

ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИЧЕСКИМ ПОТОКОМ С ОБРАЗОВАНИЕМ УДАРНОГО ЭЛЕКТРОПРОВОДНОГО СЛОЯ ГАЗА

О. К. ВАРЕНЦОВ, А. Б. ВАТАЖИН, В. И. ГРАБОВСКИЙ

(Москва)

Поверхности сильного разрыва в электрогазодинамике рассматривались в работах [1, 2]. Исследование проводилось для случая, когда с двух сторон от поверхности разрыва газ обладает свойствами униполярно заряженной среды. Однако при обтекании тел с достаточно большой сверхзвуковой скоростью газ в сжатом слое между ударной волной и телом вследствие повышения температуры становится электропроводным и приобретает свойства низкотемпературной плазмы. Поэтому большое значение приобретает исследование ударных волн S^* , разделяющих униполярно заряженную среду и низкотемпературную плазму. Волны S^* , разделяющие незаряженную среду и газ с высокой электропроводностью при наличии электрического поля, изучались в [3].

Ниже рассмотрены общие свойства волн S^* (физическая модель, соотношения на волне, условия эволюционности, ударные адиабата и поляра). Дана постановка задачи об обтекании тел сверхзвуковым электрогазодинамическим потоком с образованием волны S^* . Для ее решения при малом параметре электрогазодинамического взаимодействия предложен метод возмущений. В качестве примера построено полное решение задачи об обтекании клина.

1. Постановка задачи. Система уравнений электрогазодинамики, описывающая стационарное течение невязкого нетеплопроводного совершенного газа с постоянными теплоемкостями, имеет вид

$$(1.1) \quad \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \rho (\nabla \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + q \mathbf{E} \\ \nabla \nabla p + \gamma p \operatorname{div} \mathbf{v} = (\gamma - 1) q b E^2$$

$$(1.2) \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{\epsilon} q, \quad \mathbf{j} = q(\mathbf{v} + b \mathbf{E}) \\ \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (b, \epsilon = \text{const})$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ — векторы скорости среды, электрического поля и плотности электрического тока, ρ и p — плотность и давление среды, q , φ и ϵ — плотность объемного электрического заряда, электрический потенциал и диэлектрическая постоянная среды соответственно.

Общие условия на поверхности сильного разрыва в электрогазодинамике записываются следующим образом [1, 2]:

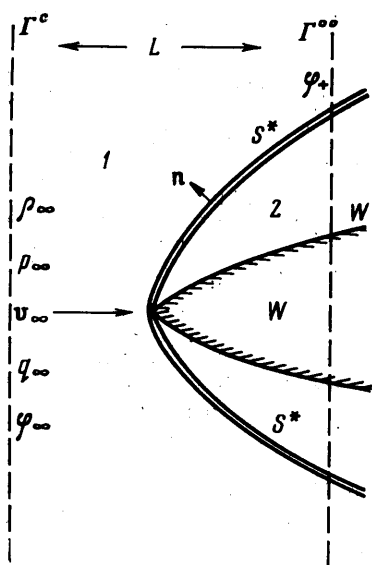
$$(1.3) \quad \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} = m, \quad m \{v_n\} + \{p\} - \frac{\epsilon}{8\pi} \{E_n^2\} = 0 \\ m \{v_t\} = \frac{\epsilon}{4\pi} E_t \{E_n\}$$

$$m \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2}{2} + \frac{v_t^2}{2} \right\} = E_i$$

$$\{j_n\} = -\operatorname{div} i, \quad \{E_i\} = 0, \quad \{E_n\} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \theta$$

Здесь z_t — составляющая вектора z в касательной плоскости к поверхности разрыва, z_n — проекция z на нормаль n к разрыву, направленную в сторону втекающего в него газа, $\{z\}$ — разность значений z на разрыве, i и θ — поверхностные плотности тока и заряда.

Рассмотрим обтекание тела W сверхзвуковым потоком газа, содержащим заряженные частицы (фиг. 1). Будем исследовать течение в про-



Фиг. 1

странстве между двумя поверхностями Γ^c (эммитером) и Γ^{oo} (коллектором). На Γ^c задаются электрический потенциал ϕ_∞ , плотность электрического заряда q_∞ , скорость, плотность и давление газа v_∞ , ρ_∞ и p_∞ . Левее Γ^c расположены источники электрического заряда, так что величины ϕ_∞ и q_∞ , вообще говоря, должны определяться из решения электрогазодинамической задачи для этой области. Поэтому ϕ_∞ и q_∞ рассматриваются как модельные распределения параметров, учитывающие предысторию течения.

Условиями на поверхности Γ^{oo} (которая может проходить через тело W) моделируются окружающие «электрические» условия в нижней по потоку области (проводящие поверхности, «электрическая» связь тела с внешними источниками электроэнергии и т. д.). На Γ^{oo} и поверхности тела W' необходимо задать одно условие для электрического потенциала (простейшим является условие $\phi = \phi_+ = \text{const}$ на проводящих Γ^{oo} и W').

В рассмотренном случае электрические заряды движутся в направлении набегающего потока. Если же системы $\Gamma^c + \Gamma^{oo}$ или $\Gamma^c + W'$ являются коронными источниками, то электрические заряды при расположении коронирующего острия на Γ^{oo} или на W' могут двигаться против потока, и тогда на Γ^{oo} или на W' необходимо задать два электрических параметра: $\phi = \phi_+$ и $q = q_+$, а на Γ^c — только одно электрическое условие $\phi = \phi_\infty$.

