

УДК 532.529

К ТЕОРИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СИСТЕМЫ СФЕРИЧЕСКИХ ГАЗОВЫХ ПУЗЫРЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Г. Я. ГЕРАСИМОВ

(Москва)

Строгое математическое описание движения системы сферических пузырей одинакового размера в жидкости при больших числах Рейнольдса связано со значительными трудностями. В настоящее время известен ряд подходов к решению данной проблемы, которые основаны на применении «ячеечной» модели [1-4]. При малых числах Рейнольдса попытка более строгого описания системы сферических пузырей была сделана в [5] с помощью метода Тэма [6], использующего приближение «точечных» сил с последующим усреднением по ансамблю.

В данной работе метод Тэма используется для описания движения системы сферических пузырей одинакового размера при больших числах Рейнольдса. Вычислена сила сопротивления, действующая со стороны жидкости на пробный пузырь из рассматриваемой системы.

1. Рассмотрим задачу о стесненном обтекании пробного пузыря, находящегося в облаке неподвижных пузырей одинакового размера с объемной концентрацией α , при числах Рейнольдса $Re \gg 1$ ($Re = 2\rho Ua/\mu$, где ρ и μ — плотность и вязкость жидкости, U — средняя скорость движения жидкости в промежутках между пузырями, a — радиус пузыря). Считаем, что расположение пузырей в пространстве случайное и размеры их достаточно малы, так что под действием поверхностного натяжения они остаются приближенно сферическими.

Предположим, что течение жидкости вне пробного пузыря определяется уравнениями [6]

$$(1.1) \quad \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} - \frac{3}{2} \frac{\rho U}{a} \xi \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0$$

$$\xi = \frac{1}{4} \alpha C_D, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} \rho U a^2 C_D \mathbf{v}$$

где p и \mathbf{v} — давление и скорость жидкости, \mathbf{D} — сила сопротивления, действующая со стороны жидкости на пузырь. С формальной точки зрения уравнения (1.1) можно рассматривать как уравнения, описывающие движение некоторой фиктивной «нагруженной» жидкости, на которую действует размазанная по всему объему сила «трения» $-1.5 \rho U a^{-1} \xi \mathbf{v}$.

Строго говоря, вокруг пробного пузыря, находящегося в нагруженной жидкости, должен существовать переходный слой толщины $2a$, в котором свойства среды, окружающей пузырь, непрерывно изменяются от свойств нагруженной жидкости до свойств чистой жидкости [7]. Для упрощения вычислений при определении силы вязкого сопротивления пробного пузыря при $Re \ll 1$ обычно пренебрегают существованием переходного слоя. Физически это допущение заключается в пренебрежении эффектом непроницаемости пузырей и справедливо для систем с умеренной концентрацией пузырей ($\alpha \approx 0.3$) [7].

При обтекании пузыря с $Re \gg 1$ вязкие эффекты сказываются лишь в тонком пограничном слое на поверхности пузыря и в узком осесимметричном следе за пузырем. Наделение же нагруженностью жидкости в пограничном слое некорректно вследствие существования переходного слоя. Тем не менее, как будет показано ниже, нагруженность пограничного слоя не вносит больших изменений в структуру потока. Поэтому предполагается, что уравнения (1.1) справедливы в любой точке потока вне пробного пузыря.

Воспользуемся сферической системой координат с началом в центре пузыря и осью OZ , направленной вверх по потоку параллельно средней скорости движения жидкости U . В этом случае граничные условия, которым должны удовлетворять компоненты скорости \mathbf{v} , можно записать в виде

$$(1.2) \quad v_r \rightarrow -U \cos \theta, \quad v_\theta \rightarrow U \sin \theta, \quad r \rightarrow \infty$$

$$v_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r}(r^{-1} v_\theta) = 0, \quad r = a$$

Так как рассматривается обтекание пробного пузыря при $Re \gg 1$, то величины \mathbf{v} и p удобно представить в виде [8]

$$(1.3) \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^0 + \mathbf{v}', \quad p = p^0 + p',$$

