МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1975

УДК 532.526.5

О КРИТЕРИИ ОТРЫВА ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

Для оценки того, будет ли течение безотрывным, широко используются критерии отрыва пограничного слоя. В данной статье такой критерий выводится для случая двумерного пограничного слоя на теплоизолированной поверхности при наличии отсоса газа через ограниченный участок поверхности.

1. Рассмотрим возможную структуру пограничного слоя при наличии отсоса. Если отсос производился на значительной длине до рассматриваемого сечения и скорость отсоса постоянна или изменяется достаточно плавно, то под влиянием отсоса на всей толщине пограничного слоя устанавливается профиль скорости, отличный от того, который был бы без отсоса. Критерий отрыва для этого случая был получен в работе [1].

Однако на практике часто применяется интенсивный отсос на длине, небольшой по сравнению с характерным размером тела, т. е. с длиной, на которой нарастает пограничный слой. Так бывает, например, при применении отсоса в районе предполагаемой точки отрыва или в районе отражения от стенки скачка уплотнения с целью предотвращения или уменьшения последствий отрыва пограничного слоя. В этом случае влияние отсоса не успевает сказаться на форме профиля скорости по всей толщине пограничного слоя. Профиль продольной скорости сильно деформируется только вблизи стенки, а в остальной части пограничного слоя форма профиля продольной скорости остается такой же, какая была бы без отсоса. Этот случай и будет рассматриваться в дальнейшем.

Пусть x и y — расстояния, отсчитываемые вдоль образующей тела и по нормали к поверхности обтекаемого тела сооответственно; течение будем предполагать двумерным, т. е. в направлении оси z, перпендикулярной образующей и нормали к поверхности, параметры течения не изменяются и проекция скорости на направление оси z равна нулю. Проекции скорости на направления x и y обозначим, как обычно, через u и v.

Предположим, что при достаточно интенсивном отсосе на короткой длине профиль $u(y)$ в верхней части, которую в дальнейшем будем называть внешней частью пограничного слоя, не деформируется вследствие отсоса, а только как бы убирается его нижняя часть до некоторого значения скорости $u=u_1$. Отсос же оказывает существенное влияние на формирование профиля скорости в нижней части — у стенки, которую будем называть подслоем. Пусть толщина этой части $\delta_1(x)$. Так как газ из пограничного слоя вблизи стенки интенсивно отсасывается, то ясно, что $\delta_1 \ll \delta$, где δ — толщина всего пограничного слоя.

В связи с этим и в силу того, что граничное условие на стенке для компоненты скорости u при отсосе будет по-прежнему $u=0$, $\partial u/\partial y$ в подслое будет намного больше, чем $\partial u/\partial y$ во внешней (оставшейся не деформированной) части профиля скорости в пограничном слое. Поэтому при формировании подслоя около стенки оставшаяся (внешняя) часть пограничного слоя играет по отношению к нему такую же роль, как внешний невязкий поток при формировании обычного пограничного слоя. Иначе говоря, пристеночный подслой нарастает так (его толщина δ_1, расход газа в нем и т. п.), как нарастал бы пограничный слой при скорости внешнего невязкого потока на его границе, равной u_1.

Изменение расхода газа Q_1 через сечение подслоя толщиной δ_1 у стенки происходит по двум причинам: во-первых, вследствие действия сил вязкости на границе подслоя к нему присоединяются новые частицы газа, во-вторых, происходит отсос газа через стенку

$$(1.1)\qquad dQ_1/dx=A(x)+\rho_w v_w$$

где $A(x)$ — количество газа, поступившее в подслой на единице длины внешней границы вследствие действия сил вязкости; индексом w отмечены значения величин на стенке. Скорость $v_w<0$, так как ось y направлена вверх по нормали к стенке.

