

ДВИЖЕНИЕ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СМЕСИ ГАЗОВ В ДВУМЕРНЫХ ПЛОСКИХ СОПЛАХ

В. А. ЛЕВИН, Ю. В. ТУНИК

(Москва)

В статье рассмотрена разностная схема для численного решения задач о двумерном сверхзвуковом течении релаксирующего газа, позволяющая учитывать появление скачков уплотнения в потоке. Приведены результаты расчетов течения в сопле смеси углекислого газа и азота с добавлением гелия. Проведено сравнение с результатами одномерных расчетов. Определены параметры, влияющие на величину оптического коэффициента усиления. Показано, что появление скачков уплотнения в соплах практически исключает их из числа оптимальных.

Много работ посвящено вычислению оптического коэффициента усиления и других параметров при расширении в сопле газовой смеси, состоящей из углекислого газа и азота с добавлением гелия, паров воды и других компонент, с применением кинетических моделей релаксационных процессов различной сложности (см., например, [1-5]). В [1] приводится модель, достаточно простая и в то же время, как показывает сравнение с экспериментами, хорошо описывающая процессы перераспределения колебательной энергии молекул углекислого газа и азота. Численные результаты получены в задачах о течении релаксирующего газа $\text{CO}_2\text{--N}_2\text{--He--H}_2\text{O}$ в соплах с учетом излучения [6-9]. Исследования проводились в основном в одномерном приближении для стационарного течения. Наличие достаточно экономичного алгоритма расчета таких течений позволило поставить и решить задачи по оптимизации параметров газовой смеси и формы сопла [10, 11] относительно коэффициента усиления и выходной мощности излучения.

Двумерные расчеты течений релаксирующего газа проводились в [12]. В [13] развит метод, позволяющий численно решать задачи о течении совершенного газа как в до- и транзвуковой, так и в сверхзвуковой части сопла. Однако точность вычислений уже на расстоянии в несколько калибров критического сечения вниз по потоку становится неудовлетворительной. Достоинством метода установления, использующего схему С. К. Годунова, является возможность обнаружения скачков уплотнения, если они появляются в потоке. Применение этого метода к расчету течений релаксирующего газа обсуждалось в [12]. Интегральная схема, позволяющая рассчитывать сверхзвуковую часть сопла с учетом скачков уплотнения, предложена в [14]. Настоящая работа посвящена применению этой схемы для изучения влияния на характеристики газовой смеси $\text{CO}_2\text{--N}_2\text{--He--H}_2\text{O}$ тех особенностей течения, которые не могут быть исследованы в рамках одномерной теории.

Рассмотрим задачу о течении газа $\text{CO}_2\text{--N}_2\text{--He--H}_2\text{O}$ в сверхзвуковой части сопла с учетом неравновесных процессов перераспределения колебательной энергии углекислого газа и азота. Кинетические процессы могут быть описаны уравнениями для трех неравновесных колебательных температур: симметричной и деформационной мод колебаний молекулы CO_2 ($T_1=T_2$), антисимметричной T_3 и температуры азота T_4 . Уравнения безразмерных колебательных энергий, связанных с температурами соотношениями $e_i = [\exp(\theta_i/T_i) - 1]^{-1}$, имеют вид

$$(1) \quad \frac{de_2}{dt} = F_2 = PQ_{23}\varphi_{23} - (e_2 - e_2^\circ)P/\tau', \quad \frac{de_3}{dt} = F_3 = -PQ_{23}\varphi_{23} - \xi_4 PQ_{34}\varphi_{34} \\ \frac{de_4}{dt} = F_4 = \xi_3 PQ_{34}\varphi_{34} - (e_4 - e_4^\circ)P/\tau''$$

