

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СРЕДАХ

О. Н. БОНДАРЕНКО, Г. А. ШАПОШНИКОВА

(Москва)

Исследуются соотношения на разрывах в намагничивающихся идеально проводящих средах в магнитном поле. Магнитные проницаемости μ до и после разрыва предполагаются постоянными неравными друг другу величинами. Показано, что в рассматриваемой постановке в гидродинамике намагничивающихся сред, как и в магнитной гидродинамике, возможны ударные волны двух типов: быстрые и медленные. Исследовано поведение скачков плотности, давления и магнитного поля в таких волнах. Показано, что в намагничивающихся средах на ударных волнах разрежения, уменьшающих магнитную проницаемость, энтропия убывает, а на ударных волнах разрежения, увеличивающих магнитную проницаемость, может возрастать, но такие волны не эволюционны.

Соотношения на разрывах в механике сплошной среды с учетом электромагнитного поля, эффектов поляризации и намагничивания в общем виде выписаны в [1]. Соотношения на разрывах в приближении феррогидродинамики и электрогидродинамики для случаев, когда магнитная и диэлектрическая проницаемости среды перед и за разрывом являются разными произвольными функциями своих аргументов и одинаковыми, выписывались в работах [2] и [3-5] соответственно.

В данной работе исследуется система соотношений на разрывах, распространяющихся в намагничивающейся идеально проводящей среде.

При исследовании используется метод, предложенный в [6].

1. Система соотношений имеет вид

$$(1.1) \quad \{\rho v_n\} = 0, \quad m = \rho v_n$$

$$(1.2) \quad \left\{ p_0 + m^2 v + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \left(\mu - \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_{n,T} \right) H dH \right\} = \frac{B_n^2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{\mu} \right\},$$

$$(1.3) \quad m \{v_\tau\} = \frac{B_n}{4\pi} \{H_\tau\}$$

$$m \left\{ \frac{v^2}{2} + w_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^H \frac{1}{\rho} \left(T \frac{\partial \mu}{\partial T} - \rho \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) H dH + \frac{v}{4\pi} (B_\tau H_\tau) \right\} =$$

$$= \frac{B_n}{4\pi} \{H_\tau v_\tau\}$$

$$(1.4) \quad B_n \{v_\tau\} = m \{v B_\tau\}, \quad \{B_n\} = 0, \quad B = \mu H, \quad \{H_\tau\} = \frac{4\pi}{c} i$$

Здесь ρ — плотность; p_0 , w_0 — газодинамические давление и энтальпия; v_n , v_τ — нормальная и касательная составляющие скорости; H и B — магнитные поле и индукция; $v = 1/\rho$ — удельный объем; i — поверхностный ток; μ — магнитная проницаемость (в общем случае функция температуры, плотности и магнитного поля).

Для любой величины a выполнено $\{a\} = a_2 - a_1$; индексами 2 и 1 обозначены параметры среды за и перед скачком соответственно.

Последнее уравнение (1.4) служит для определения поверхностного тока i по значениям магнитного поля $\mathbf{H}$ за и перед разрывом и поэтому при исследовании системы может не рассматриваться. Будем предполагать, что магнитные проницаемости с обеих сторон разрыва постоянные, но не равные друг другу величины, $\{\mu\} = \mu_2 - \mu_1 \neq 0$.

В этом случае уравнения (1.2), (1.3) записываются следующим образом:

$$(1.5) \quad \left\{ \rho v_n^2 + p_0 - \frac{H_n B_n}{8\pi} + \frac{\mathbf{H}_\tau \mathbf{B}_\tau}{8\pi} \right\} = 0$$

$$(1.6) \quad m \left\{ \frac{v^2}{2} + w_0 + \frac{\mathbf{H}_\tau \mathbf{B}_\tau}{4\pi\rho} \right\} = \frac{B_n}{4\pi} (\mathbf{H}_\tau \mathbf{v}_\tau)$$

Из последнего уравнения (1.2) и первого уравнения (1.4) следует параллельность векторов $\mathbf{H}_{\tau_1}$, $\mathbf{H}_{\tau_2}$ и $\mathbf{v}_{\tau_1} - \mathbf{v}_{\tau_2}$. Поэтому задачу о распространении поверхностей разрыва в намагничивающихся средах, как и в обычной магнитной гидродинамике, можно считать плоской и знак вектора в дальнейшем опустить.