Найдем выражение для величины $A(x)$. Так как рассматривается тонкий подслой газа вблизи стенки, то течение в нем можно считать ламинарным даже в том случае, когда течение в основном пограничном слое турбулентное (тем более что отсос оказывает стабилизирующее воздействие на пограничный слой [2]). Вероятно, возможно и турбулентное течение в подслое, однако этот случай в данной статье рассматриваться не будет. При оценке скорости нарастания расхода газа Q через сечение пограничного слоя будем считать, что в направлении оси z рассматривается полоска единичной ширины.

Профили скорости в пограничном слое при различном внешнем потоке и различных условиях на стенке могут отличаться друг от друга весьма существенно. Однако вблизи внешней границы пограничного слоя эти различия, как правило, невелики. При одинаковых скоростях и плотностях внешних потоков увеличение расхода газа через сечение пограничного слоя определяется только действием сил трения вблизи внешней границы пограничного слоя, т. е. только формой профиля скорости вблизи внешней границы. Поэтому в первом приближении, в силу малых различий профилей скорости вблизи внешней границы пограничного слоя, можно считать, что нарастание расхода через пограничный слой при произвольном внешнем течении и условиях на стенке такое же, как на непроницаемой теплоизолированной пластинке при одинаковых скорости и плотности внешнего потока и расходе газа через пограничный слой.

Вычислим приращение Q при обтекании пластинки. Введем переменные типа переменных Дородницына

$$(1.2)\qquad \xi=\frac{x}{L},\quad \eta=\frac{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}{L}\int_0^y\frac{\rho}{\rho_0}\,dy,\quad \mathrm{Re}_0=\frac{\rho_0 UL}{\mu_0}$$

где L — характерный размер обтекаемого тела, U — скорость на границе пограничного слоя; индекс «0» обозначает, что параметры взяты на внешней границе пограничного слоя. Под толщиной пограничного слоя δ, как обычно, будем подразумевать то значение y, при котором $u/U=0{,}99$. Пусть при $y=\delta$ $\eta=\eta_0$, тогда расход газа через сечение пограничного слоя толщиной δ равен

$$(1.3)\qquad Q=\int_0^\delta \rho u\,dy=\frac{L\rho_0 U\eta_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}\int_0^1\frac{u}{U}\,d\frac{\eta}{\eta_0}$$

Если пластинка теплоизолирована или температура ее постоянна, то решение задачи о пограничном слое автомодельно (см., например, [3]), т. е.

(1.4) $$u/U=f(\zeta),\ \zeta=\eta/2\xi^{1/2}$$

При этом интеграл в формуле (1.3) не зависит от числа M внешнего потока, его значение легко может быть вычислено по значениям $f(\zeta)$ [3] и равно приближенно 0.657.

Таким образом,

(1.5) $$Q=0.657L\rho_0U\eta_0/\mathrm{Re}_0^{1/2}$$

Так как при $u/U=0{,}99$ $\zeta=\zeta_0$ – постоянная величина, то из формул (1.2) – (1.5) получаем

(1.6) $$\eta_0^2=2.32Q^2/\mathrm{Re}_0\mu_0^2,\quad \eta_0=2\zeta_0(x/L)^{1/2},\quad x=0.577Q^2/\zeta_0^2\rho_0U\mu_0$$

Дифференцируя (1.5) по x и подставляя в результат выражения η_0 и x из (1.6), находим

(1.7) $$dQ/dx=0.865\,\zeta_0^2\rho_0U\mu_0/Q$$

Величина ζ_0 не зависит от числа M и равна приближенно 2.5. Подставляя это значение ζ_0 в (1.7), получим искомое выражение для изменения расхода через сечение пограничного слоя при обтекании пластинки сжимаемым газом

(1.8) $$dQ/dx=5.4\,\rho_0U\mu_0/Q$$

Как отмечалось выше, это же выражение может быть принято в первом приближении и при обтекании произвольного контура, если в него подставить соответствующие рассматриваемому сечению пограничного слоя значения ρ_0, U, μ_0 и Q. Таким образом, формула (1.1) принимает следующий вид:

(1.9) $$dQ_1/dx=5.4\,\rho_1u_1\mu_1/Q_1+\rho_wv_w$$

где индексом «1» отмечены величины на границе пристеночного слоя, в котором существенно сказывается влияние отсоса на профиль компоненты скорости u.

