МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1975

УДК 532.546

О ЗАКАЧКЕ В СКВАЖИНУ С УЧЕТОМ РАЗЛИЧИЯ ПЛОТНОСТЕЙ НАГНЕТАЕМОЙ И ВЫТЕСНЯЕМОЙ ЖИДКОСТЕЙ

В. С. САРКИСЯН

(Москва)

С целью уменьшения количества сбросов промышленных стоков в водоемы и реки в последнее время производится удаление их в глубокозалегающие пласты — коллекторы. Оно осуществляется посредством нагнетания или налива промышленных стоков в буровые скважины, вскрывающие достаточно проницаемые водоносные или газосодержащие породы. В связи с этим приобретает большое значение задача о вытеснении пластовой жидкости или газа нагнетаемой в скважину сточной жидкостью с другими физическими свойствами.

Если пренебречь силой тяжести и учитывать лишь силы давления и сопротивления движению (т. е. для так называемых невесомых жидкостей), то при закачке в скважину граница раздела между ними будет иметь форму кругового цилиндра [1].

Вследствие влияния силы тяжести и различия плотностей (т. е. для так называемых тяжелых жидкостей) эта граница будет представлять собой некоторую криволинейную поверхность, существенно отличную от начальной — цилиндрической поверхности.

Если нагнетаемая жидкость более тяжелая, чем пластовая (вытесняемая), то при закачке первая жидкость погружается в нижнюю часть пласта, а затем по его подошве продвигается вперед быстрее, чем по кровле (фигура, *а*). Если нагнетаемая жидкость более легкая, чем пластовая, то при закачке первая жидкость сосредоточивается в верхней части пласта и вдоль его кровли продвигается быстрее, чем вдоль подошвы (фигура, *б*).

При фильтрации двух жидкостей с разными физическими свойствами (плотностями и вязкостями) образуются три зоны (фигура). Первая зона насыщена только нагнетаемой жидкостью; вторая — как нагнетаемой, так и вытесняемой, и третья — полностью заполнена вытесняемой жидкостью.

Рассмотрим осесимметричную задачу о вытеснении одной жидкости несмешивающейся с ней другой в горизонтальном пласте постоянной мощности, при одинаковой вязкости и разной плотности обеих жидкостей. Режим фильтрации будем считать упругим, а дебит скважины постоянным. Порода пласта считается предельно-анизотропной ($k_y=\infty$) [2]. Для определенности предположим объемный вес закачиваемых жидкостей γ_1 больше, чем пластовых γ_2 ($\gamma_1>\gamma_2$).

Математическая формулировка задачи приводит к следующей системе уравнений и краевых условий

$$\frac{\partial^2 p_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p_i}{\partial r}=\frac{1}{a}\frac{\partial p_i}{\partial r},\qquad i=\mathrm{I},\mathrm{III} \tag{1}$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left[ry\frac{\partial p_1}{\partial r}\right]=n_0 r\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{k}{a\mu}ry\frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{2}$$

$$\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(m-y)\frac{\partial p_2}{\partial r}\right]=n_0 r\frac{\partial (m-y)}{\partial t}+\frac{k}{a\mu}(m-y)r\frac{\partial p_2}{\partial t} \tag{3}$$

$$-2\pi m\frac{k}{\mu}r\frac{\partial p_\mathrm{I}(r,t)}{\partial r}\bigg|_{r=r_0}=Q=\mathrm{const}, \tag{4}$$

$$p_{III}(\infty, t) = p_{III}(r, 0) = p_e = \text{const}$$

(5) $$p_I(r_2, t) = p_2(r_2, t) + m\gamma_1, \quad p_{III}(r_1, t) = p_1(r, t)$$

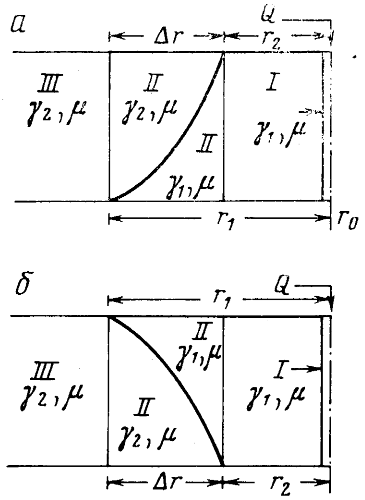
(6) $$Q_1(r_2) = Q_2(r_2), \quad Q_2(r_1) = Q_3(r_1)$$