2. Введем безразмерные величины по формулам

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \xi &= -b\Delta u_0/\Delta v_0, & \eta &= B_{\tau_2}/B_{\tau_1} - 1, & \kappa &= \mu_2/\mu_1 \\ (b &= B_{\tau_1} B_n^{-1}, & \Delta u_0 &= \{v_n\}, & \Delta v_0 &= \{v_\tau\}) \\ P_{0i} &= 4\pi p_{0i} \mu_i / B_n^2, & P_i &= P_{0i} + H_i B_i \mu_i / 2B_n^2 \\ \Delta u &= \frac{\Delta u_0 \sqrt{\mu_1}}{B_n / \sqrt{4\pi\rho_1}}, & \Delta v &= \frac{\Delta v_0 \sqrt{\mu_1}}{B_n / \sqrt{4\pi\rho_1}}, & R_2 &= \rho_2/\rho_1 \\ V_i &= \frac{v_{ni} \sqrt{\mu_i}}{B_n / \sqrt{4\pi\rho_i}}, & \Theta_i &= \frac{R_0 T_i \mu_i}{B_n^2 / 4\pi\rho_i} \end{aligned}$$

Здесь R_0 — универсальная газовая постоянная; P_{0i} , R_2 , P_i , Θ_i — безразмерные давление, плотность, полное давление и температура; V_i — безразмерная скорость газа относительно разрыва; Δu , Δv — безразмерные скачки компонент скорости газа.

Используя уравнение (1.5), первое уравнение (1.4) и уравнение состояния $p_0 = \rho R T$, выразим скачки всех величин через переменные ξ , η и параметры b , P_{01} и κ

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \Delta R &= R_2 - 1 = \xi\eta/(\xi+1), & \Delta P &= P_2 - P_1 = \kappa^{-1} [\xi\eta + (1-\kappa)(\xi+1)] \\ \Delta P_0 &= P_{02} - P_{01} = \kappa^{-1} [\xi\eta - \frac{1}{2}b^2\eta(\eta+2) + \frac{1}{2}(1-\kappa)(1-b^2+2\xi)] \\ \Delta u &= -\frac{\xi\sqrt{\eta(\eta+1-\kappa)}}{\sqrt{\kappa(\xi\eta+\xi+1)}}, & \Delta v &= b\frac{\sqrt{\eta(\eta+1-\kappa)}}{\sqrt{\kappa(\xi\eta+\xi+1)}} \\ \Delta\Theta &= \Theta_2 - \Theta_1 = \\ &= \frac{\eta(\xi+1) [\xi - \frac{1}{2}b^2(\eta+2)] - P_{01}\xi\eta\kappa + (1-\kappa)^{1/2}(\xi+1)(1-b^2+2\xi)}{\kappa(\xi\eta+\xi+1)} \\ V_1^2 &= (\xi\eta+\xi+1)(\eta+1-\kappa)/\eta\kappa, & V_2^2 &= (\xi+1)(\eta+1-\kappa)/\eta \end{aligned}$$

Предполагая, что энтальпия имеет вид $w_0 = \gamma p_0 v / (\gamma - 1)$, получим из закона сохранения энергии следующую зависимость между ξ , η , b^2 , P_{01} .