К указанным соотношениям необходимо добавить асимптотические условия на бесконечности для электрических параметров.

Вместо задания потенциала на Γ^c , Γ^{oo} и W' в более общем случае задаются связи между потенциалом ϕ и его производными, соответствующие различным свойствам этих поверхностей.

На W' задается условие непротекания газа; а на ударных волнах — условия (1.3). Решение задачи зависит от конкретного вида этих условий.

2. Ударные волны S^* . При обтекании тел потоками с большой сверхзвуковой скоростью вследствие повышения температуры газа за ударной волной начинается ионизация газа, сжатый слой между ударной волной и телом (область 2) становится электропроводным, и его проводимость σ_2 может значительно превосходить «проводимость» газа $q_1 b$ перед волной. В то же время параметры j_1 , q_1 и E_1 определяются условиями течения в

области 1 и в большинстве приложений электрогазодинамики имеют следующие порядки величин:

$$(2.1) \quad |j_1| \leq 10^3 \text{ мкА}, \quad q_1 \sim 5 \text{ ед. CGSE} \\ |E_1| \sim 10 \text{ кВ/см}$$

Согласно (2.1) электрогазодинамические течения характеризуются малыми токами и концентрациями заряженных частиц и большими электрическими полями. С физической точки зрения очевидно, что для обеспечения протекания малого тока (порядка j_1) через область 2 с большой электропроводностью σ_2 необходимы малые разности потенциалов. Отсюда следует, что электрическим полем E_2 в области 2 можно пренебречь по сравнению с большим электрическим полем E_1 в области 1.

Дадим более точные оценки для указанного приближения. Из пятого соотношения (1.3) следует, что

$$j_{1n} = q_1(v_{1n} + b_1 E_{1n}) \sim j_{2n} = \sigma_2 E_{2n} + q_2 v_{2n}$$

При условии, что $q_2 v_{2n} \leq q_1 v_{1n}$ находим (в дальнейшем используются характерные абсолютные значения величин)

$$r = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} \sim \max \left(\frac{q_1 b_1}{\sigma_2}, \frac{q_1 v_{1n}}{\sigma_2 E_{1n}} \right)$$

Так как, согласно (1.2), $E_{1n} \sim 4\pi q_1 L / \epsilon$, где L — характерный размер электрогазодинамического течения в области 1, имеем

$$(2.2) \quad r \sim \max(\Pi, K), \quad \Pi = \frac{q_1 b_1}{\sigma_2}, \quad K = \frac{\epsilon v_{1n}}{4\pi \sigma_2 L}$$

Принимая $\sigma_2 \geq 10^{-6}$ мо/см, $v_{1n} \sim 10^5$ см/сек, $b_1 \sim 1$ см²/В·сек, $L \sim 10$ см, $\epsilon \sim 1$ и учитывая (2.1), получаем

$$(2.3) \quad \Pi \leq 1.5 \cdot 10^{-5} \ll 1, \quad K \leq 10^{-3} \ll 1, \quad E_{2n} \ll E_{1n}$$

Обратим внимание, что оценки (2.3) соответствуют очень малой проводимости σ_2 . При $\sigma_2 \sim 1$ мо/см (характерной проводимости для низкотемпературной плазмы) неравенства (2.3) выполняются с большим запасом.

Из (2.2) и (2.3) следует, что поперечным изменением потенциала в области 2 можно пренебречь:

$$(2.4) \quad \Phi_* - \Phi \sim \tau r E_{1n}, \quad \frac{\Phi_* - \Phi_w}{\Phi_*} \sim r \frac{\tau}{L} \ll 1$$

Здесь $\Phi_* \sim E_{1n} L$ — характерная величина потенциала в области 1, Φ_* и Φ_w — потенциал на ударной волне S и на теле W , τ — характерная толщина сжатого слоя.

Если тело — проводник, то, согласно (2.4), всегда можно также пренебречь изменением потенциала $(\delta\Phi)_\parallel$ вдоль поверхности W' . Если тело — диэлектрик, то, воспользовавшись оценками $j_{2\parallel} \tau \sim j_{1n} L_w$, $j_{2\parallel} \sim \sigma_2 E_{2\parallel}$, где $j_{2\parallel}$ и $E_{2\parallel}$ — компоненты векторов плотности электрического тока и электрического поля вдоль поверхности тела с характерной длиной L_w , находим

$$\frac{(\delta\Phi)_\parallel}{\Phi_*} \sim \frac{E_{2\parallel} L_w}{\Phi_*} \sim \frac{L_w^2}{\tau L} \max(\Pi, K) \ll 1$$

если отношение L_w / τ не чрезмерно велико.

Таким образом, вследствие незначительного изменения потенциала в области 2, на ударной волне выполняются условия

$$(2.5) \quad \Phi = \Phi_* = \Phi_w = \text{const}, \quad E_{1t} = E_{2t} = 0 \quad \text{на } S$$

Малые электрические поля в области 2 позволяют в первом приближении не учитывать силы qE и источники тепла qbE^2 в уравнениях (1.1), записанных для области 2. Аналогичные члены в уравнениях (1.1) для области 1 пропорциональны параметру электрогазодинамического взаимодействия.