Первый член в формуле (1.9) положителен, второй отрицателен. Если подслой очень тонок (Q_1 очень мало), то правая часть в (1.9) будет положительна, т. е., несмотря на отсос, толщина подслоя будет расти. При толстом подслое (большом Q_1) присоединение массы за счет вязких сил меньше отсасываемой массы и толщина подслоя убывает. Существует при заданном отсосе и параметрах на внешней границе подслоя такой расход Q_1, что $dQ_1/dx=0$, т. е. подслой не растет и не убывает. Оценим длину, на которой достигается это равновесное значение Q_1. Для оценки рассмотрим обтекание пластинки потоком несжимаемой жидкости со скоростью U и с равномерным отсосом жидкости через пластинку со скоростью v_w. В этом случае длина, на которой достигается равновесное состояние, равна [2] $x=4(\nu/U)\,(U^2/v_w^2)$.

Из последней формулы следует, что, например, в воздухе при $U=100$ *м/с* и $|v_w|=10$ *м/с* $x\approx0{,}06$ *мм*. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что расход Q_1 мгновенно принимает свое равновесное значение при изменении условий на границе подслоя или скорости отсоса. При этом дифференциальное уравнение (1.9) заменится конечным соотношением

(1.10) $$Q_1=-5.4\,\rho_1u_1\mu_1/\rho_wv_w$$

В дальнейшем будем предполагать, что числа M внешнего потока дозвуковые или умеренные сверхзвуковые, обтекаемая поверхность теплоизолированная или имеет на рассматриваемом участке постоянную температуру, не сильно отличающуюся от температуры торможения потока газа. Так как профиль скорости как в ламинарном, так и в турбулентном пограничном слое в районе отрыва, который рассматривается в первую очередь, в основной своей части не сильно отличается от линейного, то на небольших расстояниях от стенки скорость и число M будут по порядку величины равны $u \sim Uy/\delta$ $M \leqslant M_0 y/\delta$. Отсюда следует, что при сделанных выше предположениях и при небольших y/δ можно считать $\rho \approx \rho_w$ $\mu \approx \mu_w$.

Действительно, например, при $y/\delta \leqslant 0.1$ и $M_0 \approx 3$ будет при теплоизолированной поверхности $M \leqslant 0.3$. И отличие температуры, а следовательно, и плотности, и коэффициента вязкости от их значений на стенке будет $<2\%$.

Учитывая, что $\rho \approx \rho_w$ и $\mu \approx \mu_w$, получим из (1.10)

$$Q_1 = -5.4\, u_1 \mu_w / v_w \tag{1.11}$$

2. Найдем теперь форму профиля скорости в подслое вблизи стенки. Уравнения неразрывности и движения ламинарного пограничного слоя имеют вид [3]

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.1}$$

При равновесном состоянии подслоя $v \equiv v_w$. Так как из сделанных выше оценок следует, что отличия от равновесия невелики, то можно считать с достаточной степенью точности, что компонента скорости поперек подслоя постоянна.

Оценим члены в уравнении движения.

$$\frac{|\rho u\, \partial u/\partial x|}{|\rho v\, \partial u/\partial y|} \sim \frac{u_1^2}{l} \frac{\delta_1}{u_1 |v_w|} \sim \frac{u_1 \nu}{v_w^2 l} \tag{2.2}$$

где l — характерная длина нарастания подслоя, δ_1 — его толщина. Для толщины подслоя использована оценка $\delta_1 \sim \nu / |v_w|$ [2].

Полагая в (2.2) для оценки $u_1 \sim 100$ *м/с*, $|v_w| \sim 10$ *м/с*, $l \sim 0.01$ *м*, получим, что для воздуха это отношение будет порядка 0.001.