γ и κ :

$$(2.3) \quad f(\xi, \eta; b^2, P_{01}, \gamma, \kappa) = \xi^2 \eta [2 - (\gamma - 1) \eta] + 2\xi [^{1/2}(\gamma - 2) b^2 \eta^2 - (b^2 + \gamma P_{01} - 1) \eta] - \eta (\eta + 2) b^2 + (1 - \kappa) \{ \xi^2 [2 - (\gamma - 1) \eta] + 2\xi [\eta (b^2 (\gamma - 1) + \gamma P_{01}) + ^{1/2} b^2 (\gamma - 2) + ^{1/2} (\gamma + 2)] + \eta b^2 (\gamma - 1) + b^2 (\gamma - 2) + \gamma \} = 0$$

Разрешая (2.3) относительно ξ , получим зависимость

$$\xi = \xi(\eta; b^2, P_{01}, \gamma, \kappa) \equiv \xi(\eta)$$

Уравнение (2.3) аналогично уравнению, полученному в [6] для поверхностей разрыва в магнитной гидродинамике с поглощением и выделением энергии. Аналогом выделившейся (поглотившейся) энергии q является член уравнения (2.3), содержащий множителем $(1 - \kappa)$.

Будем задавать магнитное поле, магнитную проницаемость и термодинамическое состояние перед разрывом, κ и одну из величин ξ, η , характеризующих интенсивность разрыва. Тогда (2.3) будет служить для нахождения ξ или η как функции заданных величин, а соотношения (2.2) — для нахождения всех величин за разрывом и его скорости.

Проведем теперь качественное исследование соотношения (2.3) в плоскости $\xi\eta$ в зависимости от параметров b^2, P_{01}, κ и $1 \leq \gamma \leq 2$.

Так как $P_{02} \geq 0, V_1^2 \geq 0, V_2^2 \geq 0$, из соотношений (2.2) следует, что физическим смыслом обладает часть плоскости, определяемая неравенствами

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \eta(\eta + 1 - \kappa)(\xi\eta + \xi + 1) &\geq 0 \\ \eta(\xi + 1)(\eta + 1 - \kappa) &\geq 0 \\ \kappa P_{01} + \xi\eta - ^{1/2} b^2 \eta(\eta + 2) + ^{1/2} (1 - \kappa)(1 - b^2 + 2\xi) &\geq 0 \end{aligned}$$

Будем рассматривать распространение ударных волн, меняющих намагниченность среды. Эти волны аналогичны волнам детонации: их скорость определяется из решения соотношений на разрыве. Условиями эволюционности таких волн являются неравенства:

$$(2.5) \quad V_1^2 > a_{1+}^2, \quad 1 < V_2^2 \leq a_{2+}^2; \quad a_{1-}^2 \leq V_1^2 < 1, \quad V_2^2 \leq a_{2-}^2$$

Здесь a_{i+}, a_{i-} ($i=1, 2$) — безразмерные скорости быстрых и медленных магнитозвуковых волн в намагничивающихся средах [3, 5].

Для исследования эволюционности разрывов в плоскости $\xi\eta$ построены кривые, вдоль которых скорость газа относительно разрыва перед и за ним равна скоростям малых магнитозвуковых возмущений

$$V_1^2 = a_{1+}^2, \quad V_1^2 = a_{1-}^2, \quad V_1^2 = 1, \quad V_2^2 = 1, \quad V_2^2 = a_{2+}^2, \quad V_2^2 = a_{2-}^2$$

Уравнения этих кривых запишем в виде

$$(2.6) \quad \xi = \frac{\eta(\kappa a_{1\pm}^2 - 1) + \kappa - 1}{(\eta + 1)(\eta + 1 - \kappa)} \quad (V_1^2 = a_{1\pm}^2), \quad \xi = \frac{\kappa - 1}{\eta + 1 - \kappa} \quad (V_2^2 = 1)$$