При сделанных оценках соотношения (1.3) на ударной волне принимают вид

$$(2.6) \quad \rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n} = m, \quad m \{v_n\} + \{p\} - \frac{\varepsilon E_{1n}^2}{8\pi} = 0$$

$$\{v_t\} = 0, \quad \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_n^2}{2} \right\} = 0$$

Соотношения (2.6) отличаются от обычных газодинамических условий на ударной волне только наличием одного члена (источника импульса) $\varepsilon E_{1n}^2 / 8\pi$.

Рассмотренные ударные волны в дальнейшем будут называться волнами S^* .

На волне S^* , как правило, возникает поверхностный заряд $\theta = \varepsilon E_{1n} / 4\pi$. Этот заряд является детерминированным: при заданном положении S^* и известных распределениях газодинамических параметров в области 1 система уравнений (1.2) с граничными условиями на поверхности Γ^0 , условиями (2.5) и асимптотическими соотношениями на бесконечности позволяет однозначно определить электрическое поле в области между Γ^0 и S^* и, как следствие, найти величину θ .

В указанном приближении распределение электрических параметров в области 2 для решения задачи несущественно. Оно становится необходимым при определении следующих приближений по малому параметру r (см. формулу (2.2)). Действительно, представим электрогазодинамические параметры на ударной волне в виде

$$E_{2n} = r E_{2n}^{(1)} + \dots, \quad E_t = r E_t^{(1)} + \dots \quad (r \ll 1)$$

$$\xi = \xi^0 + r \xi^1 \quad (\xi = v_1, v_2, p_1, p_2, \rho_1, \rho_2, i, \theta, E_{1n}, j, m = \rho v_n)$$

Величины с верхним индексом $(^0)$ удовлетворяют системе уравнений (2.6). Соотношения, связывающие величины для первого приближения, находятся путем линеаризации выражений (1.3)

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \{m^1\} &= \{\rho^0 v_n^{(1)} + \rho^1 v_n^{(0)}\} = 0 \\ m^1 \{v_n^{(0)}\} + m^0 \{v_n^{(1)}\} + \{p^1\} - \frac{\varepsilon}{4\pi} E_{1n}^{(0)} E_{1n}^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

$$m^1 \{v_t^{(0)}\} + m^0 \{v_t^{(1)}\} = \frac{\varepsilon}{4\pi} E_t^{(1)} E_{1n}^{(0)}$$

$$\begin{aligned} m^1 \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho^0} + \frac{v_n^{(0)2}}{2} \right\} + m^0 \left\{ \frac{\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p^1}{\rho^0} - \frac{p^0 \rho^1}{\rho^{02}} \right) + \right. \\ \left. + v_n^{(0)} v_n^{(1)} + v_t^{(0)} v_t^{(1)} \right\} = E_t^{(1)} i^0 \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad j_{2n}^{(0)} = \sigma_* E_{2n}^{(1)} + f^0, \quad j_{1n}^{(0)} - j_{2n}^{(0)} = -\operatorname{div} i^0, \quad \sigma_2 = \sigma_* / r$$

$$(2.9) \quad E_{1n}^{(1)} - E_{2n}^{(1)} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \theta^1 \quad \left(\theta^0 = \frac{\varepsilon E_{1n}^{(0)}}{4\pi} \right)$$

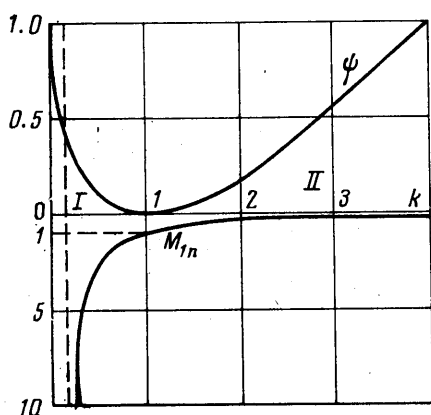
Чтобы разрешить соотношения (2.7) – (2.9), необходимо знать величину поверхностного тока i^0 , вычисление которой возможно, если задана форма закона Ома для структурной зоны волны S^* . Пусть внутри волны S^*

$$j_i = qv_i + qbE_i + A_i, \quad |A_i| < \infty$$

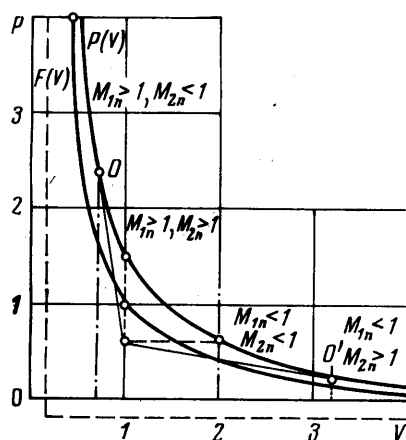
Тогда, интегрируя это выражение по толщине Δn структурной зоны волны S^* , находим

$$(2.10) \quad i^0 = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_{\Delta n} j_i^0 dn = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_{\Delta n} (v_i^0 + bE_i^0) q^0 dn = v_i^0 \theta^0$$

При выводе (2.10) учтено, что в нулевом приближении касательная к разрыву составляющая скорости непрерывна, а касательная составляющая электрического поля равна нулю.



