МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1975

УДК 532.517.4

О ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В СРЕДЕ, ПОДВЕРГАЮЩЕЙСЯ ДЕЙСТВИЮ ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

В. Л. ЗИМОНТ, В. А. САБЕЛЬНИКОВ

(Москва)

Турбулентная диффузия в средах, подвергающихся действию однородной деформации, вызванной наличием постоянных по пространству градиентов средней скорости, представляет собой идеализацию реальных процессов, в частности таких, как диффузия в каналах переменной площади сечения [1], в приземных слоях атмосферы [2] и т. д. В работе ставится задача о связи статистических характеристик переноса пассивной субстанции при турбулентной диффузии в деформируемых средах со статистическими характеристиками турбулентности.

В качестве статистических характеристик переноса, как обычно, используются первые два момента вектора случайного смещения жидкой частицы под действием турбулентных пульсаций скорости: среднее смещение и компоненты тензора дисперсии смещения жидкой частицы.

Получены соотношения, связывающие тензор дисперсии жидкой частицы при турбулентной диффузии пассивной субстанции в однородной турбулентной среде, подвергающейся действию однородной деформации, вызванной постоянными по пространству градиентами средней скорости. Эти соотношения являются обобщением известных выражений для недеформируемых сред [2, 3].

Исследован случай быстрой деформации, когда турбулентные характеристики среды изменяются в соответствии с линейной теорией [4].

1. Установим связь между тензором дисперсии смещения жидкой частицы и статистическими характеристиками турбулентности.

Мгновенная лагранжева скорость фиксированой жидкой частицы $V_i(\mathbf{x}, t)$ по определению равна [2]

$$V_i(\mathbf{x}, t)=u_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)=U_i(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)+u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \tag{1.1}$$

Здесь $u_i(\mathbf{X}, t)$ — поле мгновенной эйлеровой скорости; $U_i(\mathbf{X}, t)=\langle u_i(\mathbf{X}, t)\rangle$ — поле средней скорости; $X(\mathbf{x}, t)$ — векторная функция, задающая координаты жидкой частицы, находящейся при $t=0$ в точке $\mathbf{X}(\mathbf{x}, 0)=\mathbf{x}$, $u_i'=u_i-U_i$ — пульсационная эйлерова скорость.

Поскольку при однородной деформации среды скорость является линейной функцией координат, для пульсационной лагранжевой скорости $V_i'(x, t)$ согласно определению и (1.1) имеем

$$\begin{aligned} U_i&=E_{i\alpha}(t)X_\alpha, \quad V_i'(\mathbf{x}, t)=V_i(\mathbf{x}, t)-\langle V_i(\mathbf{x}, t)\rangle=\\ &=E_{i\alpha}[X_\alpha(\mathbf{x}, t)-\langle X_\alpha(\mathbf{x}, t)\rangle]+u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)=\\ &=E_{i\alpha}Y_\alpha'(\mathbf{x}, t)+u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)\end{aligned} \tag{1.2}$$

Отсюда следует уравнение для пульсаций вектора смещения $Y_i'(\mathbf{x}, t)$ жидкой частицы под действием турбулентных пульсаций скорости и соотношение для тензора дисперсии $D_{ij}(t)$:

$$\begin{gathered} Y_i'(\mathbf{x}, t)=\int_0^t V_i'(\mathbf{x}, \tau)\,d\tau, \qquad D_{ij}(t)=\langle Y_i'(\mathbf{x}, t)\,Y_j'(\mathbf{x}, t)\rangle\\ V_i'(\mathbf{x}, t)=\frac{dY_i'}{dt}=E_{i\alpha}Y_\alpha'(\mathbf{x}, t)+u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t), \qquad Y_i'(\mathbf{x}, 0)=0 \end{gathered} \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad \frac{dD_{ij}}{dt}=E_{i\beta}D_{\beta j}+E_{j\beta}D_{i\beta}+\langle u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t)\,Y_j'(\mathbf{x},t))\rangle+$$

$$+\langle u_j'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t)\,Y_i'(\mathbf{x},t)\rangle$$

Здесь $Y_i'=Y_i-\langle Y_i\rangle$, $Y_i=X_i(\mathbf{x},\,t)-x_i$.

