

ОБТЕКАНИЕ ГИБКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЛОСКИМ ПОТОКОМ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Г. ХАКИМОВ

(Уфа)

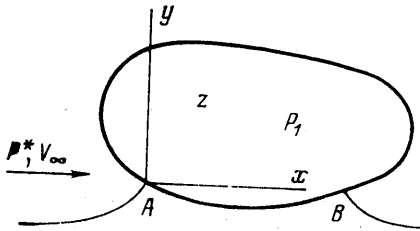
Обтекание плоским потоком идеальной жидкости цилиндрической оболочки с нулевой изгибной жесткостью (мягкой цилиндрической оболочки) или же газового пузыря, на границе которого действуют силы натяжения, изучалось в работах [1-6].

Обтекание упругой пластинки в линейной постановке рассматривалось в [7, 8].

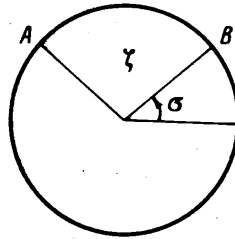
Рассматривается обтекание гибкой цилиндрической оболочки, обладающей изгибной жесткостью и одновременно допускающей большие перемещения плоским потоком идеальной несжимаемой жидкости.

Применение методов теории функций комплексного переменного приводит к эффективному решению задачи. Определены форма оболочки, усилия в ней, силы, действующие на оболочку, поле скоростей течения жидкости.

1. Цилиндрическая оболочка произвольного поперечного сечения, обладающая изгибной жесткостью D и способная в то же время к большим перемещениям, нахо-



Фиг. 1



Фиг. 2

дится в плоском установившемся потоке идеальной несжимаемой невесомой жидкости плотности ρ . Давление жидкости в оболочке P_1 . Подъемная сила, действующая на оболочку, уравновешивается нормальной распределенной по образующей оболочки нагрузкой Φ . Изменение формы оболочки происходит из-за изгибных деформаций без растяжения срединной поверхности. Требуется определить форму оболочки, усилия в ней, силы, действующие на оболочку, поле скоростей в жидкости, если заданы скорость потока на бесконечности V_∞ , полное давление в потоке P^* и циркуляция скорости Γ (фиг. 1). Необходимо определить функцию $z(\zeta)$, которая конформно отображает круг единичного радиуса плоскости ζ ($|\zeta| \leq 1$) на область течения в плоскости $z = x + iy$, причем бесконечно удаленной точке потока соответствует точка $\zeta = 0$ (фиг. 2). Комплексный потенциал течения W на плоскости ζ имеет вид

$$(1.1) \quad W = NV_\infty \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \text{Ln} \frac{1}{\zeta}$$

где N – постоянная, имеющая размерность длины. Когда жесткость оболочки стремится к бесконечности, то справедливы соотношения

$$(1.2) \quad z = f(\zeta), \quad \frac{1}{V_\infty} \frac{dW}{dz} = \left[\frac{N_0(\zeta^2 - 1)}{\zeta} + \frac{\Gamma_0}{2\pi V_\infty i} \right] \frac{1}{f'(\zeta)\zeta}$$

В общем случае комплексно-сопряженную скорость будем искать в виде

$$(1.3) \quad \frac{1}{V_\infty} \frac{dW}{dz} = \left[\frac{N_0(\zeta^2 - 1)}{\zeta} + \frac{\Gamma_0}{2\pi V_\infty i} \right] \frac{\exp[-\omega(\zeta)]}{f'(\zeta)\zeta}$$