Здесь P — давление; e_i° — равновесное значение e_i (при $T_i=T$); T — поступательная температура; ξ_3, ξ_4 — молярные доли углекислого газа и азота в смеси (позже будут использоваться ξ_1 и ξ_2 , $\xi_1=\xi_2=\xi_3$, и ξ_5 — молярное содержание гелия); $Q_{nm}=Q_{nm}(T, \chi_k, \xi_i)$ — вероятности обмена квантами колебательной энергии в единицу времени при атмосферном давлении: Q_{23} — между антисимметричной модой и симметричной и деформационной модами колебания CO_2 ; Q_{34} — между углекислым газом и азотом; χ_k — известные постоянные параметры размерности T^k , например характерные вибрационные температуры CO_2 ($\theta_1, \theta_2, \theta_3$) и азота (θ_4); $\tau'=\tau'(T, \chi_k, \xi_i)$ и $\tau''=\tau''(T, \chi_k, \xi_i)$ — характерные времена релаксаций первого и второго типа колебаний углекислого газа (τ') и колебаний азота. Выражения для $Q_{nm}, \tau', \tau'', \varphi_{nm}=\varphi_{nm}(T, \chi_k, e_i)$ приводятся в [1].

Уравнения газовой динамики в данной области являются гиперболическими. В связи с этим для решения необходимо задать параметры в некотором сечении $x=x_0$ и граничные условия. Значения искомых величин в точке x_0 можно взять из результатов счета методом установления или по одномерной теории. В каждой точке сечения задаются давление P , плотность ρ , проекции скорости u и v на оси x и y соответственно, температуры T_2, T_3, T_4 . При задании скоростей из одномерной теории полагалось $u=W, v=0, W$ — скорость из одномерного расчета.

Уравнения, описывающие течение газа и эквивалентные условиям на скачках, можно записать, следуя [14]

$$\frac{d}{dx} \iint_S \mathbf{a} \, dr \, d\varphi = \oint_\Gamma (c - \mathbf{a} \xi'') \, dr - (\mathbf{b} - \mathbf{a} \xi') \, d\varphi + \iint_S \mathbf{f} \, dr \, d\varphi$$

Здесь Γ — некоторый контур в сечении $x=\text{const}$, S — охватываемая им площадь, ξ' и ξ'' — проекции вектора $\xi = d\mathbf{n}/dx$ на оси r и φ цилиндрической системы координат (третья ось совпадает с осью x), $d\mathbf{n}$ — проекция смещения точек контура на свою внешнюю нормаль

$$(2) \quad \mathbf{a} = \rho u \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{P}{\rho u} + u \\ v \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \rho v \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{P}{\rho v} + v \\ \omega \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \frac{\rho \omega}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ v \\ \frac{p}{\rho \omega} + \omega \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f} = -\frac{\rho}{r} \begin{pmatrix} v \\ uv \\ v^2 - \omega^2 \\ 2v\omega \end{pmatrix}$$

Для двумерного случая получаем

$$(3) \quad \frac{d}{dx} \int_{r_-}^{r_+} \mathbf{a} \, dr = (\mathbf{a} r'_x - \mathbf{b})|_{r_-}^{r_+} + \int_{r_-}^{r_+} \mathbf{f} \, dr$$

где r_- и r_+ — нижняя и верхняя границы выделяемой частицы. В столбцах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{f}$ $\omega=0$. Уравнение энергии

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \int_{r_-}^{r_+} \rho u (2I + q^2) \, dr =$$

$$= \rho (u r'_x - v) (2I + q^2) |_{r_-}^{r_+} - \int_{r_-}^{r_+} \left[\frac{\rho v}{r} (2I + q^2) + 2J \right] \, dr$$

Здесь I — энтальпия. Член $2J$ появляется, например, в связи с наличием излучения, $q^2 = u^2 + v^2$.

В случае адиабатического ($J=0$) и изэнтропического стационарного течения уравнение энергии равносильно интегралу Бернулли $q^2/2 + I = I(T_0)$, где T_0 — температура торможения.

Энтальпия релаксирующего газа $I = I_1 + \sum_{i=1}^4 \xi_i \varepsilon_i$, где $I_1 = I_1(T)$ (T —

поступательная температура) есть энтальпия, учитывающая внутреннюю энергию поступательного, вращательного и равновесного колебательного

движений молекул, сумма $\sum_{i=1}^4 \xi_i \varepsilon_i$ учитывает вклад неравновесных коле-

баний, $\varepsilon_i = \delta_i e_i \theta_i R_0 / \mu$, $\delta_i = 1$ при $i \neq 2$ и $\delta_i = 2$ при $i = 2$, R_0 — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес смеси.