Фиг. 2



Фиг. 3

Условие (2.10) и второе соотношение в (2.8) позволяют вычислить величину j_{2n}^0

$$(2.11) \quad j_{2n}^0 = j_{1n}^0 + \text{div}(v_i^0 \theta^0)$$

В случае, когда закон Ома для области 2 имеет вид $j = \sigma E$, наличие условия (2.11) на волне S^* и граничного условия для электрических параметров на теле дает принципиальную возможность проинтегрировать электрические уравнения (совместно с газодинамическими уравнениями) в области между волной S^* и телом и тем самым определить величины E_{2i}^1 и E_{2n}^1 на волне S^* . С помощью уравнений (1.2), записанных относительно первого приближения и рассматриваемых совместно с системой уравнений (1.1), условий на Γ^0 и условия $E_{1i}^1 = E_{2i}^1$ на S^* находятся распределения электрических параметров в области I, в том числе величина E_{1n}^1 (а следовательно, и θ^1) на S^* . Связи между газодинамическими параметрами на разрыве для первого приближения даются формулами (2.7).

Ситуация осложняется, если в законе Ома для области 2 могут присутствовать дополнительные члены, например $j^0 = q_2^0 v_{2n}^0 \neq 0$ (см. (2.8)). Величина q_2^0 не определяется из соотношений (2.6) и может быть найдена в результате исследования структуры волны S^* .

Выше была рассмотрена принципиальная возможность определения первого приближения по параметру γ . Так как γ на несколько порядков

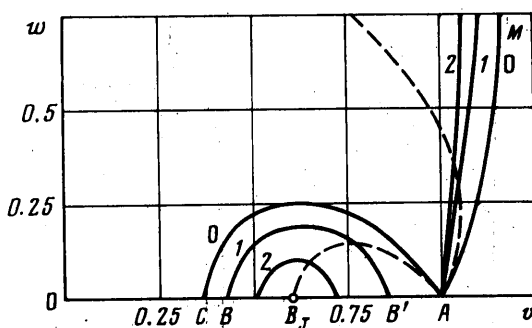
меньше единицы, в дальнейшем будет рассматриваться только нулевое приближение, определяемое соотношениями (2.5)–(2.6).

3. Ударная адиабата. Разрешая соотношения (2.6) относительно величины $V = \rho_1 / \rho_2$, находим

$$V = \frac{\rho_1}{\rho_2} = V_{\pm} = -\frac{1}{2}(1 - N^0 + k \pm \sqrt{(1 - N^0 + k)^2 - 4k}) \quad (3.1)$$

$$N^0 = \frac{4\pi\gamma\theta^2}{(\gamma+1)\varepsilon\rho_1 v_{1n}^2}, \quad k = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_{1n}^2}, \quad M_{1n}^2 = \frac{\rho_1 v_{1n}^2}{\gamma p_1}$$

Здесь N^0 — параметр электрогазодинамического взаимодействия, M_{1n} — число Маха, определенное по нормальной к волне скорости в области I, k — отношение плотностей на ударной волне при $N^0 = 0$.



Фиг. 4

Из формул (3.1) следует:

1°. При $N^0 = 0$ имеем $V_- = k < 1$, $V_+ = 1$, если $M_{1n} > 1$, и $V_- = 1$, $V_+ = k > 1$, если $M_{1n} < 1$. Корень $V = 1$ соответствует непрерывному переходу, а корень $V = k$ определяет отношение плотностей на ударной волне в обычной газовой динамике.

2°. При $N^0 > 0$ решение существует (т. е. имеется $V > 0$), если $N^0 \leq (1 - \sqrt{k})^2 = \psi(k)$. Таким образом, в плоскости k , N^0 область существования решения определяется условиями $0 \leq N^0 \leq \psi(k)$, $[(\gamma-1)/(\gamma+1)] < k < \infty$ (см. фиг. 2, на которой проведена также зависимость $M_{1n}(k)$). Область существования состоит из двух подобластей I и II, для которых $M_{1n} > 1$ и $M_{1n} < 1$ соответственно.

3°. Точкам области I соответствуют корни, удовлетворяющие условию

$$k \leq V_- \leq V_+ \leq 1$$

а для точек в области II имеем

$$1 \leq V_- \leq V_+ \leq k$$

4°. Для корней $V = V_-$ квадрат числа Маха $M_{2n}^2 = \rho_2 v_{2n}^2 / \gamma p_2$ меньше единицы, а для корней $V = V_+$ — больше единицы. При $N^0 = \psi(k)$ имеем $V_- = V_+ = V_J$, $M_{2n} = 1$ (условие Жуге).

Уравнение ударной адиабаты имеет вид

$$P = \frac{p_2}{p_1} = P(V) = F(V) + N^0 \frac{V+1}{V-V_-}$$

(3.2)

$$F(V) = \frac{(\gamma+1) - (\gamma-1)V}{(\gamma+1)V - (\gamma-1)}, \quad V = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad N^{\infty} = \frac{\gamma-1}{2} M_{1n}^2 N^{\circ}$$

Кривая $P=F(V)$ является ударной адиабатой в обычной газовой динамике.

Точки на ударной адиабате, соответствующие состоянию 2, определяются как точки пересечения $P=P(V)$ с прямой

$$P=I(V) = \gamma M_{1n}^2 (1-V) + l, \quad l = 1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} N^{\circ}$$

Участок на ударной адиабате, соответствующий условию $M_{1n} < 1$, существует при $N^{\circ} < V$. На фиг. 3 изображены кривая $P=F(V)$, ударная адиабата $P(V)$ и точки Жуге O и O' , построенные при $\gamma=1.4$.