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \kappa) &= (\xi + 1)^2 (\eta + 1 - \kappa)^2 (1 - \gamma \eta) - \eta (\xi + 1) (\eta + 1 - \kappa) \times \\ &\times \left\{ \frac{2 - \gamma}{2} b^2 \eta^2 + \eta [(2 - \gamma) b^2 - 2\gamma] + 1 + b^2 + \kappa \gamma P_{01} - ^{1/2} (1 - \kappa) \gamma (1 + b^2) \right\} - \\ &- ^{1/2} \eta^4 \gamma b^2 - \eta^3 \gamma (1 + b^2) + \eta^2 [\kappa \gamma P_{01} - ^{1/2} \gamma (1 - \kappa) (1 + b^2)] = 0 \quad (V_2^2 = a_{2\pm}^2) \end{aligned}$$

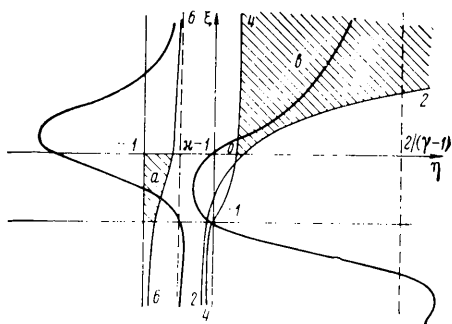
Кривая $V_1^2 = 1$ определяется второй формулой (2.6) и прямой $\eta = -1$.

Кривые (2.6), (2.7) имеют вертикальную асимптоту $\eta = \kappa - 1$, вблизи которой верны разложения

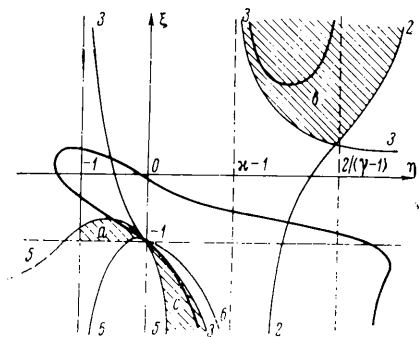
$$\xi = \frac{\kappa - 1}{\eta + 1 - \kappa} a_{1\pm}^2, \quad \xi = (\kappa - 1) / (\eta + 1 - \kappa), \quad \xi = \frac{\kappa - 1}{\eta + 1 - \kappa} a_{\pm}(b^2, P_{01}, \kappa)$$

где $\alpha_{\pm}(b^2, P_{01}, \kappa)$ — решение уравнения $\Phi(\xi, \eta, \kappa) = 0$ относительно переменной $(\xi+1)(\eta+1-\kappa)$ при $|\eta-(\kappa-1)| \ll 1$.

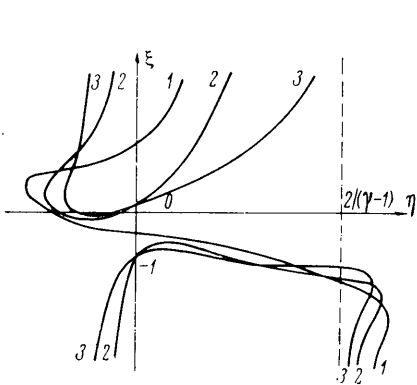
На фиг. 1, 2 нанесены области существования и эволюционности ударных волн. Кривые 1, 2 и прямая $\xi = -1$ ограничивают области, определяемые неравенствами (2.4). Кривые 3, 6 соответствуют $V_1^2 = a_1^2$ и $V_1^2 = a_1^2$ (первая формула (2.6)), (2.7) определяет две кривые — 4 ($V_2^2 = a_2^2$) и 5



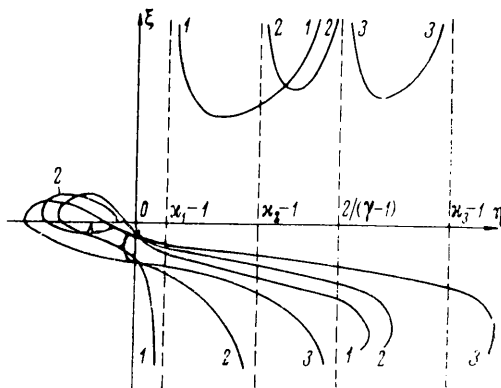
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

($V_2^2 = a_2^2$). (На фиг. 1, 2 нанесены только те ветви кривых, которые непосредственно являются границами областей.) Фиг. 1 соответствует значениям $\kappa < 1$, фиг. 2 — $\kappa > 1$.