Релаксационные уравнения для e_i можно записать так:

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{r_-}^{r_+} E \rho u \, dr = \rho E (u r_+' - v) \Big|_{r_-}^{r_+} + \int_{r_-}^{r_+} (f + \rho F) \, dr$$

Для модели с тремя неравновесными температурами

$$(6) \quad E = \begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Система уравнений (2)–(6) замыкается уравнением состояния $P = \rho T R_0 / \mu$.

На стенке выставляются условия непротекания и отсутствия притока энергии. К плоским задачам можно перейти, устремляя r_- в бесконечность и сохраняя $r_+ - r_-$. В плоском случае координату r обозначим буквой y .

Уравнения (3), (5) и (6) можно объединить, используя форму записи (3) и переобозначая a, b, f, F

$$(7) \quad a = \rho u \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{p}{\rho u} + u \\ v \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{p}{\rho v} + v \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \rho v, \quad f = -\frac{\rho v}{r} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ v \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix},$$

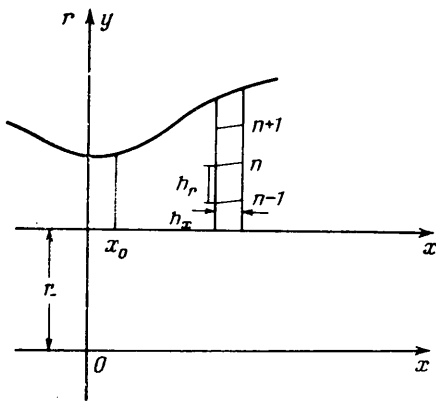
$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Разностная схема для численного решения полученной системы дифференциальных уравнений строится по аналогии с [14]: по параметрам на

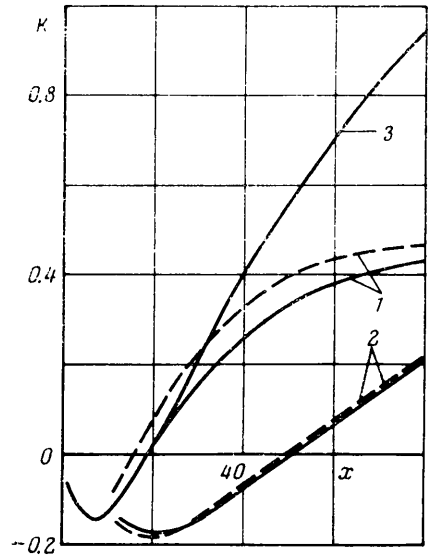
слое в точке x определяются величины на слое в точке $x+h_x$ (фиг. 1). Выбор значений e_i (больших величин E_{in}) на боковых сторонах (Δ_n) расчетных ячеек зависит от взаимного расположения контактного разрыва, появляющегося при рассмотрении взаимодействия соседних ячеек с номерами $n-1/2$ и $n+1/2$ и отрезка (Δ_n). Если контактный разрыв лежит относительно отрезка Δ_n со стороны ячейки с номером $n+1/2$, то E_{in} полагается равным значению e_i в ячейке с номером $n-1/2$, т. е. $E_{in}=e_{in-1/2}$. В противном случае $E_{in}=e_{in+1/2}$. Из разностных уравнений в ячейке $n-1/2$ на слое в точке $x+h_x$ определяются величины

$$\alpha=\rho u h_r, \beta=(P+\rho u^2) h_r, \psi=\rho u v h_r, \alpha_i=\rho e_i u h_r.$$

Затем, используя (4), находим P, ρ, u, v, e_i . Условие устойчивости схемы указано в [14]. Релаксационные процессы обладают собственными характерными временами τ_p , и поэтому приходится накладывать дополнительное условие на шаг интегрирования ($h_x < \tau_p u$). Выписанное условие не является таким же сильным, как в дозвуковой части,