Заметим, что уравнение (3.2) совпадает с уравнением ударной адиабаты, полученной в [3], где исследовалось влияние продольной составляющей электрического поля на ионизирующие ударные волны в газе.

4. Ударная поляра. Пусть ν — угол наклона волны S^* к направлению скорости потока $v_1 = e_x v_1$ перед волной. Связь между скоростями v_{2x} и v_{2y} за волной определяется соотношением

$$w^2 = - \frac{(1-\nu)(\nu-\nu_-)(\nu-\nu_+)}{\nu^{\circ} - \nu} = g(\nu, \gamma, M_1, N^*)$$

(4.1)

$$w = \frac{v_{2y}}{v_1}, \quad \nu = \frac{v_{2x}}{v_1}, \quad \nu_{\pm} = \frac{1}{2} (1 - N^* + \lambda \pm \sqrt{(1 - N^* + \lambda)^2 - 4\lambda})$$

$$N^* = \frac{4\pi\gamma\theta^2}{(\gamma+1)\epsilon_0 v_1^2}, \quad \nu^{\circ} = 1 + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2} - N^*$$

$$\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{(\gamma+1)M_1^2}, \quad M_1^2 = \frac{\rho_1 v_1^2}{\gamma p_1} \quad (v_{1n} = v_1 \sin \nu)$$

При $N^*=0$ из (4.1) получаем уравнение поляры в обычной газовой динамике. Согласно п. 3, параметр N^* должен удовлетворять условию $N^* \leq \sin^2 \nu (1 - \sqrt{\lambda})^2$, где k определяется формулой (3.1) с учетом того, что $M_{1n}^2 = M_1^2 \sin^2 \nu$.

На фиг. 4 представлено семейство ударных поляр, построенных для $M_1=2$ при $\gamma=1.4$ и разных N^* (кривые 0, 1, 2 соответствуют $N^*=0, 0.07, 0.13$). Пунктирными кривыми показаны линии Жуге, соответствующие точкам на плоскости ν, w , для которых $M_{2n} = \rho_2 v_{2n} / (\gamma p_2) = 1$.

При $N^*=0$ поляра имеет две ветви CA и AM , где $C=C(\lambda, 0)$, $A=A(1, 0)$. С увеличением N^* поляра начинает разделяться на замкнутую ветвь с точками B и B' на оси ν и выходящую из точки A бесконечную ветвь с асимптотой $\nu = \nu^{\circ} = 1 + 2/[(\gamma+1)M_1^2] - N^*$. При $N^*=N_j = (1 - \sqrt{\lambda})^2$ точки B и B' сливаются в одну точку $B=B_j$.

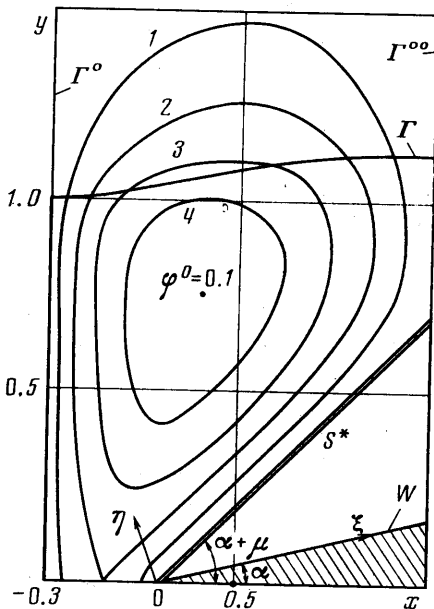
Ударные поляры при $M_1=1$ и $M_1 < 1$ исследуются аналогично.

Полученные для ударных поляр кривые с качественной стороны близки полярам, соответствующим ударным волнам с выделением тепла на их фронте [4]. Однако имеются и различия, в первую очередь обусловленные зависимостью параметра ν° от N^* .

Построенные семейства поляр дают решение следующей автомодельной задачи об обтекании клина сверхзвуковым потоком с образованием волны S^* . Пусть однородный набегающий поток не содержит заряженных

частиц, а на волне S^* поверхностный заряд постоянен. Тогда угол наклона γ и скорости v_{2x}, v_{2y} (и затем все параметры в области 2) определяются с помощью уравнения поляры. Положение и потенциал поверхности Γ^0 , обеспечивающие заданные поверхностный заряд и потенциал на волне S^* , затем находятся с помощью решения уравнения Лапласа для области между Γ^0 и S^* .

5. Отбор решений. Для отбора решения привлечем требование эволюционности ударных волн [5]. Для эволюционности волны необходимо, чтобы число расходящихся от нее возмущений было на единицу меньше имеющихся на ней условий. В данном случае, учитывая, что поверхностный заряд на волне является детерминированным (в смысле, указанном в п. 2), число соотношений на волне S^* , как и в обычной газовой динамике, равно трем (система соотношений (2.6)). В указанной постановке необходимо учитывать только расходящиеся от волны акустические и энтропийные возмущения. Действительно, ионная энтропийная волна в области 2 отсутствует, так как сжатый слой газа не обладает свойствами униполярно заряженной среды, а отходящие от волны электромагнитные возмущения были учтены при доказательстве детерминированности поверхностного заряда на волне S^* . Таким образом, вопрос об эволюционности решается так же, как и в обычной газовой динамике, — возможен переход только из сверхзвуковой области в дозвуковую.