Из (2.4) и (2.5) следует, что волны существуют и эволюционны в областях a , b и c . Жирной линией на фиг. 1, 2 нанесены адиабаты $\xi = \xi(\eta)$.

На фиг. 3, 4 построены адиабаты $\xi = \xi(\eta)$ для различных значений κ . (Семейство кривых на фиг. 3 соответствует $\kappa < 1$, на фиг. 4 — $\kappa > 1$; кривая 1 на фиг. 3 соответствует $\kappa = 1$, т. е. ударным волнам в магнитной гидродинамике.) Кривые этого семейства пересекают ось ξ в двух точках ($\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1/2[(2-\gamma)b^2 - \gamma]$), ось η — в точках

$$\eta_{1,2} = -1 + 1/2(1-\kappa)(\gamma-1) \pm \sqrt{(1-\kappa)^2(\gamma-1)^2/4 + \kappa + \gamma(1-\kappa)/b^2}$$

и имеют вертикальные асимптоты $\eta = \kappa - 1$, $\eta = 2/(\gamma - 1)$, вблизи которых верны разложения

$$\xi = -\frac{\gamma(1-\kappa)(1+\kappa b^2+2\kappa P_{01})}{(\eta+1-\kappa)[2+(1-\kappa)(\gamma-1)]}, \quad |\eta-(\kappa-1)| \ll 1$$

$$\xi = \frac{4[b^2/(\gamma-1)-1+\gamma\kappa P_{01}]+(\kappa-1)(\gamma+2)(1+b^2)}{[2+(\gamma-1)(1-\kappa)][2-\eta(\gamma-1)]},$$

$$|\eta-2/(\gamma-1)| \ll 1$$

Прямые, параллельные осям ξ или η , пересекают кривые не более чем в двух точках. В случае $\kappa > 1$ нижняя ветвь адиабаты может распадаться на замкнутую кривую и асимптотические ветви (кривая 2 на фиг. 4).

3. Из системы уравнений (1.1)–(1.4) можно получить

$$(3.1) \quad \epsilon_2 - \epsilon_1 + \frac{1}{2}(p_{02} + p_{01})(v_2 - v_1) + \frac{1}{8\pi}(v_2 - v_1)(\sqrt{\mu_2} H_{t2} - \sqrt{\mu_1} H_{t1})^2 +$$

$$+ (1 - \sqrt{\kappa}) \sqrt{\mu_1 \mu_2} (v_2 + v_1 / \sqrt{\kappa}) + \frac{v_2 v_1 B_n^2}{16\pi \mu_2} (1 - \kappa) = 0$$

где ϵ — внутренняя энергия.

Из (3.1) следует, что в плоскости $p_0 v$ в случае $\kappa > 1$ ударная адиабата (для намагничивающихся сред) при $v_2 \leq v_1$ расположена выше ударной адиабаты Гюгонно для газовой динамики (и, следовательно, выше адиабаты Пуассона). Таким образом, при $\kappa > 1$ на скачках уплотнения, а также в некоторых случаях и на скачках разрежения энтропия возрастает, однако, как видно из фиг. 2, скачки разрежения в этом случае не эволюционны.

В случае $\kappa < 1$ при $v_2 \geq v_1$ ударная адиабата для намагничивающихся сред расположена ниже адиабаты Гюгонно для газовой динамики, и на скачках разрежения энтропия убывает.