Следовательно, в рассматриваемом случае можно пренебречь вблизи стенки первым членом в уравнении движения по сравнению со вторым. Принимая во внимание все сделанные выше оценки, можем записать уравнение движения в подслое в следующем виде:

$$\rho_w v_w \partial u/\partial y + \partial p/\partial x = \mu_w \partial^2 u/\partial y^2 \tag{2.3}$$

Интегрируя (2.3) дважды по y, получаем

$$u = C_2 \exp\left(\rho_w v_w \frac{y}{\mu_w}\right) - \left(\frac{dp}{dx}\right)\left(\frac{y}{\rho_w v_w} + \frac{\mu_w}{\rho_w^2 v_w^2}\right) + \frac{C_1 \mu_w}{\rho_w v_w} \tag{2.4}$$

где C_1 и C_2 — некоторые произвольные функции от x.

Определим C_1 и C_2 из условий, что на стенке $u=0$ при $y=0$ и на некотором расстоянии от стенки $y=\delta_1(x)$, $u=u_1(x)$. Подставляя эти условия в (2.4), после несложных преобразований находим

$$C_1 = \frac{u_1 + (dp/dx)(\mu_w/\rho_w^2 v_w^2)[-\mathrm{Re}_1 + 1 - \exp(-\mathrm{Re}_1)]}{(\mu_w/\rho_w v_w)[1 - \exp(-\mathrm{Re}_1)]}$$

(2.5)

$$C_2=-\frac{u_1+(dp/dx)\delta_1/\rho_w v_w}{1-\exp(-\mathrm{Re}_1)},\quad \mathrm{Re}_1=\frac{\rho_w|v_w|\delta_1}{\mu_w}.$$

Искомое выражение для профиля скорости в подслое будет

(2.6)
$$u=u_1\frac{\exp[-(y/\delta_1)\mathrm{Re}_1]-1}{\exp(-\mathrm{Re}_1)-1}+$$
$$+\frac{(dp/dx)\delta_1}{\rho_w v_w}\left\{\frac{\exp[-(y/\delta_1)\mathrm{Re}_1]-1}{\exp(-\mathrm{Re}_1)-1}-\frac{y}{\delta_1}\right\}$$

Точка отрыва пограничного слоя характеризуется тем, что на стенке производная $\partial u/\partial y$ обращается в этой точке в нуль. Дифференцируя (2.6) по y, найдем, что в точке отрыва должно выполняться следующее соотношение:

$$u_1+\frac{(dp/dx)\delta_1}{\rho_w v_w}\left[1-\frac{1-\exp(-\mathrm{Re}_1)}{\mathrm{Re}_1}\right]=0$$

Удобно представить это выражение в несколько ином виде, выделив в левой части параметр отрыва в той форме, в которой он обычно вводится в отсутствие отсоса

(2.7)
$$\frac{(dp/dx)\delta_1^2}{u_1\mu_w}=\frac{\mathrm{Re}_1}{1-[1-\exp(-\mathrm{Re}_1)]/\mathrm{Re}_1}$$

При $v_w\to 0$ (т. е. при переходе к течению без отсоса) правая часть в формуле (2.7) стремится к значению 2, т. е. к тому значению параметра отрыва, которое получается при выводе критерия отрыва ламинарного пограничного слоя без отсоса с помощью разложения в ряд вблизи стенки функции, дающей профиль скорости в пограничном слое.

Если Re_1 не очень мало ($\mathrm{Re}_1\geqslant 10$), то $[1-\exp(-\mathrm{Re}_1)]/\mathrm{Re}_1\ll 1$ и формула (2.7) существенно упрощается

(2.8)
$$\frac{(dp/dx)\delta_1^2}{u_1\mu_w}=\mathrm{Re}_1=-\frac{\rho_w v_w\delta_1}{\mu_w}$$

3. Формулы (2.7) и (2.8) связывают параметры на границе подслоя в точке отрыва. Для расчетов же и приложений надо иметь связь над точкой отрыва параметров, характеризующих внешний поток и пограничный слой в целом. Для того чтобы получить эту связь, рассмотрим профиль скорости во внешней части пограничного слоя. Как указывалось выше, в рассматриваемом случае его форма над точкой отрыва будет такая же, как и без отсоса, но только срезана нижняя часть до скорости u_1. Пусть форма профиля над точкой отрыва без отсоса определяется формулой $u/U=f(y/\delta)$. При малых и умеренных скоростях функция f для ламинарного пограничного слоя близка в основной своей части к параболе, а для турбулентного — к прямой [4]. Если обозначить через Q расход через пограничный слой, который был бы при отсутствии отсоса, а через q — расход между стенкой и высотой y, то профиль скорости можно представить как функцию расхода: $u/U=\varphi(q/Q)$.