Фиг. 5

Для эволюционности волны S^* при $M_{1n} > 1$, $M_{2n} > 1$ и $M_{1n} < 1$, $M_{2n} < 1$ необходимо еще одно дополнительное соотношение. Не исключено, что дальнейшее исследование особенностей образования волны S^* и реальных режимов обтекания тел позволит сформулировать недостающее условие (типа задания скорости фронта в случае медленного горения). Поэтому в пп. 3 и 4 были рассмотрены все возможные режимы волн S^* .

6. Обтекание тел при малом параметре электрогазодинамического взаимодействия. Перейдем к безразмерным переменным по формулам

$$(6.1) \quad v = v \cdot v^0, \quad p = \rho \cdot v \cdot v^0, \quad \rho = \rho \cdot \rho^0, \quad r = x \cdot r^0$$

$$q = \frac{\epsilon v^0}{4\pi b x} q^0, \quad j = \frac{\epsilon v^0}{4\pi b x} j^0, \quad \varphi = \frac{v \cdot x}{b} \varphi^0, \quad E = \frac{v}{b} E^0$$

Здесь индексом «*» отмечены характерные величины, а индексом «0» — безразмерные переменные.

Система уравнений (1.1) — (1.2) принимает следующий вид:

$$(6.2) \quad \operatorname{div} \rho^0 v^0 = 0, \quad \rho^0 (v^0 \nabla) v^0 = -\nabla p^0 + N f \quad (f = q^0 E^0)$$

$$(6.3) \quad v^0 \nabla p^0 + \gamma p^0 \operatorname{div} v^0 = N Q \quad (Q = (\gamma - 1) q^0 E^0)$$

$$(6.3) \quad E^0 = -\nabla \varphi^0, \quad \operatorname{div} E^0 = q^0, \quad j^0 = q^0 (v^0 + E^0), \quad \operatorname{div} j^0 = 0$$

$$(6.4) \quad N = \frac{\varepsilon}{4\pi b^2 \rho}.$$

Параметр электрогазодинамического взаимодействия N является характерным для течений, создаваемых путем обдува газом коронных источников.

В большинстве приложений $N \ll 1$, что позволяет для решения задач использовать метод возмущений.

Невозмущенное газодинамическое течение находится из системы уравнений (6.2) при $N=0$. Нулевое приближение для электрических параметров находится из системы уравнений (6.3), в которой необходимо положить $v^0 = U$, где U — невозмущенная скорость. Эта система уравнений сводится к совокупности уравнения эллиптического типа относительно φ^0 и уравнения гиперболического типа относительно q^0 :

$$(6.5) \quad \Delta \varphi^0 = -q^0, \quad \nabla q^0 (U - \nabla \varphi^0) + q^0 (\operatorname{div} U + q^0) = 0$$

Особенности системы (6.5) ранее были учтены при формулировке граничных условий на поверхностях Γ^0 , W' , Γ^{00} . Система уравнений (6.5) не содержит безразмерных параметров. Последние появляются только в граничных условиях. В том случае, когда поверхность Γ^0 находится под нулевым потенциалом, поверхность Γ^{00} проходит через тело W и потенциал на W' и Γ^{00} равен φ_+ , граничные условия записываются следующим образом:

$$(6.6) \quad \Gamma^0: \varphi^0 = 0, \quad q^0 = \beta \frac{q_\infty}{q}, \quad \left(\beta = \frac{4\pi b x \cdot q \cdot}{\varepsilon v} \right)$$

$$S^* \text{ и } \Gamma^{00}: \varphi^0 = \varphi_+, \quad \left(\varphi_+^0 = \frac{b \varphi_+}{v \cdot x} \right)$$

Здесь $q_\infty = q_\infty(\Gamma^0)$ — распределение электрического заряда на Γ^0 , q — характерная величина q на Γ^0 .

Система уравнений (6.5)–(6.6) решается в области между поверхностью Γ^0 и поверхностью $W' + \Gamma^{00}$ с учетом соответствующих асимптотических условий на бесконечности. В результате ее решения находятся распределения q^0 и φ^0 , величина E_{1n}^0 на S^* и силовые и тепловые электрические источники f и Q .

Далее проводится линеаризация системы уравнений (6.2), записанной для областей 1 (перед волной S^*) и 2 (между волной S^* и W). В результате получаем две системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка (система для области 1 при этом неоднородная). Для их решения и определения возмущения волны S^* используются граничные условия на Γ^0 , линеаризованные соотношения на волне S^* (включающие ранее определенный поверхностный заряд) и условия на W' .

7. Обтекание клина. Рассмотрим обтекание клина с углом при вершине 2α при наличии плоских заземленных поверхностей Γ^0 и Γ^{00} , расположенных в сечениях $x^0 = x_1^0$ и $x^0 = x_2^0$ (фиг. 5). Потенциал поверхностей Γ^0 , Γ^{00} и W' принимается равным нулю. С участка эмиттера $x^0 = x_1^0$, $-Y < y^0 < Y$ в поток инжектируются заряженные частицы с постоянной плотностью объемного электрического заряда $q^0 = \beta$. На остальной части поверхности Γ^0 электрический заряд равен нулю. При $y^0 \rightarrow \pm\infty$ потенциал φ^0 стремится к нулю.

Решение электрической задачи проводится в области между Γ° , S^* и Γ^∞ на основе двумерных уравнений (6.5) и сформулированных граничных условий.