Для вычисления изменения энтропии в состоянии за разрывом в зависимости от величин, характеризующих разрыв, воспользуемся тождеством Гиббса, которое для постоянной магнитной проницаемости записывается в безразмерном виде так же, как и при отсутствии магнитного поля

$$(3.2) \quad dS_2 = \frac{1}{\gamma-1} \frac{1}{P_{02}} dP_{02} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{R_2} dR_2 \quad (S_2 = S_0/R_0)$$

Из (3.2), законов сохранения импульса и энергии на разрыве получим следующее уравнение, описывающее изменение энтропии за ударной волной:

$$(3.3) \quad \Theta dS_2 = \frac{1}{2R_2 \kappa^2} [1 + b^2(\eta+1)^2] d\kappa +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{R_2 - 1}{R_2} \right)^2 + \frac{b^2(\eta+1-\kappa)^2}{V_1^4 \kappa^2} \right] dV_1^2$$

Из (3.3) видно, что энтропия за скачком при постоянном потоке массы является монотонно возрастающей функцией κ .

Изменения плотности, давления и температуры за скачком при постоянном потоке массы через поверхность разрыва определяются по следующим формулам:

$$(3.4) \quad d\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{\gamma(1-V_2^2) + \gamma(\eta+1)^2 b^2(1-V_2^2) + 2(\eta+1)^2 b^2 V_2^2}{2\kappa R_2 \Phi(\xi, \eta, \kappa)} d\kappa$$

$$(3.5) \quad dP_{02} = -\frac{1}{2\kappa^2} \left[1 + (\eta+1)^2 b^2 + \frac{(\eta+1)^2 b^2 V_2^2}{1-V_2^2} \right] d\kappa - \\ - \frac{R_2}{\kappa} \left[V_2^2 + \frac{(\eta+1)^2 b^2 V_2^2}{1-V_2^2} \right] d \frac{1}{R_2}$$

$$(3.6) \quad d\Theta = P_2 d \left(\frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{R_2} dP_2, \quad dV_2^2 = \frac{V_1^2}{R_2} d\kappa + \kappa V_1^2 d \frac{1}{R_2}$$

$$(3.7) \quad d(\eta+1) = (\eta+1) \left(R_2 V_2^2 d \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\kappa} d\kappa \right) / (1-V_2^2)$$

$$(3.8) \quad dP_2 = -\frac{1}{\kappa} V_2^2 R_2 d \frac{1}{R_2} - \frac{1}{\kappa^2} d\kappa$$

Исследуем свойства разрывов, соответствующих разным областям в случаях $\kappa < 1$ и $\kappa > 1$. Область *a* (фиг. 1, 2) соответствует медленным ударным волнам, на которых плотность возрастает, касательные составляющие магнитной индукции и магнитного поля уменьшаются.

В случае $\kappa > 1$ медленные ударные волны существуют, если

$$\frac{(\gamma-1)(1+b^2)(\kappa-1) + 2\kappa\gamma P_{01}}{(2-\gamma)(1+b^2)} > \beta_-(b^2, P_{01}, \kappa)$$

где $\beta_{\pm}(b^2, P_{01}, \kappa)$ — решение уравнения $\varphi(\xi, \eta, \kappa) = 0$ относительно переменной $(\xi+1)$ при $\eta \ll 1$, либо если точка *A* ($\xi_A = \xi_{\min}$) замкнутой области адиабаты (фиг. 4) лежит ниже кривой 5 (фиг. 2).

Из неравенств (2.5) и уравнений (3.4)–(3.8) следует, что при постоянном потоке массы плотность, газодинамическое давление, температура и полное давление за скачком монотонно возрастают с убыванием κ от 1 по сравнению со значением в магнитной гидродинамике ($\kappa=1$). Скорость за разрывом V_2 , касательные составляющие магнитного поля и магнитной индукции при этом монотонно убывают.

