ОБ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН

И. М. АБДУРАХМАНОВ, Р. Т. ФАЗЛЫЕВ

(Махачкала, Бугульма)

Плоская задача теории стационарной фильтрации в пласте, изрезанном системой трещин, сведена к системе сингулярных интегродифференциальных уравнений. Рассмотрены случаи произвольной совокупности трещин, одинопериодической и двоякопериодической системы трещин в неограниченном пласте. Общее решение в случае системы бесконечных параллельных прямолинейных трещин получено в явном виде в квадратурах. В качестве примера найдены комплексный потенциал и формула для определения дебита скважины при линейной системе площадного заводнения пласта, изрезанного системой прямолинейных параллельных трещин.

1. Пусть бесконечный горизонтальный пласт изрезан системой из N трещин. Будем считать, что проницаемость k, пористость m и мощность H пласта постоянны; жидкости, заполняющие пласт, несжимаемы и обладают одинаковыми плотностью ρ и вязкостью μ. Предположим также, что фильтрация жидкости всюду вне трещин подчиняется закону Дарси.

Бесконечный пласт примем за плоскость комплексного переменного z, а трещины — за линии Γ_n $(n=1, 2, \ldots, N)$. Пусть линии Γ_n заданы уравнениями

$$t_n=t_n(s), \qquad s\in[s_n^-, s_n^+], \qquad s_n^-<s_n^+, \qquad n=1, 2, \ldots, N. \tag{1.1}$$

Здесь s — произвольный монотонно возрастающий в каждом интервале (s_n^-, s_n^+) параметр. Совокупность всех линий Γ_n обозначим через Γ, т. е. $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_n$. Пусть в плоскости z определена аналитическая функция, $F(z)$ – комплексный потенциал фильтрационного поля при отсутствии трещин.

Задача состоит в отыскании комплексного потенциала возмущенного трещинами поля $W(z)=\varphi+i\psi$, $\varphi=-kP/\mu$, где φ — потенциал скорости, P — давление, ψ — функция тока.

Исследование рассматриваемой задачи представляет интерес для теории фильтрации в трещиновато-пористых средах, в частности при разработке нефтяных месторождений, представленных карбонатными породами.

Комплексный потенциал возмущенного поля можно представить [1,2] в виде суммы заданной функции $F(z)$ и интеграла типа Коши с неизвестной действительной плотностью $\omega(t)$, взятого вдоль линии Γ

$$W(z)=F(z)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{1.2}$$

Искомая функция $\omega(t)$ отыскивается при помощи граничного условия [2]

$$\delta(s)\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\psi^+-\psi^-, \qquad \delta(s)=\frac{2h_0^3(s)}{3k} \tag{1.3}$$

Здесь $2h_0(s)$ — ширина трещины в сечении s, а индексы плюс и минус обозначают предельные значения функции тока соответственно на левом и правом берегах трещины Γ. Предполагается, что функция $\omega(t)$ имеет производную первого порядка, удовлетворяющую условию Гельдера на линии Γ, за исключением, быть может, концов.

Переходя в равенстве (1.2) к пределу при $z\to t\in\Gamma$, используя формулы Сохоцкого [3] и граничное условие (1.3), получим сингулярное интегродифференциальное уравнение для определения функции расхода $\omega(t)=\psi^+-\psi^-$

$$|t'(s)|\frac{\omega(t)}{\delta(s)}=\operatorname{Re}\left[t'(s)\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma\frac{\omega'(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+F'(t)\right)\right] \tag{1.4}$$

$$\omega(t_n^\pm)=0, \qquad t_n^\pm=t_n(s_n^\pm), \qquad n=1, 2, \ldots N \tag{1.5}$$

Если заданная функция $F_1(z)$ — $2a$-периодическая и указанная выше система трещин Γ повторяется периодически с периодом $2a$, то функция $W(z)$ также будет $2a$-периодической. Суммируя интегралы типа Коши, взятые вдоль всех линий вида

$t+2an$, $n=0$; ±1; ±2; ..., находим

$$W_1(z)=F_1(z)+\frac{1}{4a}\int_\Gamma \omega(t)\operatorname{ctg}\frac{\pi(t-z)}{2a}\,dt \tag{1.6}$$

Удовлетворив граничное условие (1.3) вдоль любой линии $t+2an$, например вдоль линии Γ, получим сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$|t'(s)|\frac{\omega(t)}{\delta(s)}=\operatorname{Re}\left[t'(s)\left(\frac{1}{4a}\int_\Gamma \omega'(\tau)\operatorname{ctg}\frac{\pi(\tau-t)}{2a}\,d\tau+F_1'(t)\right)\right] \tag{1.7}$$