Уравнение для D_{ij} полностью выражается через функции $u_i'(\mathbf{X},\,t)$, если в соотношение (1.4) подставить $Y_i'(\mathbf{x},\,t)$ как решение неоднородных линейных уравнений (1.3) с однородными начальными условиями.

Соотношение (1.4) при $E_{ij}=0$ совпадает с выражением, приведенным в [5], являющимся обобщением результата, полученного Тейлором [6] для изотропной нестационарной турбулентности. Отметим, что выражение для тензора дисперсии, приведенное в [5], ошибочно применялось в этой работе для случая деформируемого потока, что привело к неверным выводам относительно поведения коэффициента турбулентной диффузии при сферической деформации среды. Правильные результаты для этого случая будут указаны в п. 4.

2. Будем считать [2], что плотность вероятности P для пульсаций вектора смещения жидкой частицы в момент t при условии, что в момент $t=0$ частица находилась в точке $\mathbf{x}$ (совпадающая с произведением $\rho\langle c\rangle$ где ρ — плотность, $\langle c\rangle$ — средняя относительная концентрация диффундирующей примеси единичной массы, вносимой при $t=0$ в точке $\mathbf{x}$), определяется следующим полуэмпирическим уравнением турбулентной диффузии и начальным условием:

$$(2.1)\qquad \frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial U_\alpha P}{\partial x_\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(K_{\alpha\beta}\frac{\partial P}{\partial x_\beta}\right)$$

$$(2.2)\qquad P(\mathbf{X},\,t\,|\,\mathbf{x},\,0)=\delta(\mathbf{X}-\mathbf{x})$$

где K_{ij} — тензор коэффициентов турбулентной диффузии, который в силу однородности среды может зависеть лишь от времени. В работе [3] (см. также [2], гл. V, § 10.3) показано, что при $E_{ij}=0$ в условиях стационарной турбулентности предположение о справедливости уравнения (2.1) эквивалентно предположению о том, что распределение вероятностей для вектора смещения жидкой частицы под действием турбулентных пульсаций скорости будет нормальным (гауссовским), причем тензор K_{ij} связан с тензором дисперсии D_{ij} и лагранжевым корреляционным тензором $B_{ij}^{(L)}(\tau)$ соотношением

$$(2.3)\qquad K_{ij}(t)=\frac{1}{2}\frac{dD_{ij}}{dt}=\frac{1}{2}\int_0^t\left[B_{ij}^{(L)}(\tau)+B_{ji}^{(L)}(\tau)\right]d\tau$$

$$B_{ij}^{(L)}(\tau)=\langle V_i'(\mathbf{x},t)\,V_j'(\mathbf{x},t+\tau)\rangle$$

Покажем, что нормальное распределение остается справедливым в общем случае произвольной однородной деформации среды, и получим связь между тензорами коэффициентов турбулентной диффузии и дисперсии и пульсационными характеристиками поля скорости (доказательство справедливости нормального распределения и связь между коэффициентом диффузии и дисперсией для частного случая осесимметричной деформации среды, соответствующей течению в осесимметричном канале с переменной площадью сечения, были получены в [1]).

Переходя от $P(\mathrm{X}, t|\mathrm{x}, 0)$ к характеристической функции $\varphi(\lambda, t)$, вместо (2.1) и (2.2) получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-E_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\beta}=-\lambda_\alpha\lambda_\beta K_{\alpha\beta}\varphi \tag{2.4}$$

$$\varphi(\lambda, 0)=\exp(i\lambda\mathrm{x}) \tag{2.5}$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что уравнениям (2.4) и (2.5) удовлетворяет характеристическая функция гауссовского распределения

$$\varphi(\lambda, t)=\exp\{i\lambda_\alpha\langle X_\alpha\rangle-{}^1/_2D_{\alpha\beta}\lambda_\alpha\lambda_\beta\}$$

Два первых момента, определяющие это распределение, подчиняются соотношениям

$$\frac{d\langle X_i\rangle}{dt}=E_{i\beta}\langle X_\beta\rangle$$

$$\frac{1}{2}\frac{dD_{ij}}{dt}=\frac{1}{2}(E_{i\beta}D_{\beta j}+E_{j\beta}D_{i\beta})+K_{ij} \tag{2.6}$$

$$\langle X_i\rangle|_{t=0}=x_i,\qquad D_{ij}|_{t=0}=0$$

Сопоставление выражений (1.4) и (2.6) приводит к результату

$$K_{ij}(t)={}^1/_2[\langle u_i'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)Y_j'(t)\rangle+\langle u_j'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)Y_i'(t)\rangle] \tag{2.7}$$

Отметим, что в соотношение (2.7) в отличие от (2.3) входит не лагранжева пульсационная скорость $V_i'(\mathrm{x}, t)$, а лишь ее часть $u_i'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)$ (см. соотношение (1.3)).