Давления p_1 и p_2 и их производные по r и t связаны соотношениями

(7) $$p_1 = p_2 + \Delta\gamma y + m\gamma_2, \quad \Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 > 0$$

(8) $$\frac{\partial p_1}{\partial r} = \frac{\partial p_2}{\partial r} + \Delta\gamma\frac{\partial y}{\partial r}, \qquad \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Delta\gamma\frac{\partial y}{\partial t}$$

Здесь k — проницаемость пород, μ — вязкость, n_0 — пористость, a — коэффициент пьезопроводности, $p_{1,2}$ — давления соответственно на подошве и кровле пласта в зоне II, $p_{I,\ III}$ — давления на подошве пласта в зонах I и III, m — мощность пласта, y — ордината границы раздела, $r_{1,\ 2}$ — расстояние от скважины до границы раздела соответственно по подошве и кровле пласта, Q_{1-3} — расходы в зонах I, II и III соответственно, $\gamma_{1,\ 2}$ — объемные веса нагнетаемой и вытесняемой жидкостей.



Подставив (8) в (2) и сложив результат с (3), после деления полученного уравнения на mr найдем

(9) $$\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial p_2}{\partial t} = \\ = \frac{\Delta\gamma}{m}\left[\frac{1}{a}y\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ry\frac{\partial y}{\partial r}\right)\right]$$

Уравнение (9) можно представить в следующем виде:

(10) $$\frac{\partial^2 p_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial p_2}{\partial t} = \\ = -m\Delta\gamma\left[y_0\frac{\partial^2 y_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial y_0}{\partial r} - \frac{1}{a}\frac{\partial y_0}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial y_0}{\partial r}\right)^2\right], \quad y_0 = \frac{y}{m}$$

Для нахождения автомодельного решения уравнения (10) предположим $p = p(\lambda)$, $y_0 = y_0(\lambda)$, $\lambda = r^2/4at$

Тогда вместо (10) получим

$$[p_2' \exp(\lambda + \ln\lambda)]' = -m\Delta\gamma[y_0 y_0' \exp(\lambda + \ln\lambda)]'$$

В дальнейшем для простоты индекс у величины y_0 опускаем.

Интегрируя последнее уравнение, найдем

(11) $$p_2' = -0.5m\Delta\gamma(y^2)' + \frac{A_2}{\lambda}\exp(-\lambda)$$

Интеграл от (11) дает давление на кровле пласта в зоне II

(12) $$p_2 = -0.5m\Delta\gamma y^2 + A_2\,\text{Ei}(-\lambda) + B_2, \qquad \text{Ei}(-\lambda) = -\int_\lambda^\infty e^{-u}u^{-1}\,du$$

где A_2 и B_2 — постоянные интегрирования.

Из (12) и (7) получим выражение для давления на подошве пласта в зоне II

$$p_{\text{II}}=-0.5m\Delta\gamma y^2+A_2\mathrm{Ei}(-\lambda)+m\Delta\gamma y+m\gamma_2+B_2 \tag{13}$$

Давления в зонах I и III получаются посредством интегрирования уравнений (1):

$$p_{\text{I}}=A_1\,\mathrm{Ei}(-\lambda)+B_1,\qquad p_{\text{III}}=A_3\,\mathrm{Ei}(-\lambda)+B_3,\qquad \lambda=\frac{r^2}{4at} \tag{14}$$

Постоянные интегрирования A_{1-3} и B_{1-3} определяются из краевых условий (4)—(6).

Абсциссы пересечения границы раздела с подошвой и кровлей пласта $r_{1,2}$ находятся из условий

$$n_0\frac{dr_{1,2}}{dt}=-\frac{k}{\mu}\frac{\partial p_{1,2}(r_{1,2})}{\partial r} \tag{15}$$

Из первого условия (4) с учетом (14) находим

$$A_1=-\frac{Q\mu}{4\pi km}\exp(\lambda_0),\qquad \lambda_0=\frac{r_0^2}{4at}$$

где r_0 — радиус скважины.