Фиг. 1



Фиг. 2

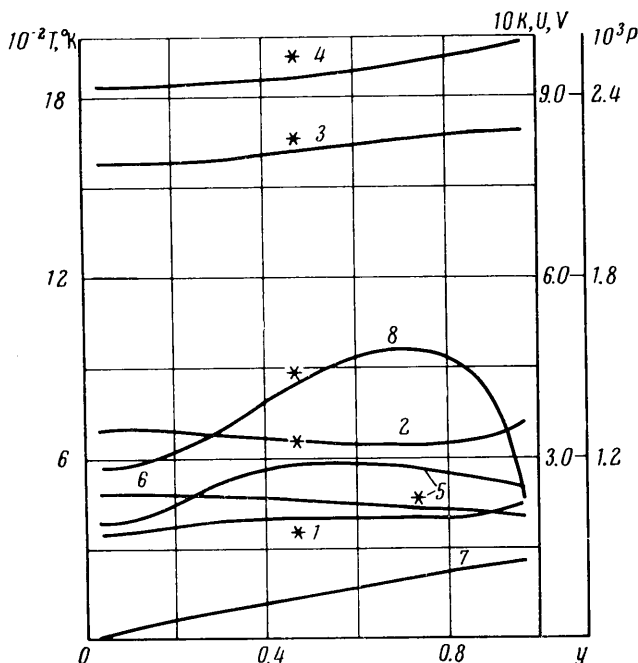
так как в сверхзвуковом потоке релаксационные времена не малы и могут значительно превышать характерные газодинамические времена (колебания замораживаются).

Рассмотрим параметры, определяющие течение в сопле, форма которого задается конечным числом параметров размерности длины (x_j) и безразмерными величинами типа углов β_j . Релаксационные уравнения содержат кроме основных величин P, ρ, u, v параметры τ_p , а именно $\tau', \tau'', 1/Q_{nm}$ (в атм·сек), характеризующие вероятности переходов колебательной энергии, ξ_i, χ_k . Выпишем независимые безразмерные величины, определяющие течение

$$x_j/h, \beta_j, P_0 h / \rho_0 / P_0 / \tau_0', \xi_i, \chi_k / T_0^k, \tau_p / \tau_0'$$

Здесь h — характерный линейный размер, например полувысота критического сечения, нижним индексом 0 отмечены величины в точке торможения перед входом в сопло.

Параметры τ_p/τ_0' , τ_0' , χ_k определены компонентами газовой смеси и не могут быть изменены произвольно. Их величины берутся из самостоятельных опытов. Сохраняя неизменными выписанные безразмерные величины (при этом сохраняется T_0), можно увеличивать P_0 , уменьшая h и x_j так, чтобы параметр $Q = P_0 h / \sqrt{T_0}$ оставался постоянным, тогда $p' = p/P_0$, $\rho' = \rho/\rho_0$, $u' = u/\sqrt{\rho_0/P_0}$, $v' = v/\sqrt{\rho_0/P_0}$, e_i (и, следовательно, T_i) в соответствующих точках с безразмерными координатами $(x/h, y/h)$ не будут меняться. Выражение



Фиг. 3

коэффициента оптического усиления $K = K(T, T_2, T_3, P, \xi_i)$ в см^{-1} в центре спектральной линии приводится, например, в [1]. Анализ приведенной в работе формулы для вычисления коэффициента показывает, что K возрастает при увеличении P ($\partial K / \partial P \geq 0$) в области, где $K \geq 0$, до некоторого значения $K_+ = K_+(T, T_2, T_3, \xi_i)$ при $P \rightarrow \infty$.

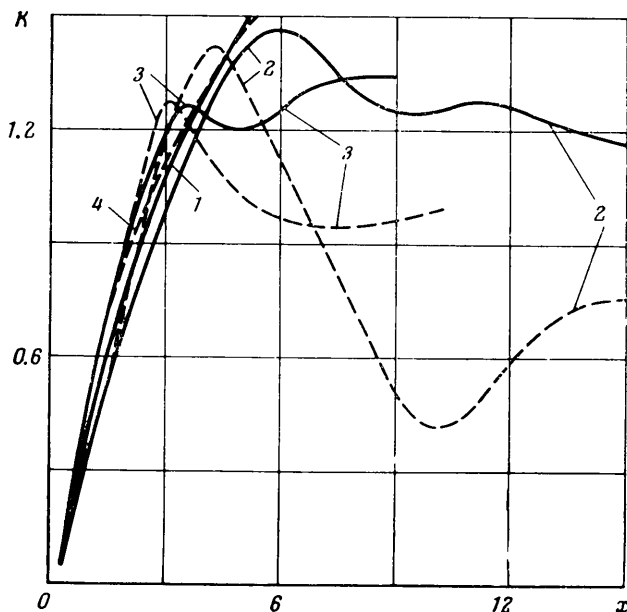
Таким образом, при увеличении P_0 ($Q = \text{const}$) в точке, заданной безразмерными x/h и y/h , коэффициент K увеличивается за счет повышения давления в резонаторе. Можно оценить величину P_0 , начиная с которой дальнейшее увеличение давления приводит к возрастанию K не более чем в 1.02 раза. Будем считать, что максимальное значение числа Маха в потоке не более M_+ и параметры потока можно оценить достаточно точно по адиабатическим формулам. Тогда