Здесь $\omega(\zeta)$ – функция, аналитическая в круге $|\zeta| \leq 1$ и обращающаяся в нуль при $\zeta = 0$. Из условия на бесконечности следует, что $\omega(\zeta)$ представима в виде ряда

$$\omega(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^n$$

с комплексными коэффициентами $c_n = a_n + ib_n$. Из (1.1) и (1.3) следует

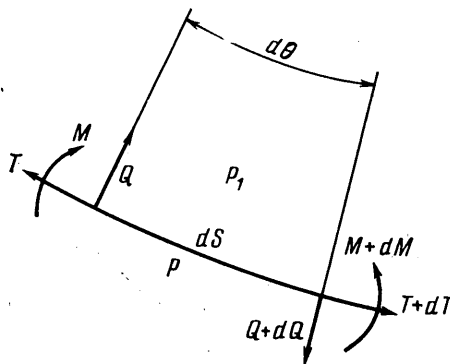
$$(1.4) \quad \frac{dz}{d\zeta} = N l f'(\zeta) \exp[\omega(\zeta)] \quad l = \frac{1}{N_0} \frac{\zeta^2 - i C \zeta - 1}{\zeta^2 - i C_0 \zeta - 1}, \quad C = \frac{\Gamma}{2\pi N V_\infty}, \quad C_0 = \frac{\Gamma_0}{2\pi N V_\infty}$$

Уравнения равновесия для оболочки (фиг. 3) имеют вид [9]

$$(1.5) \quad dT/dS + Q/R = 0$$

$$(1.6) \quad dQ/dS - T/R + P_1 - P + q_n = 0$$

$$(1.7) \quad Q = dM/dS$$



Фиг. 3

Здесь T, Q, M — усилие натяжения, перерезывающая сила, изгибающий момент, R, S — радиус кривизны и длина дуги поперечного сечения соответственно, P — давление в жидкости, $q_n = \Phi/\sigma^*$ — распределенная нагрузка. Разложение q_n в ряд Фурье при $\sigma^* \rightarrow 0$ имеет вид

$$q_n = \frac{\Phi}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k(\sigma_1 - \sigma) \right]$$

где σ_1, σ^* — точка приложения и дуга действия на единичной окружности нагрузки Φ .

Изгибающий момент равен

$$(1.8) \quad M = D(1/R - 1/R_0)$$

Индекс «0» относится к параметрам, соответствующим недеформированной оболочке. Подставляя (1.8) в (1.7) и далее в (1.5) и интегрируя, получим выражение для усилия натяжения

$$(1.9) \quad T = -\frac{D}{2R^2} + \alpha \frac{D}{N^2}$$

$$\alpha = \frac{N^2}{2} \left[\frac{1}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{2T_1}{D} + 2 \int_{1/R_0}^{1/R_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right) d \frac{1}{R_0} \right]$$

где T_1, R_1, R_{01} — усилие натяжения и радиусы кривизны в сечении B .

Уравнение (1.6) с учетом (1.7)–(1.9), $R = dS/d\theta$ и уравнения Бернулли запишется

$$(1.10) \quad \frac{d^3(\theta - \theta_0)}{dS^3} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dS} \right)^3 - \frac{\alpha}{N^2} \frac{d\theta}{dS} + \frac{P_1 - P^*}{D} + \frac{q_n}{D} + \frac{\rho V^2}{2D} = 0$$

где θ — угол между осью x и касательной к линии поперечного сечения в деформированном состоянии оболочки. Угол θ , скорость на границе оболочки V , элемент длины дуги dS определяются из выражений

$$(1.11) \quad \theta = \mu + \theta_0, \quad V = V_\infty g e^{-\lambda}, \quad dS = N t e^\lambda d\sigma$$

$$\theta_0 = -\arg \left[\frac{i}{f'(e^{i\sigma}) e^{i\sigma}} \right], \quad g = \frac{N_0}{f_0} (2 \sin \sigma - C_0)$$