Газодинамические параметры течения в областях 1 и 2 представим в виде

$$(7.1) \quad \begin{aligned} u_i^\circ &= U_i(1 + Nu_i'), \quad v_i^\circ = NU_i v_i', \quad p_i^\circ = P_i(1 + Np_i') \\ \rho_i^\circ &= R_i(1 + N\rho_i') \quad i=1, 2 \\ U_1 &= 1, \quad R_1 = 1, \quad P_1 = \frac{1}{\gamma M_1^2} \end{aligned}$$

Величины u_i' , v_i' — составляющие скорости по осям x , y , а величины u_2' , v_2' — составляющие скорости по осям ξ , η , связанным с клином (фиг. 5).

Линейные уравнения относительно возмущенных газодинамических параметров представляются в следующей форме:

$$(7.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \frac{1}{\gamma M_i^2} \frac{\partial p_i'}{\partial x_i} &= f_{xi}, \quad \frac{\partial v_i'}{\partial x_i} + \frac{1}{\gamma M_i^2} \frac{\partial p_i'}{\partial y_i} = f_{yi} \\ \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i'}{\partial y_i} + \frac{\partial \rho_i'}{\partial x_i} &= 0, \quad \frac{\partial p_i'}{\partial x_i} - \gamma \frac{\partial \rho_i'}{\partial x_i} = \gamma M_i^2 Q_i \\ i=1, 2; f_1 &= q^\circ E^\circ, Q_1 = (\gamma - 1) q^\circ E^{\circ 2} \\ f_2 &= 0, Q_2 = 0, x_1 = x, y_1 = y, x_2 = \xi, y_2 = \eta \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем верхний индекс « $\circ$ » у безразмерных координат опускается.

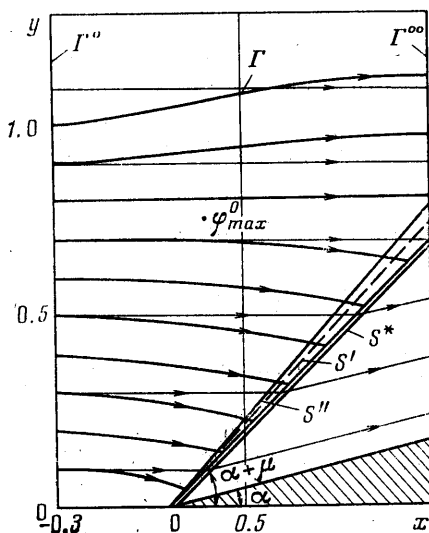
Угол наклона ударной волны равен $\mu + N\mu'$, где второй член является возмущением исходного угла μ между волной S^* и клином.

Подставив (7.1) в соотношения (2.6) на волне S^* и проведя их линеаризацию по параметру N , для величин U_i , P_i , R_i получим обычные газодинамические соотношения на косом скачке уплотнения. Связи между u_i' , v_i' , p_i' , ρ_i' и μ' на S^* определяются выражениями

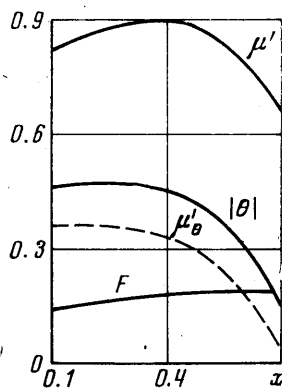
$$(7.3) \quad \begin{aligned} u_2' - \operatorname{ctg} \mu v_2' + \rho_2' + \mu' \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \mu &= L_1 \\ 2u_2' - 2v_2' \operatorname{ctg} \mu + \rho_2' + \frac{1}{\gamma M_2^2 \sin^2 \mu} p_2' &= L_2 \\ u_2' + v_2' \operatorname{tg} \mu + \mu' \operatorname{tg} \mu \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) &= L_3 \\ u_2' + \frac{p_2' - \rho_2'}{(\gamma - 1) M_2^2} &= L_4 \\ L_1 &= u_1' + \rho_1' - v_1' \operatorname{ctg} (\alpha + \mu), \\ L_2 &= \frac{1}{R_2 U_2^2 \sin^2 \mu} \left\{ R_1 U_1^2 \sin^2 (\alpha + \mu) [\rho_1' + 2u_1' - 2v_1' \operatorname{ctg} (\alpha + \mu)] + \right. \\ &\quad \left. + P_1 p_1' - \frac{1}{2} E_{1n}^{\circ 2} \right\} \\ L_3 &= u_1' + v_1' \operatorname{tg} (\alpha + \mu), \quad L_4 = \frac{U_1^2}{U_2^2} \left[u_1' + \frac{p_1' - \rho_1'}{(\gamma - 1) M_1^2} \right] \end{aligned}$$

Величины, входящие в (7.3), вычисляются на прямой $\eta = \xi \operatorname{tg} \mu$. Параметры $u_1', \rho_1', v_1', p_1'$ на S^* находятся с помощью решения системы (7.2) для области 1 методом характеристик. При этом учитывается, что возмущения газодинамических параметров на Γ^0 равны нулю. Электрическое поле E_{1n}^0 на S^* определяется из решения системы уравнений (6.5). Поэтому величины L_k ($k=1, \dots, 4$) могут рассматриваться как известные функции x (или ξ).

На поверхности клина ($\eta=0$) имеем условие $v_2'=0$.