В частном случае стационарных градиентов скорости ($E_{ij}=\mathrm{const}$) решение уравнения (1.3) легко находится и соотношение (2.7) принимает вид

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{2}\Big[\int_0^t g_{j\alpha}(t-\tau)\langle u_i'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)u_\alpha'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, \tau), \tau)\rangle d\tau+$$

$$+\int_0^t g_{i\beta}(t-\tau)\langle u_j'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)u_\beta'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, \tau), \tau)\rangle d\tau\Big]$$

где $g_{ij}(t)$ — элементы матрицы $\exp(Et)$ [8]. В этом случае полное значение пульсационной лагранжевой скорости определяется выражением

$$V_i'(\mathrm{x}, t)=E_{i\alpha}\int_0^t g_{\alpha\beta}(t-\tau)u_\beta'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, \tau), \tau)d\tau+u_i'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)$$

(Отметим здесь неточность, допущенную в [2] на стр. 486 при рассмотрении дисперсии смещения частиц в частном случае деформации — в потоке с постоянным сдвигом средней скорости, состоящую в отождествлении $u_i'(\mathrm{X}(\mathrm{x}, t), t)$ с лагранжевой пульсационной скоростью $V_i'(\mathrm{x}, t)$. Неправомерность такого отождествления для этой задачи указывалась ранее в работе [7] в примечании на стр. 189.)

В случае безвихревых деформаций матрица $E_{ij}(t)$ симметрична, и в каждый момент времени существует система координат, в которой она приводится к диагональной форме. Практически интересным является случай, когда эта система координат стационарна (это имеет место при деформации однородной турбулентности в каналах переменной площади сечения [9] или в каналах постоянной площади, но переменной формы сечения [10]) и в ней тензоры D_{ij} и K_{ij} приводятся к диагональному виду. При этих условиях получим

$$K_{ii}(t)=e_i(t)\int_0^t \frac{1}{e_i(\tau)}\langle u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau),\tau)\rangle d\tau \tag{2.8}$$

$$e_i=\exp\left(\int_0^t E_{ii}(\tau)d\tau\right)$$

Здесь e_i — величина деформации вдоль i-й оси.

В общем случае произвольных непрерывных функций $E_{ij}(t)$ решение системы уравнений (1.3) может быть представлено как [8]

$$Y_i'(\mathbf{x},t)=\int_0^t R_{i\alpha}(t,\tau)u_\alpha'(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau),\tau)d\tau$$

где $R_{ij}(t, \tau)$ — матрица Коши, и выражение (2.7) принимает вид

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{2}\left[\int_0^t R_{j\alpha}(t,\tau)\langle u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)u_\alpha'(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau),\tau)\rangle d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_0^t R_{i\beta}(t,\tau)\langle u_j'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)u_\beta'(\mathbf{X}(\mathbf{x},\tau),\tau)\rangle d\tau\right]$$

3. Если однородная деформация действует на турбулентность в течение времени, малого по сравнению с характерным временем вырождения турбулентности, можно пренебречь диссипацией и нелинейным инерционным взаимодействием и рассматривать изменение турбулентности в линейном приближении [4].

При этом, если рассматривать безвихревые деформации в системе координат, в которой матрица скоростей деформаций E_{ij} диагональна, и проводить анализ в лагранжевых координатах, можно получить алгебраическую связь между коэффициентами Фурье пульсаций скорости жидкой частицы до и после деформации [4]. Это позволяет в случае, когда начало деформации t_0 совпадает с началом диффузии ($t_0=0$), получить выражение для момента $\langle u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x}, \tau), \tau)\rangle$, входящего в соотношение (2.8), которое, используя выражение для компонент Фурье, приведенное в [4], примет вид