$$t = -|l| f_0, \quad f_0 = |f'(e^{i\sigma})|$$

Подставляя (1.11) в (1.10), получим

$$(1.12) \quad \mu''' + \theta_0''' - 3 \left(\frac{t'}{t} + \lambda' \right) (\mu'' + \theta_0'') + \left[2\lambda'^2 - \lambda'' + 4 \frac{t'}{t} \lambda' + 3 \frac{t''}{t^2} - \frac{t''}{t} + \frac{1}{2} (\mu' + \theta_0')^2 + \alpha t^2 e^{2\lambda} \right] (\mu' + \theta_0') + [(\beta_1 - \eta_1) e^{2\lambda} + g^2] t^3 e^{\lambda} \gamma - \frac{d^3 \theta_0}{dS^3} N^3 u^3 e^{3\lambda} = 0$$

$$\beta_1 = \frac{2(P_1 - P^*)}{\rho V_\infty^2}, \quad \eta_1 = \frac{2q_n}{\rho V_\infty^2}, \quad \gamma = \frac{\rho V_\infty^2 N^3}{2D}$$

Граничные условия для замкнутой цилиндрической оболочки имеют вид (условие периодичности)

$$(1.13) \quad \omega(e^{i\sigma}) = \omega[e^{i(\sigma+2\pi)}]$$

2. Пусть $\gamma=0$; $R_n = \text{const}$ тогда уравнение (1.12) удовлетворится, если положить $\alpha = \alpha_0$, $\lambda = \mu = 0$. В общем случае α , λ , μ зависят от γ . Считая эти зависимости аналитическими в окрестности $\gamma=0$, будем искать решение в виде рядов аналогично [4, 5]

$$(2.1) \quad \alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \alpha_k, \quad \lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \lambda_k, \quad \mu' = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^k \mu_k'$$

$$(2.2) \quad \lambda_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(k)} \cos n\sigma - b_n^{(k)} \sin n\sigma$$

$$\mu_k' = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^{(k)} \cos n\sigma - b_n^{(k)} \sin n\sigma)$$

Подставляя (2.1) в (1.12) и сравнивая коэффициенты при γ^k ($k=1, 2, \dots$), получим бесконечную систему уравнений вида

$$(2.3) \quad \mu_k''' - 3 \frac{t'}{t} \mu_k'' - \theta_0' \lambda_k'' + \left(4 \frac{t'}{t} \theta_0' - 3\theta_0'' \right) \lambda_k' + \\ + \left(3 \frac{t'^2}{t^2} - \frac{t''}{t} + \frac{3}{2} \theta_0'^2 - \alpha_0 t^2 \right) \mu_k' - (2\alpha_0 \lambda_k + \alpha_k) t^2 \theta_0' = G_k$$

Здесь $G_k = -(\beta_1 + \eta_1 + g^2) t^3$ и т. д.

Разлагая коэффициенты в уравнении (2.3) в ряды Фурье и сравнивая коэффициенты при косинусах и синусах с одинаковыми аргументами, получим бесконечные системы алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{ij}^{(k)} X_i^{(k)} = A_j^{(k)}, \quad j=0, 1, \dots$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_{ij}^{(k)} X_i^{(k)} = B_j^{(k)}, \quad j=1, 2, \dots$$

где $d_{ij}^{(k)}$, $e_{ij}^{(k)}$ — известные коэффициенты, $X_i^{(k)}$ — неизвестные $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$, α_k ; $A_j^{(k)}$, $B_j^{(k)}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции G_k .

Действительная часть функции $\omega(e^{i\sigma})$ через мнимую определяется по формуле обращения Гильберта [10]

$$(2.4) \quad \lambda(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \operatorname{ctg} \frac{\varphi - \sigma}{2} d\varphi + \lambda_0, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda(\varphi) d\varphi$$

Для решения краевой задачи (1.12), (1.13) используется метод последовательных приближений, описанный в работе [6]. Для заданного распределения давлений на недеформированной оболочке находится ее форма, т. е. λ полагается равным нулю и (1.15) интегрируется с начальными условиями

$$\sigma=0, \quad \mu = \mu_0, \quad \mu' = \mu_0', \quad \mu'' = \mu_0''$$

По новой форме оболочки определяется распределение давлений, т. е. по формуле обращения Гильберта (2.4) находится λ . По полученному распределению давлений находится новая форма и т. д. Если решение мало отличается от предыдущего, то определяется окончательная форма и усилия в оболочке.