Фиг. 6



Фиг. 7

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений (7.2) для области 2 (между прямыми $\eta=0$ и $\eta=\xi \operatorname{tg} \mu$) с четырьмя граничными условиями (7.3) и условием непротекания газа на теле. Перечисленные пять условий позволяют найти четыре функции $u_2', v_2', p_2', \rho_2'$ и угол μ' .

Для решения сформулированной задачи был использован метод, описанный в [6]. Все искомые величины выражаются через функцию $F(\omega)$, удовлетворяющую следующему функциональному уравнению:

$$F(\omega) - \lambda F(r\omega) = -L(\omega)$$

$$\lambda = \frac{a-b}{a+b}, \quad r = \frac{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \delta + \operatorname{tg} \mu}, \quad \sin \delta = \frac{1}{M_2}$$

(7.4)

$$a = \frac{2 \operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \delta} \left[1 - \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \sin^2 \mu \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right]$$

$$b = 1 + \frac{R_2 \operatorname{tg}^2 \mu}{R_1 \operatorname{tg}^2 \delta} - \gamma M_2^2 \sin^2 \mu \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right)$$

$$L(\omega) = L^*(\xi) \quad \text{при} \quad \xi = \frac{\omega \operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \mu + \operatorname{tg} \delta}$$

$$L^* = -\frac{2 \operatorname{tg}^2 \mu}{a+b} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) \frac{R_2}{R_1} L_1 \sin^2 \mu + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\operatorname{ctg}^2 \mu - (1 + (\gamma-1) M_2^2) \frac{R_2}{R_1} \sin^2 \mu L_2 - \right.$$

$$\left. - \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right) L_3 \cos^2 \mu + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \sin^2 \mu + \cos^2 \mu \right) L_4 \right\}$$

Решение уравнения (7.4) имеет вид [6]

$$F(\omega) = - \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n L(r^n \omega)$$

Угол $\mu'(\xi)$ и возмущение давления на теле $p_2'(\xi, 0)$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \mu' \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \operatorname{ctg} \mu [2 + (\gamma - 1) M_2^2] = \\ = F(\chi) \{ \operatorname{ctg}^2 \mu - \operatorname{ctg}^2 \delta + (\gamma - 1) M_2^2 \operatorname{ctg} \mu (\operatorname{ctg} \mu - \operatorname{ctg} \delta) + \\ + \lambda [\operatorname{ctg}^2 \mu - \operatorname{ctg}^2 \delta + (\gamma - 1) M_2^2 \operatorname{ctg} \mu (\operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \delta)] \} + \\ + L_1 (2 + (\gamma - 1) M_2^2) - L_2 (1 + (\gamma - 1) M_2^2) + L_4 (\gamma - 1) M_2^2 - \\ - L^* [\operatorname{ctg}^2 \mu - \operatorname{ctg}^2 \delta + (\gamma - 1) M_2^2 \operatorname{ctg} \mu (\operatorname{ctg} \mu + \operatorname{ctg} \delta)] \\ \chi = \xi \left(1 - \frac{\operatorname{tg} \mu}{\operatorname{tg} \delta} \right), \quad p_2'(\xi, 0) = 2\gamma M_2^2 F(\xi) \end{aligned}$$

Ниже представлены результаты расчетов, проведенных при $x_1^0 = -0.3$, $x_2^0 = 0.7$, $Y=1$, $M_1=2$, $\beta=6$, $\alpha=14^\circ$. Интегрирование системы (6.5) при этом осуществлялось с помощью метода, разработанного в [7, 8].

На фиг. 5 показаны линии постоянного потенциала в пространстве между Γ^0 , S^* и Γ^{00} (линии 1, 2, 3, 4 соответствуют $\varphi=0.02, 0.04, 0.06, 0.08$). Кривая Γ представляет собой границу электрической струи, внутри которой $q^0 \neq 0$. Существенно, что эквипотенциали сгущаются вблизи эмиттера и средней части волны S^* . Последнее обстоятельство обуславливает наличие максимума в распределении безразмерного поверхностного заряда θ^0 вдоль волны S^* .

На фиг. 6 изображены линии тока газа (тонкие линии) и линии заряженной компоненты (жирные линии). Показана деформация волны S^* при $N=0.1$. Кривая S' соответствует положению S^* при учете поверхностного заряда и отсутствии газодинамических возмущений, приходящих на S^* из области 1. Кривая S'' — положение ударной волны при суммарном воздействии поверхностного заряда и газодинамических возмущений.

На фиг. 7 представлены распределения величины μ' , поверхностного заряда $|\theta|$ на волне S^* , возмущения μ_0' при учете только поверхностного заряда и величины F , пропорциональной возмущению давления на клине.

Электрогазодинамические эффекты вызывают отклонение ударной волны в сторону набегающего потока и увеличение давления на клине.

Авторы благодарят Г. Г. Черного и участников семинара Г. А. Любимова за полезные обсуждения.

Поступила 21 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
2. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
3. Бармин А. А., Куликовский А. Г. О влиянии продольной составляющей электрического поля на ионизирующие ударные волны в газе. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
4. Черный Г. Г. Автомоделные задачи обтекания тел горючей смесью газов. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
6. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
7. Ватажин А. Б., Грабовский В. И. Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. ПММ, 1973, 37, вып. 1.
8. Грабовский В. И. Плоское электрогидродинамическое течение с обратным током. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.