$$K_{ii}(t)=e_i(t)\int_0^t\frac{1}{e_i(\tau)}\left\{\int\left[\frac{1}{e_i(t)e_i(\tau)}\Phi_{ii}(\mathbf{k}_0)-\frac{1}{e_i(\tau)}\frac{k_i(t)}{k^2(t)}\times\right.\right. \tag{3.1}$$

$$\times\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{k_\alpha(t)}{e_\alpha(t)}\Phi_{\alpha i}(\mathbf{k}_0)-\frac{1}{e_i(t)}\frac{k_i(\tau)}{k^2(\tau)}\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{k_\alpha(\tau)}{e_\alpha(\tau)}\Phi_{\alpha i}(\mathbf{k}_0)+$$

$$\left.\left.+\frac{k_i(\tau)k_i(t)}{e_i(t)e_i(\tau)k^2(\tau)k^2(t)}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\frac{k_\alpha(t)k_\beta(\tau)}{e_\alpha(t)e_\alpha(\tau)}\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{k}_0)\right]d^3k_0\right\}d\tau$$

$$k_i(t)=k_{i0}/e_i(t),\qquad k^2(t)=k_\alpha(t)k_\alpha(t)$$

Здесь $\Phi_{ij}(\mathbf{k}_0)$ — спектральный тензор энергии турбулентности перед деформацией.

Видно, что изменение составляющих тензора коэффициентов турбулентной диффузии определяется спектральным тензором турбулентности в начальный момент времени и не зависит от лагранжевых характеристик турбулентности. Аналогичные выражения можно выписать в случае постоянного сдвига средней скорости, если воспользоваться связью между коэффициентами Фурье пульсаций скорости, приведенными в [11, 12].

Можно проверить, что при несовпадении момента начала деформации с моментом начала диффузии ($t_0 \neq 0$) в общем случае не удается получить выражение для поведения коэффициента диффузии при быстрой деформации, и лишь в случае сферической деформации результат может быть получен в конечном виде.

В случае сферической деформации связь между мгновенными значениями скорости до и после деформации может быть получена непосредственно без привлечения спектрального представления [5]

$$u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t),t)=\frac{1}{e(t)}u_i'(\mathbf{X}(\mathbf{x},t_0),t_0) \qquad (t>t_0)$$

$$\mathbf{X}(\mathbf{x},t)=e(t)\mathbf{X}(\mathbf{x},t_0)$$

В этом случае вместо выражения (3.1) получим

$$K_{ii}(t)=\langle u_i'^2(t_0)\rangle\int_0^t\frac{d\tau}{e^2(\tau)} \qquad (t_0=0) \tag{3.2}$$

Формулу (3.2) интересно сравнить с формулой Тейлора для коэффициента диффузии при малых временах диффузии

$$K_{ii}(t)=\langle u_i'^2(t_0)\rangle t \qquad (t_0=0)$$

В случае, если быстрая сферическая деформация начинается в момент времени t_0, не совпадающий с началом диффузии, коэффициент диффузии при $t>t_0$ в течение действия деформации имеет вид

$$K_{ii}(t)=K_{ii}(t_0)+\langle u_i'^2(t_0)\rangle\int_{t_0}^t\frac{d\tau}{e^2(\tau)} \qquad (t_0\neq 0)$$

Отметим, что в случае произвольной деформации получить алгебраические соотношения для компонент Фурье не удается и они могут быть найдены лишь из численного решения системы дифференциальных уравнений для компонент Фурье, записанных в эйлеровых координатах [11, 12].

4. В случае сферической деформации удается получить значительно более общие результаты, в частности определить поведение коэффициента турбулентной диффузии для произвольных времен диффузии после прекращения деформации при действии на турбулентность быстрой деформации в момент времени, не совпадающий с началом диффузии. Возможность получения точных результатов в этом случае связана с тем, что изменение мгновенного поля скорости в процессе быстрой сферической деформации соответствует некоторой группе преобразований, допускаемых уравнениями движения и неразрывности.

Пусть каждая реализация однородного турбулентного поля подчиняется уравнению

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}=\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u}+\mathbf{f} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ — векторное поле турбулентной скорости, ν и p — кинематические вязкость и пульсационная составляющая давления, $\mathbf{f}$ — случайная однородная стационарная сила, обеспечивающая стационарность турбулентности.