Учитывая, что $\lambda_0\ll 1$, можно принять $\exp(\lambda_0)\approx 1$. Тогда

$$A_1=-\frac{Q\mu}{4\pi km} \tag{16}$$

Расходы Q_{1-3} определяются так

$$Q_1(r_2)=-2\pi m\frac{k}{\mu}r\frac{\partial p_{\text{I}}}{\partial r}\bigg|_{r=r_2}=-4\pi m\frac{k}{\mu}A_1\exp(-\lambda_2) \tag{17}$$

$$Q_3(r_1)=-2\pi m\frac{k}{\mu}r\frac{\partial p_{\text{III}}}{\partial r}\bigg|_{r=r_1}=-4\pi m\frac{k}{\mu}A_3\exp(-\lambda_1) \tag{18}$$

$$Q_2=-2\pi m\frac{k}{\mu}r\left[y\frac{\partial p_1}{\partial r}+(1-y)\frac{\partial p_2}{\partial r}\right]=-2\pi m\frac{k}{\mu}r\left[y\frac{\partial p_2}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+m\Delta\gamma y\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial p_2}{\partial r}-y\frac{\partial p_2}{\partial r}\right]=-4\pi m\frac{k}{\mu}A_2\exp(-\lambda)$$

Принимая в последнем выражении $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$, найдем

$$Q_2(r_1)=-4\pi m\frac{k}{\mu}A_2\exp(-\lambda_1),\qquad \lambda_1=\frac{r_1^2}{4at} \tag{19}$$

$$Q_2(r_2)=-4\pi m\frac{k}{\mu}A_2\exp(-\lambda_2),\qquad \lambda_2=\frac{r_2^2}{4at} \tag{20}$$

Из условий (6) с учетом (17)—(20) получим

$$A_1=A_2=A_3=-\frac{Q\mu}{4\pi km} \tag{21}$$

Из второго условия (4) вытекает

$$B_3=p_e \tag{22}$$

Постоянные B_1 и B_2 определяются из двух условий (5) и выражаются следующим образом:

$$B_1=p_e+0.5m\Delta\gamma,\quad B_2=p_e-m\gamma_2 \tag{23}$$

Подставляя значения A_{1-3}, B_{1-3} в уравнение (13) и (14), получим расчетные формулы для определения давления во всех трех зонах:

$$\begin{gathered}p_{\mathrm{I}}=p_e+0.5m\Delta\gamma-\frac{Q\mu}{4\pi km}\mathrm{Ei}(-\lambda)\\ p_{\mathrm{II}}=p_e+m\Delta\gamma y^2-\frac{Q\mu}{4\pi km}\mathrm{Ei}(-\lambda),\qquad p_{\mathrm{III}}=p_e-\frac{Q\mu}{4\pi km}\mathrm{Ei}(-\lambda)\end{gathered} \tag{24}$$

Забойное давление p_0 определяется по первой формуле (24) при $r=r_0$ и имеет вид

$$p_0=p_e+0.5m\Delta\gamma-\frac{Q\mu}{4\pi km}\mathrm{Ei}\left(-\frac{r_0^2}{4at}\right)$$

Если объемные веса нагнетаемой и вытесняемой жидкостей одинаковы, т. е. $\gamma_1=\gamma_2$ ($\Delta\gamma=0$), зависимости (24) превращаются в формулу Тейса, которая обычно используется для расчетов.

Для определения закона движения границы раздела воспользуемся уравнением (3), записав его с учетом (10) в виде

$$m\Delta\gamma\left[y\left(\frac{\partial^2y}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial r}-\frac{1}{a}\frac{\partial y}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{1-y}\frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial p_2}{\partial r}-\frac{n_0\mu}{k}\frac{1}{1-y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Переходя от x и t к λ, будем иметь

$$y''+\left[\frac{1}{\lambda}+1+\frac{\varkappa}{y(1-y)}\right]y'+\frac{1}{y}(y')^2=-\frac{1}{m\Delta\gamma}\frac{1}{y(1-y)}y'p_2' \tag{25}$$

где $\varkappa=n_0\mu a/km\Delta\gamma$.