При возрастании κ от 1 до ∞ плотность, газодинамическое давление и полное давление за скачком монотонно убывают, скорость среды за разрывом V_2 стремится при этом к скорости медленных магнитозвуковых волн a_2 ... Энтропия среды, касательные составляющие магнитного поля и магнитной индукции монотонно возрастают.

Часть области *b* (фиг. 1, 2), расположенная над осью $\xi=0$, и область *c* (фиг. 2) соответствуют быстрым ударным волнам сжатия. На этих разрывах касательные составляющие магнитного поля и магнитной индукции возрастают. Область *c* появляется при $\kappa > (\gamma+1)/\gamma$. В область *b* (фиг. 2) адиабата попадает при $\kappa < (\gamma+1)/(\gamma-1)$. Из (3.4)–(3.8) следует, что при постоянном потоке массы в зависимости от параметров перед скачком и скорости среды перед разрывом плотность за разрывом может либо возрастать, либо убывать с ростом κ .

Используя соотношения (3.4)–(3.8), можно показать, что при выполнении неравенства

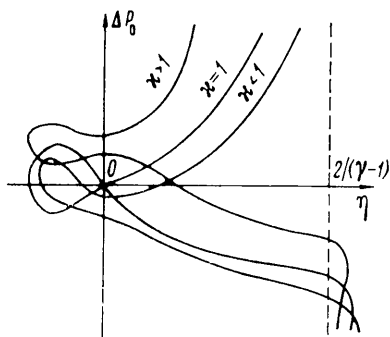
$$(3.9) \quad \xi_0^3 \gamma > (V_1^2 - 1)^2 b^2 [(2-\gamma)\xi_0 + 2]$$

где ξ_0 — корень уравнения

$$\frac{V_1^2 - 1}{\xi} = 2 \frac{\xi^2 - (b^2 + \gamma P_{01} - 1)\xi - b^2}{(\gamma - 1)\xi^2 - (\gamma - 2)b^2\xi + b^2} + 1$$

на интервале $(0, V_1^2 - 1)$, плотность R_2 убывает, скорость за разрывом V_2^2 возрастает, температура, магнитное поле, магнитная индукция и полное давление убывают при возрастании κ от 1 до ∞ . В случае, когда неравенство (3.9) не выполнено, плотность, магнитная индукция и полное давление возрастают, а скорость V_2^2 за разрывом убывает с ростом κ до тех пор, пока выполняется неравенство

$$(3.10) \quad V_2^2[\gamma - (\eta + 1)^2 b^2 (2 - \gamma)] < < \gamma[1 + (\eta + 1)^2 b^2]$$



Фиг. 5

Температура может возрастать и убывать. Заметим, что при $b^2 > \gamma / (2 - \gamma)$ неравенство (3.10) выполнено всегда.

При изменении κ от 1 до 0 минимальная скорость, с которой может распространяться быстрая ударная волна по среде, возрастает от 1 до ∞ . При постоянном потоке массы через поверхность разрыва с убыванием κ плотность убывает при выполнении неравенства (3.10) и возрастает в противном случае. При возрастающей плотности скорость среды за разрывом V_2 , магнитная индукция, магнитное поле и полное давление возрастают с убыванием κ ; газодинамическое давление и температура в зависимости от параметров перед разрывом могут либо возрастать, либо убывать до тех пор, пока энтропия за разрывом не уменьшится до своего значения перед разрывом. При убывающей плотности остальные параметры за разрывом могут как возрастать, так и убывать.

Зависимость скачка давления от η при разных κ представлена на фиг. 5.

Благодарим А. А. Бармина за обсуждение статьи и ценные замечания.

Поступила 18 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
2. Тарапов И. Е. Поверхности разрыва в намагничивающейся среде. ПМТФ, 1974, № 5.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
4. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
5. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Ресн. межвед. темат. сб., 1973, вып. 17.
6. Бармин А. А. Исследование поверхностей разрыва с выделением (поглощением) энергии в магнитной гидродинамике. ПММ, 1962, т. 26, № 5.