Используя результаты анализа групповых свойств уравнений Навье — Стокса, выделим из групп преобразований, допускаемых уравнениями (4.1), такие группы, которые совпадают с решениями динамической задачи изменения характеристик турбулентности при быстрой деформации среды.

Система (4.1) допускает следующее преобразование указанного типа:

$$\mathbf{x}'=e\mathbf{x},\quad t'=e^2t,\quad \mathbf{u}'(\mathbf{x}',t')=\frac{1}{e}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) \tag{4.2}$$

$$p'(\mathbf{x}',t')=e^{-2}p(\mathbf{x},t),\quad \mathbf{f}'(\mathbf{x}',t')=e^{-3}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$$

Соотношения для координат, скоростей и давления в преобразованиях (4.2) совпадают соответственно с решениями, связывающими параметры турбулентности до и после деформации для быстрой однородной сферической деформации однородной турбулентности, при этом параметр e группы характеризует изменение линейных размеров жидкого элемента при деформации.

Подчеркнем, что стационарность турбулентности после деформации в случае преобразования случайной силы, согласно (4.2), будет иметь место лишь при сохранении при деформации коэффициента кинематической вязкости. При изменении же последнего стационарность после деформации обеспечивается случайной силой, имеющей вид

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}',t')=e^{-3}\left[\mathbf{f}(\mathbf{x},t)+(\nu-\nu')\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\alpha}\right]$$

Отметим также, что основное приведенное ниже соотношение (4.6) справедливо и для затухающей турбулентности ($\mathbf{f}=0$), если при деформации коэффициент кинематической вязкости не меняется ($\nu=\nu'$).

Как показывает оценка членов в уравнениях неразрывности и движения, необходимым условием справедливости теории быстрой деформации турбулентности является выполнение следующих неравенств:

$$\frac{u'\tau}{L}\ll 1,\quad \frac{u'^2}{a^2}\ll 1,\quad u'=\sqrt{\frac{1}{3}\langle u_\alpha' u_\alpha'\rangle} \tag{4.3}$$

где τ — время деформации, L — интегральный масштаб турбулентности, a — скорость звука. Из этих неравенств следует, что в масштабе времени порядка L/u' деформацию можно считать бесконечно быстрой. Если обозначить поле скорости для некоторой реализации стационарной турбулентности при отсутствии деформации через $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$, то в силу свойства инвариантности уравнений (4.1) относительно указанного преобразования поле скорости при воздействии на турбулентность в момент t_0 быстрой сферической деформации имеет вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=e^{-H(t-t_0)}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}e^{-H(t-t_0)},\quad t_0+(t-t_0)e^{-2H(t-t_0)}) \tag{4.4}$$

где $H(t)$ — функция Хэвисайда ($H(t)=1$ при $t>0$, $H(t)=0$ $t<0$).

Соотношение (4.4) позволяет выразить любые эйлеровы пространственно-временные характеристики турбулентности при наличии деформации через соответствующие характеристики при ее отсутствии.

Изменение лагранжевой скорости жидкой частицы при наличии деформации может быть найдено из анализа влияния деформации на траекторию жидкой частицы, описывающуюся решением уравнения

$$\frac{\partial\mathbf{X}}{dt}=\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ определяется выражением (4.4). Непосредственная проверка показывает, что если $\mathbf{X}_0(t)$ — траектория жидкой частицы при отсутствии деформации, то траектория жидкой частицы при наличии деформации описывается выражениями

$$\mathbf{X}(t)=e^{H(t-t_0)}\mathbf{X}_0(\theta),\quad \theta=t_0+(t-t_0)e^{-2H(t-t_0)}$$

Поэтому изменение лагранжевой скорости при наличии деформации имеет вид

$$\mathbf{V}'(t)=e^{-H(t-t_0)}\mathbf{V}_0'(\theta) \tag{4.5}$$

где $\mathbf{V}_0'(t)$ — лагранжева скорость при отсутствии деформации.

Соотношение (4.5) позволяет выразить любые лагранжевы пространственно-временные характеристики турбулентности при наличии деформации через соответствующие характеристики при ее отсутствии.