Учитывая значение p_2, по (11) вместо (25) получим

$$\begin{gathered}y''+\left\{\frac{1}{\lambda}+1+\frac{\varkappa}{y(1-y)}+\right.\\ \left.+\frac{1}{y(1-y)}\left[-0.5(y^2)'+A_0\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right]\right\}y'+\frac{1}{y}(y')^2=0\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь

$$A_0=\frac{A_2}{m\Delta\gamma}=-\frac{Q\mu}{4\pi km^2\Delta\gamma} \tag{27}$$

Таким образом, получили дифференциальное уравнение границы раздела, которое можно решить на ЭВМ.

Рассмотрим некоторые приближенные решения уравнения (25), (26).

1) Если в (25) положить

$$y'p'=0,\qquad (y')^2=0$$

получим

$$y''+\left[\frac{1}{\lambda}+1+\frac{\varkappa}{y(1-y)}\right]y'=0 \tag{28}$$

или

$$(29)\qquad \frac{y(1-y)}{y(1-y)+\varkappa}y''+\left[\frac{1}{\lambda}\frac{y(1-y)}{y(1-y)+\varkappa}+1\right]y'=0$$

Осредним коэффициент при y''

$$\theta=\int_0^1\frac{y(1-y)}{y(1-y)+\varkappa}dy=1-\frac{2\varkappa}{\sqrt{4\varkappa+1}}\ln\frac{\sqrt{4\varkappa+1}+1}{\sqrt{4\varkappa+1}-1}$$

С учетом этого уравнение (28) примет вид

$$y''+\left(\frac{1}{\lambda}+\theta\right)y'=0$$

Интегрируя, получим

$$(30)\qquad y=c_1\,\mathrm{Ei}(-\theta\lambda)+c_2$$

Постоянные интегрирования $c_{1,2}$ определяются из условий

$$(31)\qquad \lambda=\lambda_1=\frac{r_1^2}{4at}\quad(y=0),\qquad \lambda=\lambda_2=\frac{r_2^2}{4at}\quad(y=1)$$

и выражаются следующим образом:

$$c_1=\frac{1}{\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)},\qquad c_2=\frac{-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)}{\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)}$$

Тогда уравнение границы раздела определится по формуле

$$(32)\qquad y=\frac{\mathrm{Ei}(-\theta\lambda)-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)}{\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)},\qquad \lambda=\frac{r^2}{4at}$$

Параметры $\lambda_{1,2}$ определяются из кинематических условий (15) и выражаются следующим образом:

$$\lambda_1=-\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{A_2\exp(-\lambda_1)}{m\Delta\gamma}+c_1\exp(-\theta\lambda_1)\right],$$

$$(33)\qquad \lambda_2=-\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{A_2\exp(-\lambda_2)}{m\Delta\gamma}-c_1\exp(-\theta\lambda_2)\right]$$

Здесь

$$A_2=-\frac{Q\mu}{4\pi km},\qquad \varkappa=\frac{n_0a\mu}{km\Delta\gamma},\qquad c_1=\frac{1}{\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta\lambda_1)}$$

Таким образом, определение $\lambda_{1,2}$ сводится к решению системы трансцендентных уравнений (33).

Длина границы раздела равна

$$\Delta r=r_1-r_2=\varkappa_1\sqrt{\frac{km\Delta\gamma}{n_0\mu}t}$$

где

$$\varkappa_1=2\sqrt{\varkappa}\,(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2})$$

Если в уравнениях (33) положить $\Delta\gamma=\gamma_1-\gamma_2=0$, т. е. считать объемные веса обоих жидкостей одинаковыми, получим

$$\lambda_1\exp(-\lambda_1)=\lambda_2\exp(-\lambda_2)=\frac{Q}{4\pi kman_0}$$

Этот результат совпадает с решением задачи Н. Н. Веригина [1], если в ней положить коэффициенты пьезопроводности $a_1=a_2$.

Результат, приведенный в работе [1], получен без гипотезы о предельно анизотропной среде. Отсюда следует, что применение гипотезы о предельной анизотропности пород не влияет на результаты по определению границы раздела жидкостей.