Если же заданная функция $F_2(z)$ и система трещин Γ двоякопериодические с основными периодами ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}(\omega_1/\omega_2)>0$), то и комплексный потенциал возмущенного поля будет двоякопериодической функцией с теми же периодами. Эту функцию можно получить аналогично случаю периодической задачи — суммированием интегралов типа Коши, взятых вдоль всех линий вида $t+n\omega_1+m\omega_2$, $t\in\Gamma$, n и m — целые числа. Хотя непосредственное суммирование и ведет к расходящемуся ряду, в качестве ядра типа Коши можно взять функцию $\zeta(t-z)$ — дзета-функцию Вейерштрасса и комплексный потенциал примет вид

$$W_2(z)=F_2(z)+\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega(t)\zeta(t-z)\,dt+C \tag{1.8}$$

$$\zeta(u)=\frac{2\eta u}{\omega_1}+\frac{\pi}{\omega_1}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{\omega_1}+\frac{2\pi i}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{h^{2n}Z^{-2}}{1-h^{2n}Z^{-2}}-\frac{h^{2n}Z^2}{1-h^{2n}Z^2}\right]$$

$$h=\exp(\pi i\omega_2/\omega_1),\qquad Z=\exp(\pi iu/\omega_1) \tag{1.9}$$

Так как функция $\zeta(u)$ удовлетворяет в конгруэнтных точках соотношениям $\zeta(u+\omega_k)-\zeta(u)=2\zeta(\omega_k/2)$, $k=1, 2$, то функция $W_2(z)$ будет двоякопериодической при выполнении условия

$$\int_\Gamma \omega(t)\,dt=0 \tag{1.10}$$

Для определения искомой функции получим при помощи граничного условия (1.3) сингулярное интегродифференциальное уравнение

$$|t'(s)|\frac{\omega(t)}{\delta(s)}=\operatorname{Re}\left[t'(s)\left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \omega'(\tau)\zeta(\tau-t)\,d\tau+F_2'(t)\right)\right] \tag{1.11}$$

При решении уравнений (1.7) и (1.11) следует использовать краевые условия (1.5).

2. Пусть пласт изрезан бесконечной системой бесконечных параллельных прямолинейных трещин постоянной ширины ($\delta=\text{const}$), отстоящих друг от друга на одинаковом расстоянии $2d$. Ось x в плоскости z направим вдоль одной из трещин. (Случай одной трещины рассмотрим в [4].) Пусть в плоскости z определена двоякопериодическая функция с основными периодами $2a$ и $2di$ ($i=\sqrt{-1}$). Тогда комплексный потенциал возмущенного трещинами поля будет двоякопериодической функцией с основными периодами $2a$ и $2di$. В качестве основного параллелограмма периодов возьмем прямоугольник $-a\leqslant x<a$, $-id\leqslant y<id$. Линия Γ совпадает при этом с отрезком $-a\leqslant x\leqslant a$, $y=0$.

Функцию $\zeta(u)$ (1.9) можно записать для рассматриваемого прямоугольника в более удобном для вычислений виде. Разлагая каждый из членов ряда (1.9) в ряд по степеням Z и собирая члены с одинаковыми степенями Z, получим

$$\zeta(u)=\frac{\eta a}{a}+\frac{\pi}{2a}\operatorname{ctg}\frac{\pi u}{2a}+\frac{2\pi}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\sin\frac{n\pi u}{a},\qquad h=\exp(-\pi d/a) \tag{2.1}$$

Уравнение (1.11) с учетом (2.1) можно записать в виде

$$\frac{\omega(x)}{\delta}=\frac{1}{4a}\int_{-a}^{a}\omega'(\xi)\operatorname{ctg}\frac{\pi(\xi-x)}{2a}\,d\xi+F_0(x) \tag{2.2}$$

$$F_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h^{2n}}{1-h^{2n}}\left[\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{a}-\beta_n\sin\frac{n\pi x}{a}\right]+\operatorname{Re}F_2'(x) \tag{2.3}$$

$$\alpha_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\omega'(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx,\qquad \beta_n=\frac{1}{a}\int_{-a}^{a}\omega'(x)\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx \tag{2.4}$$

Таким образом, решение уравнения (1.11) сводится к решению интегродифференциального уравнения (2.2) и последующему решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных α_n и β_n.

Вводя подстановку $x=a\theta/\pi$, $(\xi=a\sigma/\pi)$, запишем уравнение (2.2) в виде

$$\frac{\omega(\theta)}{\delta}=\frac{1}{4a}\int_{-\pi}^{\pi}\omega'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}\,d\sigma+F_0\left(\frac{a\theta}{\pi}\right),\qquad -\pi<\theta<\pi \tag{2.5}$$

Чтобы решить уравнение (2.5), рассмотрим формулу Шварца [3]

$$f(z_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\theta)\frac{t+z_1}{t-z_1}\,d\theta+iv_0,\qquad |z_1|<1,\qquad t=e^{i\theta} \tag{2.6}$$

где v_0 — произвольное действительное число.