где v^0 и p^0 — скорость и давление в идеальной нагруженной жидкости, обтекающей пробный пузырь, которые имеют вид

$$(1.4) \quad v_r^0 = -U \cos \theta \left(1 - \frac{a^3}{r^3} \right), \quad v_\theta^0 = U \sin \theta \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right)$$

$$(1.5) \quad p^0 = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^{02} + \frac{3}{2} \rho U^2 \xi \cos \theta \left(\frac{r}{a} + \frac{a^2}{2r^2} \right)$$

а v' и p' — добавки, сравнимые с v^0 и p^0 только в области пограничного слоя и следа. Для v' и p' имеем из (1.1) — (1.4)

$$(1.6) \quad \rho [(v' \cdot \nabla) (v^0 + v') + (v^0 \cdot \nabla) v'] = -\nabla p' + \mu \Delta v' - \frac{3}{2} \frac{\rho U}{a} \xi v', \quad \operatorname{div} v' = 0$$

$$(1.7) \quad v_r' \rightarrow 0, \quad v_\theta' \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty$$

$$v_r' = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^{-1} v_\theta') = 3Ua^{-2} \sin \theta, \quad r = a$$

2. Сопротивление пузыря определяется по формуле

$$(2.1) \quad D = -2\pi a^2 \int_0^\pi \tau_{rr} |_{r=a} \cos \theta \sin \theta \, d\theta, \quad \tau_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

Из (2.1), (1.3) — (1.5) имеем

$$(2.2) \quad D = \frac{3}{2} \alpha D - 2\pi a^2 \int_0^\pi \left(-p' + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \Big|_{r=a} \cos \theta \sin \theta \, d\theta$$

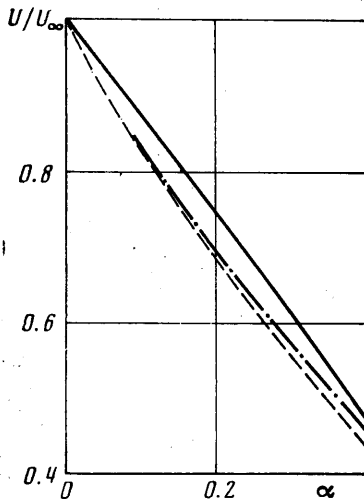
Предположим, что $\xi \ll 1$. Как показывают оценки, проведенные на основании результатов работы [4], это предположение справедливо для систем с умеренной концентрацией пузырей и большими числами Рейнольдса (при $Re \approx 100$ и $\alpha \approx 0.4$ величина $\xi \approx 0.1$). В этом случае в окрестности пробного пузыря можно пренебречь последним членом в правой части (1.6). Если к тому же пренебречь нагруженностью следа, то задача определения величин v' и p' (1.6) — (1.7) во всей области течения совпадает с аналогичной задачей для одиночного пузыря, и интеграл в правой части (2.2) можно заменить величиной D_∞ , представляющей собой сопротивление одиночного пузыря. Таким образом, для сопротивления пробного пузыря D имеем

$$(2.3) \quad D = \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \right)^{-1} D_\infty$$

Из (2.3) легко получить выражение для скорости всплытия U системы сферических пузырей в жидкости, находящейся в поле сил тяжести. Если для коэффициента сопротивления $C_{D\infty}$ принять экспериментальную зависимость Тадаки и Маеды при промежуточных числах Рейнольдса $C_{D\infty} = 18.5 Re^{-0.82}$ (см. [4]), то для U имеем

$$(2.4) \quad U = U_\infty \left(1 - \frac{3}{2} \alpha \right)^{0.82}$$

где U_∞ — скорость всплытия одиночного пузыря. На фигуре значения величины U , получаемые из (2.4) сравниваются с результатами численного расчета, проведенного в [4] при $Re = 1000$, а также с теоретической оценкой величины U , выполненной в [1] при $Re \gg 1$ (соответственно сплошная, пунктирная и штрихпунктирная линии). Наблюдается достаточно хорошее согласие полученной теоретической зависимости $U = U(\alpha)$ с результатами других теоретических исследований.