2) Умножая обе части уравнения (28) на величину $y(1-y)$, найдем

$$y(1-y)y''+\left[\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)y(1-y)+\varkappa\right]y'=0 \tag{34}$$

Осредним коэффициент при y''

$$\alpha=\int_0^1 y(1-y)\,dy=\frac{1}{6}$$

Тогда (28) примет вид

$$y''+\left(\frac{1}{\lambda}+\theta_1\right)y'=0,\qquad \theta_1=6\varkappa+1=\frac{6n_0\mu a}{km\Delta\gamma}+1 \tag{35}$$

Решение уравнения (35) записывается аналогично (30):

$$y=c_1\,\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda)+c_2 \tag{36}$$

где $c_{1,2}$ определяются из условий (31) и выражаются так:

$$c_1=\frac{1}{\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_1)},\qquad c_2=\frac{-\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda)}{\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_1)}$$

а уравнение границы раздела будет

$$y=\frac{\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda)-\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_1)}{\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_2)-\mathrm{Ei}(-\theta_1\lambda_1)}$$

Параметры $\lambda_{1,2}$ находятся по (33), принимая вместо θ величину θ_1.

3) Если положить в (26)

$$(y^2)'=0,\ (y')^2=0$$

то получим

$$y(1-y)y''+\left[\left(\frac{1}{\lambda}+1\right)y(1-y)+\varkappa+A_0\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right]y'=0 \tag{37}$$

Осредняя $y(1-y)$, получим

$$y''+\left[\frac{1}{\lambda}+\theta_1+6A_0\frac{\exp(-\lambda)}{\lambda}\right]y'=0 \tag{38}$$

Решение (38) будет

$$y=c_1J(\theta_1,A_{01},\lambda)+c_2 \tag{39}$$

где

$$J(\theta_1,A_{01},\lambda)=\int_0^\lambda\frac{\exp[-\theta_1\lambda+A_{01}\,\mathrm{Ei}(-\lambda)]}{\lambda}\,d\lambda$$

$$A_{01}=6A_0=6\frac{A_2}{m\Delta\gamma}=-6\frac{Q\mu}{4\pi km^2\Delta\gamma} \tag{40}$$

постоянные интегрирования $c_{1,2}$ определяются из условий (31) и имеют вид

$$c_1 = \frac{1}{J(\theta_1, A_{01}, \lambda_2) - J(\theta_1, A_{01}, \lambda_1)} \qquad c_2 = \frac{-J(\theta_1, A_{01}, \lambda_1)}{J(\theta_1, A_{01}, \lambda_2) - J(\theta_1, A_{01}, \lambda_1)}$$

а уравнение границы раздела определяется по формуле

$$y = \frac{J(\theta_1, A_{01}, \lambda) - J(\theta_1, A_{01}, \lambda_1)}{J(\theta_1, A_{01}, \lambda_2) - J(\theta_1, A_{01}, \lambda_1)}$$

где $J(Q_1, A_{01}, \lambda_{1,2})$ находятся по (40) при $\lambda = \lambda_{1,2}$.

Параметры $\lambda_{1,2}$ определяются аналогично первому случаю.

В работах [3–6] рассматривается движение жидкостей только в области границы раздела (II зона), где предполагается жесткий режим фильтрации. Взаимосвязанные с этой областью течения закачиваемой жидкости перед границей раздела (I зона) и вытесняемой за границей раздела (III зона) не рассматриваются. Между тем очевидно, что течение в зоне границы раздела условиями непрерывности должно быть связано с течением вне этой зоны. Поэтому такая постановка задачи является неполной.

В работах [7, 8] даются решения указанной выше задачи с учетом движения во всех трех зонах, но при закачке жидкостей в галерею или ряд скважин большой длины при упругом режиме фильтрации.

Поступила 31 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
2. *Михайлов Г. К.* Применение модели предельно-анизотропных грунтов для оценки решений некоторых краевых задач о движении потока грунтовых вод по водоупору. Инж. сб., 1953, т. 15.
3. *Чарный И. А.* Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 4.
4. *Чарный И. А.* Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
5. *Чарный И. А.* Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, М., 1963.
6. *Алихашкин Я. И.* Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1961, № 5.
7. *Веригин Н. Н., Саркисян В. С., Шибанов А. В.* Об определении границы раздела двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
8. *Веригин Н. Н., Саркисян В. С.* О фильтрации двух жидкостей с разной плотностью и вязкостью при закачке в галерею с постоянным расходом. Докл. АН СССР, 1974, т. 218, № 3.