$$P_0 \approx \frac{T_0}{2800} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_+^2 \right)^{1/(\gamma - 1)}$$

Для $M_+ = 6$, $\gamma = 1.5$, $T_0 = 2800$, $P_0 = 100$ атм. Следовательно, существенными параметрами, по которым необходимо решать задачу оптимизации по коэффициенту усиления, являются Q , x_j/h , T_0 , ξ_i , β_j . Давление P_0 необходимо выбирать достаточно большим. В реальных течениях образуется пограничный пристеночный слой, в котором следует ожидать уменьшения коэф.

коэффициента усиления. Относительную толщину ламинарного вязкого слоя δ/h на некотором безразмерном расстоянии x/h от критики можно оценить из соотношения $\delta/h \sim (L/h) \text{Re}^{-1/2}$, где L — расстояние вдоль стенки сопла, $\text{Re} = \rho u L / \nu \sim \rho' u' L / h \cdot Q / \nu$, ν — вязкость смеси. Таким образом, для заданной T_0 , формы сопла и смеси толщина δ/h зависит от параметра Q . Расчеты, учитывающие наличие пограничного слоя, могут изменить оптимальные значения расхода Q и состава смеси.

Для иллюстрации зависимости K от P_0 и сравнения с одномерной теорией рассчитывались клиновидные сопла с углами полураствора $\beta_0 = 30^\circ$,