Подстановка выражения для $\mathbf{V}'(t)$ (4.5) в соотношение, аналогичное (2.8), записанное для случая сферической деформации в произвольной системе координат, приводит к результату

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{2}e\left[\int\limits_0^{t_0}\langle V_i'(t)V_{j0}'(\tau)\rangle d\tau+\int\limits_0^{t_0}\langle V_j'(t)V_{i0}'(\tau)\rangle d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{e}\int\limits_{t_0}^{t}\langle V_i'(t)V_j'(\tau)\rangle d\tau+\frac{1}{e}\int\limits_{t_0}^{t}\langle V_j'(t)V_i'(\tau)\rangle d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{t}[B_{ij0}^{(L)}(\theta,\tau)d\tau+B_{ji0}^{(L)}(\theta,\tau)]d\tau+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{e^2}\int\limits_{t_0}^{t}[B_{ij0}^{(L)}(\theta(t),\theta(\tau))+B_{ji0}^{(L)}(\theta(t),\theta(\tau))]d\tau\right\}$$

(Здесь учтено, что вкладом интеграла по времени деформации в величину K_{ij} ввиду неравенств (4.3) можно пренебречь.)

После замены переменной интегрирования τ в последнем интеграле соотношения для K_{ij} по формулам $\xi=[(\tau-t_0)/e^2]+t_0$, $(d\tau/e^2)=d\xi$ получим окончательный результат

$$K_{ij}(t)=\frac{1}{2}\left\{\int\limits_0^{\frac{t-t_0}{e^2}+t_0}\left[B_{ij0}^{(L)}\left(\frac{t-t_0}{e^2}+t_0,\tau\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_{ji0}^{(L)}\left(\frac{t-t_0}{e^2}+t_0,\tau\right)\right]d\tau\right\}=K_{ij0}\left(t_0+\frac{t-t_0}{e^2}\right)$$

Таким образом, быстрая сферическая деформация турбулентности приводит лишь к изменению темпа роста коэффициентов турбулентной диффузии, причем их асимптотические значения при отсутствии и наличии деформации совпадают ($K_{ij}(\infty)=K_{ij0}(\infty)$).

Отметим, что параболическое уравнение (2.1) является лишь первым приближением при аппроксимации процесса турбулентной диффузии. Физически более правильно использовать гиперболическое уравнение, предложенное рядом авторов (см. [2], стр. 588). Однако в этом случае даже при отсутствии деформации и изотропной турбулентности, по-видимому, принципиальную трудность представляет нахождение коэффициента при $\partial^2 P/\partial t^2$, определяющего скорость перемещения фронта диффузии, и его приближенно удается выразить через параметры турбулентности лишь для больших времен диффузии [13].

В заключение авторы благодарят Е. А. Новикова за полезные замечания.

Поступила 21 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зимонт В. Л.* Экспериментальное исследование турбулентной диффузии в каналах переменного сечения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
2. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 1. М., «Наука», 1965.
3. *Batchelor G. K.* Diffusion in a field of homogeneous turbulence. Austr. J. Sci. Res., A2, No. 4, pp. 437–450.
4. *Batchelor G. K., Proudman I.* The effect of rapid distortion of a fluid in turbulent motion. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, p. 1.
5. *Зимонт В. Л., Сабельников В. А.* О поведении коэффициента турбулентной диффузии при воздействии на среду быстрой сферической деформации. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 6.
6. *Taylor G. I.* Statistical theory of turbulence. I. Proc. Roy. Soc., Ser. A., 1935, vol. 151, No. 874.
7. *Коррсин С.* Некоторые исследования по турбулентной диффузии. В сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха». М., Изд-во иностр. лит., 1962.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.
9. *Uberoi M. S.* Effect of wind-tunnel contraction on free-stream turbulence. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 8.
10. *Tucker H. J., Reynolds A. J.* The distortion of turbulence by irrotational plane strain. J. Fluid Mech., 1968, vol. 32, No. 4.
11. *Сабельников В. А.* Некоторые линейные задачи теории деформации однородной турбулентности. Тр. ЦАГИ, 1975, вып. 1702.
12. *Сабельников В. А.* Об обменном члене в неизотропных однородных турбулентных течениях с градиентом средней скорости. Уч. зап. ЦАГИ, 1974, т. 5, № 4.
13. *Зимонт В. Л., Сабельников В. А.* Об уравнении турбулентного переноса при наличии молекулярной диффузии. Физика атмосферы и океана, 1975, № 6.