Предположим теперь, что до рассматриваемого сечения был отсосан расход, равный q_1. Тогда скорость u_1 на границе внешней части пограничного слоя и подслоя будет равна

(3.1)
$$u_1=U\varphi(q_1/Q)$$

Таким образом, скорость на границе подслоя известна, если известен расход через пограничный слой, который был бы без отсоса, и количество отсосанного газа до точки отрыва. Последняя величина легко может быть выражена через интеграл от скорости отсоса.

Найдем теперь величину δ_1, входящую в формулы (2.7), (2.8). Для определения δ_1 вычислим, пользуясь известным профилем скорости в подслое (2.6), величину Q_1 расхода газа через подслой и сравним ее с величиной равновесного расхода (2.8).

Определяя в точке отрыва константы, входящие в (2.4), из условий, что на стенке $u=0$ и $\partial u/\partial y=0$, получим профиль скорости в виде

$$u=\frac{1}{\rho_w v_w}\frac{dp}{dx}\left\{\frac{\mu_w}{\rho_w v_w}\left[\exp(\rho_w v_w y/\mu_w)-1\right]-y\right\} \tag{3.2}$$

Умножая (3.2) на ρ и интегрируя от 0 до δ_1, получим с учетом равенств $\rho\approx\rho_w$, $\mu\approx\mu_w$

$$Q_1=\frac{\delta_1^2}{v_w}\frac{dp}{dx}\left\{\frac{[\exp(-\mathrm{Re}_1)-1]}{\mathrm{Re}_1^2}+\left(\frac{1}{\mathrm{Re}_1}\right)-0.5\right\}$$

Используя соотношение (2.7), упростим это выражение. После несложных преобразований получим

$$Q_1=\mu_w u_1/v_w-(dp/dx)\delta_1^2/2v_w$$

Приравнивая правую часть значению Q_1, определенному по формуле (1.11), найдем выражение для δ_1

$$\delta_1^2=12.8u_1\mu_w\left(\frac{dp}{dx}\right)^{-1} \tag{3.3}$$

Исключая из (3.3) u_1 с помощью (2.7), найдем

$$\mathrm{Re}_1^2=12.8\,\{\mathrm{Re}_1-[1-\exp(-\mathrm{Re}_1)]\}$$

Решением этого уравнения будет $\mathrm{Re}_1\approx 11.7$. При этом для δ_1 над точкой отрыва получаем формулу, содержащую только вязкость у стенки и расход газа через перфорацию на единицу площади

$$\delta_1=11.7\,\mu_w/\rho_w|v_w| \tag{3.4}$$

Подставляя выражение u_1 из (3.1) и δ_1 из (3.4) в (2.7) или (3.3), найдем связь между параметрами внешнего потока, вязкостью и расходом отсасываемого газа, которая должна выполняться в сечении отрыва пограничного слоя, т. е. критерий отрыва при наличии отсоса

$$\frac{(dp/dx)\mu_w}{\rho_w^2 v_w^2 U\varphi(q_1/Q)}=0.1 \tag{3.5}$$

Это выражение справедливо как при ламинарном, так и при турбулентном режиме течения во внешней части пограничного слоя. В зависимости от режима течения различный вид будет иметь лишь функция $\varphi(q_1/Q)$.