3. Параметрические уравнения линии поперечного сечения оболочки имеют вид

$$(3.1) \quad x = N \int_0^{\sigma} t e^{\lambda} \cos(\mu + \theta_0) d\sigma + C_1, \quad y = N \int_0^{\sigma} t e^{\lambda} \sin(\mu + \theta_0) d\sigma + C_2$$

где C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Из условия нерастяжимости срединной поверхности оболочки находится N

$$(3.2) \quad N = \Pi \int_0^{z_n} t e^{\lambda} d\sigma$$

где Π – периметр поперечного сечения оболочки.

Изгибающий момент, перерезывающая сила, усилие натяжения определяются из (1.7) – (1.9) с учетом (1.11)

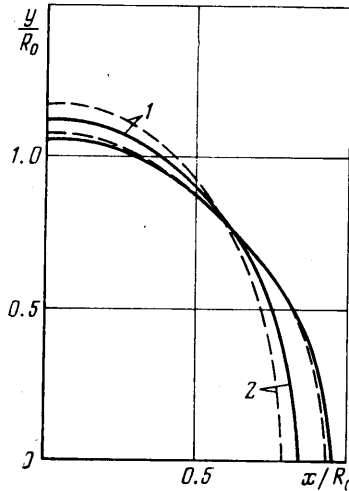
$$(3.3) \quad M = D \left(\frac{\mu' + \theta_0'}{N t e^{\lambda}} - \frac{1}{R_0} \right)$$

$$(3.4) \quad Q = D \left[\frac{\mu'' + \theta_0'' - \left(\frac{t'}{t} + \lambda' \right) (\mu' + \theta_0')}{N^2 t^2 e^{2\lambda}} + \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{R_0} \right) \right]$$

$$(3.5) \quad T = - \frac{D}{2} \frac{(\mu' + \theta_0')^2}{N^2 t^2 e^{2\lambda}} + \alpha \frac{D}{N^2}$$

Аэродинамическая сила, действующая на оболочку, $\Phi = 2\pi N C_D V_{\infty}^2$.

4. В случае круговой цилиндрической оболочки функция, отображающая единичный круг на область течения имеет вид



Фиг. 4

$$z = R_0 / \zeta, \quad R_0 = N_0 = f_0$$

Основные зависимости при $C = C_0$:

$$t = -1, \quad g = 2 \sin \sigma - C_0$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \sigma \quad (0 < \sigma < \pi)$$

$$(4.1) \quad \theta_0 = \frac{3\pi}{2} - \sigma \quad (\pi < \sigma < 2\pi)$$

Уравнение (1.12) для круговой цилиндрической оболочки с учетом (4.1) запишется в виде

$$\mu''' - 3\lambda' \mu'' + \left[2\lambda'^2 - \lambda'' + \frac{1}{2}(\mu' - 1)^2 - \alpha e^{2\lambda} \right] (\mu' - 1) - [(\beta_1 + \eta_1) e^{2\lambda} + g^2] e^{\lambda} \gamma = 0$$

Оно дополняется условиями: $\mu = \mu'' = \lambda' = 0$ при $\sigma = \pi/2, 3\pi/2$.

Безразмерные усилия для круговой цилиндрической оболочки равны

$$\frac{MR_0}{D} = \frac{1 - \mu'}{N_+ e^{\lambda}} - 1, \quad N_+ = N/R_0$$

$$\frac{QR_0^2}{D} = \frac{\mu'' - \lambda'(\mu' - 1)}{N_+^2 e^{2\lambda}}, \quad \frac{TR_0^2}{D} = - \frac{(\mu' - 1)^2}{2N_+^2 e^{2\lambda}} + \frac{\alpha}{N_+^2}$$

Формы круговых цилиндрических оболочек при $C=0$ даны на фиг. 4. Пунктирные линии соответствуют значению $\beta_1 = -2$, сплошные $\beta_1 = 0$. Для линий 1, 2 значения γ равны 0.25 и 0.5 соответственно. С увеличением γ при постоянном β_1 оболочка вытягивается в направлении оси y . С увеличением β_1 при постоянном γ форма оболочки стремится к круговой.