Следует отметить, что при получении формулы (2.3) не учитывалось влияние следов других пузырей на обтекание пробного пузыря, а также нагруженность его следа. При движении системы пузырей в жидкости происходит вовлечение пузырей в область следа предыдущих пузырей. Для системы однородной плотности, занимающей бесконечный горизонтальный слой толщины H , влияние следов на движение пузырей можно не учитывать, если толщина слоя достаточно мала и можно пренебречь вероятностью попадания пузыря в след другого пузыря. Для системы умеренной плотности это условие выполняется, если $H \sim a \text{Re}^{[9]}$.

Автор благодарит А. М. Головина за ряд ценных замечаний.

Поступила 25 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Marrucci G.* Rising velocity of a swarm of spherical bubbles. *Industr. and Engng. Chem. Fundament.*, 1965, vol. 4, No. 2.
2. *Bhatta V. K.* Gas holdup of a bubble swarm in two phase vertical flow. *AIChE Journal*, 1969, vol. 15, No. 3.
3. *Gal-Or B.* On motion of bubbles and drops. *Can. J. Chem. Engng*, 1970, vol. 48, No. 5.
4. *Le Clair B. P., Hamielec A. E.* Viscous flow through particle assemblages at intermediate Reynolds numbers — a cell model for transport in bubble swarms. *Canad. J. Chem. Engng*, 1971, vol. 49, No. 6.
5. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Реология концентрированных смесей жидкости с мелкими частицами. Параметры межфазового взаимодействия. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
6. *Tam C. K. W.* The drag on a cloud of spherical particles in low Reynolds number flow. *J. Fluid Mech.*, 1969, vol. 38, pt 3.
7. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензии умеренной концентрации. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
8. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
9. *Головин А. М.* Уравнения Лагранжа для системы пузырей в жидкости малой вязкости. ПМТФ, 1967, № 6.

УДК 532.529.5/6

ПРИБЛИЖЕННЫЙ УЧЕТ ВЛИЯНИЯ СТенок НА МОДЕЛЬ КАВЕРНЫ, МОДЕЛИРОВАННОЙ ПО СХЕМЕ ЭФРОСА ИЛИ РЯБУШИНСКОГО

Л. А. ЭПШТЕЙН

(Москва)

Излагается приближенный способ учета влияния стенок на площадь миделя плоской и осесимметричной каверны, моделированной по схеме Эфроса или Рябушинского. Для плоской задачи приводится сопоставление с результатами точного решения.

В [1, 2] был указан простой метод расчета минимального числа кавитации κ и площади S миделя каверны за расположенным на оси круглой грубы осесимметричным телом. Метод базировался на применении общих теорем механики при использовании схемы Жуковского — Рошко и единственном допущении о справедливости известной [3] связи коэффициента сопротивления c_x с числом кавитации $c_x(\kappa) = c_x(0)(1 + \kappa)$. Метод в равной степени был применим в плоской задаче, где существовало строгое решение, которое могло служить критерием его точности.

Сопоставление дало практически полное совпадение результатов при идентичной схематизации каверны, т. е. в том случае, когда теоретическое решение также выполнялось по схеме Жуковского — Рошко.

Точные расчеты, выполненные по более близким к действительности схемам Эфроса или Рябушинского, давали заметно отличные результаты, которые не могли быть получены в [1], так как этот метод не удавалось развить при других схемах, которые в дальнейшем для краткости именуется схемами со смыкающейся каверной.

Применение законов количества движения и энергии для течения около тела со смыкающейся каверной в канале дает для определения площади миделя каверны S уравнение

$$(1) \quad S_*'^2 - S_*' \left[c_{x0} S_*' + \frac{\kappa}{\kappa + 1} \right] + c_{x0} S_*' + \frac{(1 - S_*')}{1 + \kappa} \iint_{1 - S_*'} \left(\frac{\Delta v}{v} \right)^2 dS' = 0,$$

где $c_{x0} = c_x(\kappa = 0)$, S — площадь миделя тела, v — скорость потока, Δv — изменения местной скорости от ее среднего значения в сечении, проходящем через мидель каверны, а штрих обозначает величины, отнесенные к площади сечения канала S_0 .