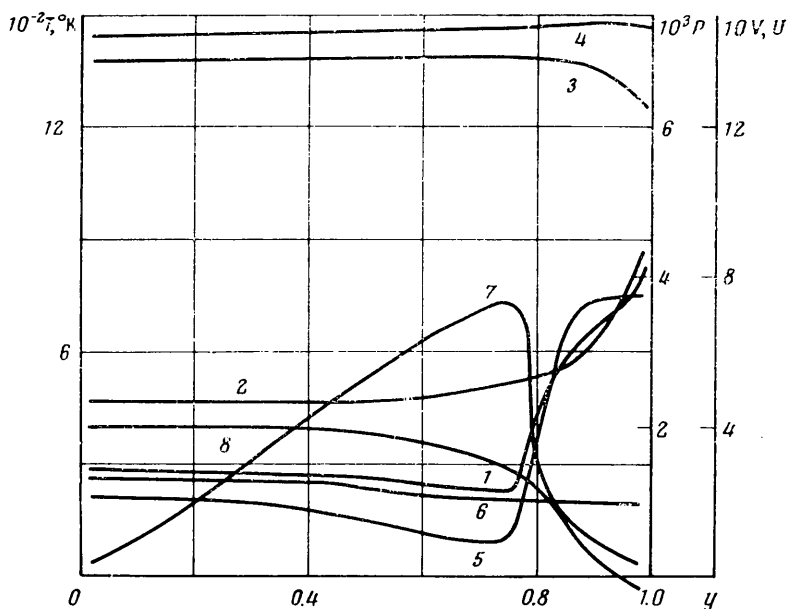
Фиг. 4

20, 10° . Температура торможения $T_0 = 3000^\circ \text{K}$, $\xi_3 = 10\%$, $\xi_4 = 35\%$, $\xi_5 = 55\%$, $P_0 h = 1$ (атм·см). На фиг. 2 показано изменение коэффициента K в $\% \text{ см}^{-1}$ от x в безразмерных единицах. Сплошные кривые 1, 2 соответственно для $\beta_0 = 30^\circ$ и 10° получены при $P_0 = 10$ атм для среднего по сечению коэффициента $\langle K \rangle$. Кривая 3 относится к $P_0 = 100$ атм и $\beta_0 = 30^\circ$, пунктирные линии 1, 2 построены по одномерным расчетам при $P_0 = 10$ атм. Видно, что за счет увеличения давления коэффициент существенно возрастает. Значения его из одномерной теории превышают средние величины из двумерных расчетов в точке $x = 60$ на $0.052\% \text{ см}^{-1}$ для 30° , на $0.033\% \text{ см}^{-1}$ для 20° , на $0.02\% \text{ см}^{-1}$ для 15° , на $0.008\% \text{ см}^{-1}$ для 10° .

Распределение величин по сечению в точке $x = 60$ представлено на фиг. 3 ($\beta_0 = 30^\circ$). Кривые 1—8 здесь и на всех фигурах в дальнейшем, где изображается распределение по сечению, относятся соответственно к T , T_2 , T_3 , T_4 , ρ' , u' , v' , $K\%$ см^{-1} . Кривая коэффициента усиления построена для случая $P_0 = 10$ атм. Остальные кривые совпадают для 10 и 100 атм. Звездочками отмечены величины из одномерного расчета. Уменьшение коэффициента усиления у стенки обусловлено в первую очередь увеличением T .

Интересно рассмотреть течения, в которых могут проявляться ударные волны. В [15] определялись оптимальные параметры газовой смеси и формы сопла для получения наибольшего коэффициента усиления. Сопло задава-

лось значениями трех величин $a_j = \tan \beta_j / h$ (см^{-1}), β_j — углы наклона касательной к стенке сопла в точках x_j ($j=0, 1, 2$). Точки x_j делят длину сопла L_0 в отношении 1 : 3 : 5. В $x=L_0$ касательная становится параллельной оси. Величины a_j трактуются в цитированной работе как параметры подобия, т. е. увеличение h и $\tan \beta_j$ при сохранении a_j не изменяет результатов расчета. В двумерной постановке рассчитывался вариант с гелием, оптимальный по [15]: $T_0=2098$, $P_0=15$ атм, $\xi_3=0.1845$, $\xi_4=0.1878$, $a_0=26.071$, $a_1=1.0806$, $a_2=0.3632$, $L_0=25.216$ см. Начальные значения брались из одномерного расчета в точке $x=0.45$ см. На фиг. 4 приводятся величины среднего по се-



Фиг. 5

чению коэффициента усиления в функции от x . Кривая 1 берется из одномерного расчета. Кривые 2, 3 соответствуют $\beta_0=45^\circ, 35^\circ$. Вначале кривые близки одна к другой даже для больших углов. Расхождение кривых указывает на то, что параметры газа зависят не только от a_j , но и от h . Влияние по потоку характера поведения K по двумерным расчетам резко меняется. Поведение кривых 2, 3 легко объяснить, рассмотрев результаты, изображенные на фиг. 5 для $\beta_0=45^\circ$, где зафиксировано распределение величин по сечению в точке $x=4.953$. У стенки видна развитая ударная волна.

Таким образом, причиной того, что средний по сечению коэффициент усиления не возрастает с увеличением x , как в одномерном случае, является появление косого скачка уплотнения в потоке, обусловленное геометрией сверхзвуковой части сопла.

При рассмотрении более широкого класса сопел без ограничения на форму (в [15] принято $a_1 \geq 0$) С. А. Лосевым и В. Н. Макаровым были получены оптимальные сопла с $a_1 < 0$. Увеличение температуры T в районе поджатия значительно уменьшает характерное время τ' по сравнению с другими релаксационными временами и приводит к дополнительному понижению температуры T_2 нижнего колебательного уровня. Поэтому сопла с поджатием могут представлять определенный интерес при исследовании релаксирующих газовых смесей.

При давлении $P_0=15$ атм были найдены следующие оптимальные пара-

метры формы сопла; $a_0=26.071$, $a_1=-1.9194$, $a_2=1.9114$, при которых получается близкий к предыдущему контур с небольшим локальным изменением. Значения концентраций и температуры торможения оставались прежними. Переход от прежних a_i к новым не вносил существенных изменений в результаты одномерной задачи.