Используя формулы обращения Гильберта [3] и подставляя (2.6) в (2.5), приходим к граничному условию

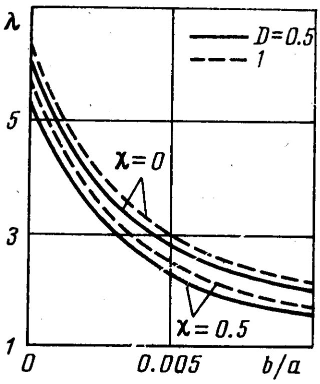
$$\operatorname{Re}\left[f(t)+\frac{t}{2\chi}f'(t)\right]=\delta F_0\left(\frac{a\theta}{\pi}\right),\qquad \chi=\frac{a}{\pi\delta};\qquad |t|=1 \tag{2.7}$$

Решив задачу Шварца (2.7), находим искомую функцию

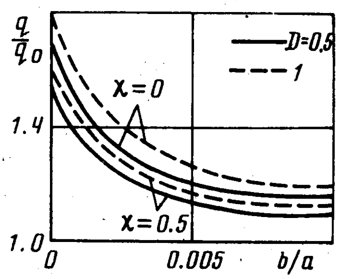
$$\omega(\theta)=\lim_{z_1\to t}\operatorname{Re}f(z_1),$$

$$f(z_1)=z_1^{-2\chi}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{z_1}\zeta^{2\chi-1}\left(\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_0\left(\frac{a\sigma}{\pi}\right)\frac{t+\zeta}{t+\zeta}\,d\theta\right)d\zeta,\qquad |z_1|<1 \tag{2.8}$$

Переходя к переменной $x=a\theta/\pi$, затем решив систему уравнений (2.4), найдем окончательное выражение для функции $\omega(x)$. Зная функцию $\omega(x)$, легко найти комплексный потенциал в соответствии с формулами (1.8) и (2.1).



Фиг. 1



Фиг. 2

Полагая в решении двоякопериодической задачи $h=0$, получим решение соответствующей периодической задачи.

В качестве примера рассмотрим случай, когда в указанной выше плоскости расположены стоки и источники соответственно в точках $z=na+(2md+b)i$ и $z=na+i\times$

$\times[(2m+1)d+b]$, $0\leqslant b\leqslant d$. Тогда комплексный потенциал невозмущенного поля имеет вид

$$F_2(z)=-\frac{q}{2\pi}\ln\operatorname{sn}\frac{2K(z-ib)}{a},\qquad \frac{K'}{K}=\frac{2d}{a}=2D \tag{2.9}$$

Здесь K' и K – полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие модулям k и k', причем $k^2+k'^2=1$.

Для функции расхода $\omega(x)$ и комплексного потенциала возмущенного поля получаем, в соответствии с формулами (2.9), (2.8), (2.4), (2.1) и (1.8) выражения

$$\omega(x)=\frac{q}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{2n\pi x}{a},\qquad a_n=\frac{(1-h^{2n})(h^{2n}\beta^{-2n}-\beta^{2n})}{n+\chi+(n-\chi)h^{4n}}, \tag{2.10}$$

$$\beta=\exp\left(-\frac{\pi b}{a}\right)$$

$$W_2^{\pm}(z)=-\frac{q}{2\pi}\left[\ln\operatorname{sn}\frac{2K(z-ib)}{a}-\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(e^{\pm\frac{2in\pi z}{a}}+\frac{2h^{4n}}{1-h^{4n}}\cos\frac{2\pi nz}{a}\right)\right] \tag{2.11}$$

$$|y|<d$$

Здесь верхний (+) и нижний (–) знаки относятся соответственно к значениям $y>0$ и $y<0$.

Для дебита q скважины, находящейся в точке $z=ib$, получаем при помощи контурного интегрирования формулу

$$q=\frac{2\pi k}{\mu}\frac{P_1-P_2}{A-\lambda},\qquad A=\frac{\pi d}{a}-2\ln\frac{2\pi r}{a}+4\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{1-h^{4n-2}}{1-h^{4n}} \tag{2.12}$$

$$\lambda=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2-h^{2n})(\beta^{2n}-h^{2n}\beta^{-2n})^2}{(1+h^{2n})[n+\chi+(n-\chi)h^{4n}]}\qquad (b\neq0)$$

$$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-h^{2n})^2}{n+\chi+(n-\chi)h^{4n}}\left[\frac{2h^{2n}(2h^{2n}-1)}{1-h^{4n}}-\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{2n\pi r}{a}\right)\right]\qquad (b=0)$$

Здесь P_1 и P_2 – средние значения давления на рабочих контурах нагнетательной и эксплуатационной скважин одинакового радиуса r.

На фиг. 1 и 2 построены зависимости величин λ и q/q_0 (q_0 – дебит скважины при отсутствии трещин ($\lambda=0$) от отношения b/a для $D=d/a=0.5$; 1 и $\chi=0$; 0.5 при $r=10$ *см*.

Как видно из фиг. 2, дебит скважины увеличивается с уменьшением расстояния до трещины и достигает максимального значения, когда ее контур пересекается трещиной ($b=0$).

Кроме того, проведенные вычисления показали, что дебит скважины изменяется незначительно при изменении размеров прямоугольника, если сохранить постоянным отношение сторон.

Поступила 8 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пилатовский В. П.* Основы гидромеханики тонкого пласта. М., «Недра», 1966.
2. *Абдурахманов И. М.* О возмущении фильтрационного потока одиночной трещиной. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
4. *Абдурахманов И. М., Алишаев М. Г.* Плоская стационарная фильтрация в пласте, разделенном прямолинейной трещиной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.