Поступила 8 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Определение движения жидкости при каком-нибудь условии, данном на линии тока. Полн. собр. соч., т. 3, М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. Слезкин Н. А. Обтекание наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Уч. зап. МГУ, 1951, т. 3, вып. 152.
3. Петрова С. И. Формы равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в однородном потоке жидкости. В сб. 3-й Всес. съезд по теор. и прикл. механ. Аннотации докладов. М., 1968.
4. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
5. Киселев О. М. К задаче об обтекании наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 3.
6. Леглер Э. Л. Расчетное и экспериментальное исследование обтекания потоком воздуха профиля мягкой надувной оболочки. Тр. ЦАГИ, 1972, вып. 1382.
7. Берковский Б. С. Стационарное движение упругого контура в ограниченной жидкости. Прикл. механ., 1967, т. 3, вып. 11.
8. Гур-Мильнер С. И. О форме упругого равновесия и устойчивости пластины в плоскопараллельном потоке несжимаемой жидкости. Тр. Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1969, вып. 65.
9. Магула В. Э. Гибкая цилиндрическая оболочка под равномерным давлением. Тр. Николаевск. кораблестроит. ин-та, 1972, вып. 63.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.

УДК 532.5

К ВОПРОСУ О ПРОНИКАНИИ КУМУЛЯТИВНОЙ СТРУИ В ПРЕГРАДУ

Н. С. САНАСАРЯН

(Москва)

Решена задача о проникании кумулятивной струи с произвольным распределением скорости вдоль нее с учетом прочностных свойств преграды.

На примере струи с линейным распределением скорости показана возможность получения большой пробивной способности за счет изменения градиента вдоль струи в зависимости от физико-механических свойств преграды и струи.

Кроме того, получено распределение скорости вдоль струи, обеспечивающее максимальное пробитие в преграде, расположенной на таком расстоянии, когда частично или полностью по всей струе не достигается предельное растяжение.

Пусть к преграде подходит осесимметричная или плоская кумулятивная струя с произвольным распределением скорости вдоль струи и одинаковой скоростью в поперечном сечении.

Длину струи l_0 на расстоянии x_0 от преграды и скорость головной струи примем равными единице (фиг. 1).

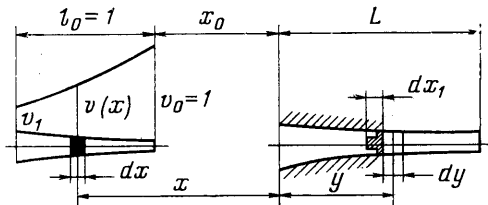
Элемент струи dx с координатой x , отсчитываемой от преграды, подойдя со скоростью $v(x)$ ко дну пробитого отверстия длиной y , пробивает в преграде отверстие длиной dy [1]

$$\begin{aligned} (1) \quad dy &= \frac{u}{v-u} dx_1 = \\ &= \frac{u}{v-u} \left(dx - \frac{x+y}{v} dv \right) \end{aligned}$$

где u — скорость проникания струи в преграду, являющаяся функцией скорости струи, dx_1 — длина элемента струи dx при подходе ко дну отверстия.

Уравнение (1) приводится к виду

$$(2) \quad \frac{d(y+x)}{dx} + \frac{f(v)}{v} \frac{dv}{dx} (x+y) = f(v) + 1, \quad f(v) = \frac{u}{v-u}$$



Фиг. 1