Результаты двумерных расчетов изображены пунктирными кривыми 2, 3 и 4 на фиг. 4 для углов $\beta_0=45, 35$ и 15° соответственно. При уменьшении h и, следовательно, β_i поджатие становится не таким резким и интенсивность ударных волн уменьшается. Возрастание коэффициента при больших x (фиг. 4, пунктирная кривая 2) объясняется тем, что скачок уплотнения ослабляется и температура начинает достаточно быстро падать при расширении потока.

Сравнение графиков средних коэффициентов усиления для выпуклых контуров и контуров с поджатием показывает, что на величину коэффициента оказывает существенное влияние не только угол раскрытия вблизи критического сечения, но и форма сопла в целом. Ударные волны резко уменьшают коэффициент оптического усиления или вообще приводят к уничтожению инверсии. Появление скачков уплотнения в соплах практически исключает их из числа оптимальных.

Авторы признательны С. А. Лосеву за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 25 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев С. А., Макаров В. Н., Павлов В. А., Шаталов О. П. Исследование процессов в газодинамическом лазере на ударной трубе большого диаметра. Физика горения и взрыва, 1973, т. 9, № 4.
2. Конюхов В. К., Матросов И. В., Прохоров А. М., Шалунов Д. Т., Широков Н. Н. Газодинамический квантовый генератор непрерывного действия на смеси углекислого газа, азота и воды. Письма в ЖЭТФ, 1970, т. 12, вып. 10.
3. Гембаржевский Г. В., Генералов Н. А., Козлов Г. И., Ройтенбург Д. И. О коэффициенте усиления света в смеси $\text{CO}_2+\text{N}_2+\text{He}$ при ее расширении в сверхзвуковом сопле. ЖЭТФ, 1972, т. 62, вып. 3.
4. Басов Н. Г., Михайлов В. Г., Оравский А. Н., Щеглов В. А. Получение инверсной населенности молекул в сверхзвуковом потоке бинарного газа в сопле Лавалля. Ж. техн. физ. 1968, т. 38, № 12.
5. Anderson J. D. Time-dependent analysis of population inversions in an expanding gas. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 8.
6. Микаэлян А. Л., Минаев В. П., Обод Ю. А., Турков Ю. Г. О характеристиках лазера на двуокиси углерода с поперечной прокачкой, работающего в режиме усиления. Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 5.
7. Генералов Н. А., Козлов Г. И., Селезнева И. К. Расчет характеристик газодинамического лазера. ПМТФ, 1972, № 5.
8. Cool T. A. Power and gain characteristics of high speed flow lasers. J. Appl. Phys., 1969, vol. 40, No. 9.
9. Lee G. Quasi-one-dimensional solution for the power of CO_2 gasodynamic lasers. Phys. Fluids, 1974, vol. 17, No. 3.
10. Жарков В. Д., Лапушонко Л. Ю., Чебыкин П. Н. Оптимизация параметров газодинамического лазера на CO_2 . ПМТФ, 1974, № 5.
11. Лосев С. А., Макаров В. Н. Оптимизация коэффициента усиления в газодинамическом лазере на углекислом газе. Квантовая электроника, 1974, т. 1, № 7.
12. Иванов М. Я., Туник Ю. В. Движение газа с неравновесными релаксационными процессами в соплах и ударных трубах. В кн. «Некоторые задачи газовой динамики, связанные с распространением детонационных волн, горением в сверхзвуковых потоках и генерацией лазерного излучения». (Ин-т механ. МГУ, 1974, отчет № 1488, гл. 7.)
13. Иванов М. Я., Крайко А. Н. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 5.
14. Иванов М. Я., Крайко А. Н., Михайлов Н. В. Метод сквозного счета для двумерных и пространственных сверхзвуковых течений. I. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1972, т. 12, № 2.
15. Лосев С. А., Макаров В. Н. Многофакторная оптимизация газодинамического лазера на углекислом газе. I. Оптимизация коэффициента усиления. Квантовая электроника, 1975, т. 2, № 7.