на поверхности пасада (δ=0.02) при изменении высоты a для условий $m=1$, $b=1.2$. Некоторые расчетные результаты могут быть сопоставлены с экспериментальными данными, полученными в опытах со струей воздуха ($b=1.25$, $q_0=17$ м/сек, $m=8.5$), в которых измерялось распределение статического давления на поверхности пасада и плоскости входа в канал. На фиг. 3 представлено распределение коэффи-



Фиг. 4



Фиг. 5

циента давления $c_p = 2p / \rho q_0^2$ ($p = -\rho V^2 / 2$) (p — избыточное давление, ρ — плотность воздуха) вдоль боковой поверхности пасада при $a=0$ (пунктирная кривая 1 — опытные данные) и при $a=3$ (сплошная кривая по левой шкале, 2 — опытные данные).

Изменение коэффициента давления на плоскости $x=0$ показано на фиг. 4, экспериментальные данные показаны кружками. Влияние скоса пасада на условия его обтекания можно видеть на фиг. 5, где расчетное распределение коэффициента давления по углу θ сравнивается с экспериментальными данными, полученными при $a=1$, $\gamma=6^\circ$ для $\delta=0.02$ (кривая 1), $\delta=0.25$ (кривая 2), $\delta=0.5$ (кривая 3).

Автор благодарит Т. Х. Седельникова за ценные советы.

Поступила 15 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гиневский А. С. Теория турбулентных струй и следов. М., «Машиностроение», 1969.
2. Яковлевский О. В. Гипотеза об универсальности эжекционных свойств турбулентных струй газа и ее приложения. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 3.
3. Абрамович Г. И., Крашенинников С. Ю., Секундов А. И., Смирнов И. П. Турбулентное смешение газовых струй. М., «Наука», 1974.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.