В случае ламинарного течения несжимаемой жидкости во внешней части слоя профиль скорости близок к параболическому. Полагая $u/U=(y/\delta)^2$, найдем по формуле (1.3)

$$\varphi_l(q_1/Q)=(q_1/Q)^{2/3} \tag{3.6}$$

Для турбулентной внешней части пограничного слоя, когда над точкой отрыва $u/U=y/\delta$, получим

$$\varphi_t(q_1/Q)=(q_1/Q)^{1/2} \tag{3.7}$$

Если стенка теплоизолирована и число $\mathrm{Pr}=1$, то применение переменных Дородницына [3] показывает, что связь между скоростью и расходом остается в сжимаемом газе такой же, как и в несжимаемой жидкости. Поэтому можно полагать, что формулы (3.6), (3.7) дают с достаточной степенью точности выражение для $\varphi(q_1/Q)$ в общем случае.

Критерии отрыва пограничного слоя без отсоса имеют в случае ламинарного и турбулентного течения соответственно следующий вид [4]:

$$\frac{(dp/dx)z^2}{U\mu}=\xi_l(M),\qquad \frac{(dp/dx)z}{\rho U^2}=\xi_t(M) \tag{3.8}$$

Представим в аналогичном виде критерий отрыва при отсосе (3.5), используя вместо характерного размера пограничного слоя z величину расхода Q. Получим для ламинарного и турбулентного пограничного слоя соответственно

$$\begin{gathered}\frac{(dp/dx)Q^2}{\rho_0{}^2U^3\mu_w}=0.1\frac{\rho_w{}^2}{\rho_0{}^2}\frac{Q^2}{\mu_w{}^2}\frac{v_w{}^2}{U^2}\left(\frac{q_1}{Q}\right)^{2/3}\\ \frac{(dp/dx)Q}{\rho_0{}^2U^3}=0.1\frac{\rho_w{}^2}{\rho_0{}^2}\frac{Q}{\mu_w}\frac{v_w{}^2}{U^2}\left(\frac{q_1}{Q}\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{3.9}$$

Из этих формул следует, что отсос непосредственно в рассматриваемом сечении влияет на предотвращение отрыва значительно сильнее, чем предварительный отсос некоторой массы газа из пограничного слоя (v_w/U, определяющее отсос в данном сечении, входит в (3.9) в квадрате, q_1/Q — в степени меньше единицы). Необходимо подчеркнуть, что формула (3.5) неприменима при скорости отсоса, стремящейся к нулю, так как при ее выводе (в частности, при выводе соотношения (1.10)) предполагалось, что скорость отсоса не очень мала.

В качестве примера применения полученных формул рассмотрим вопрос о предотвращении отрыва в турбулентном пограничном слое в несжимаемой жидкости. Пусть $Q/\mu\approx10^4$ (это соответствует $\delta\sim10^{-3}$ *м* при $U\sim100$ *м/с*). Скорость отсоса на практике не может быть сделана произвольно большой, так как это связано с большими затратами энергии на отсос, трудностями создания больших разрежений в камере отсоса и т. п. Предположим, что возможная скорость отсоса ограничена значениями $|v_w|=0.01\,U$. Рассмотрим вопрос о том, сколько надо предварительно отсосать из пограничного слоя, чтобы предотвратить его отрыв, если без отсоса формально рассчитанное значение параметра отрыва в k раз превосходит его критическое значение. Переходя в формуле (3.8) от характерного размера z к расходу Q и принимая критическое значение, рассчитанное при $z=\delta^*$, равным 0.015 [4], получим, что в рассматриваемом сечении

$$(dp/dx)Q/\rho U^3=0.075\,k$$

Для предотвращения отрыва q_1/Q должно быть таким, чтобы правая часть в (3.9) была больше этой величины. Отсюда следует, что при $k=4$ необходимо предварительно отсосать $>9\%$ расхода через пограничный слой, при $k=10$ – $>57\%$.

Поступила 8 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватажин А. Б.* Определение параметра отрыва несжимаемого магнитогидродинамического пограничного слоя с помощью теории размерностей. Теплофизика высоких температур, 1972, т. 10, № 2.
2. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969.
3. *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой. М., Физматгиз, 1962.
4. *Бам-Зеликович Г. М.* Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 12.