

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРУЧЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА  
В СОПЛАХ НА СВЕРХ- И ДОКРИТИЧЕСКИХ РЕЖИМАХ

Н. Н. СЛАВЯНОВ

(Москва)

Рассматриваются слабозакрученные течения идеального газа с произвольными термодинамическими свойствами в сверхзвуковом сопле с центральным телом при сверх- и докритических режимах работы. Результаты исследования обобщены на случай течения с произвольной (не обязательно слабой) неравномерностью параметров торможения потока (энтропии и полной энтальпии) по сечению сопла. Проведена оценка диапазона применимости линейной теории по интенсивности закрутки. Исследование представляет собой обобщение идей Г. Г. Черного, развитых в [1].

В работе [1] при линеаризации уравнений радиально-уравновешенного слабозакрученного течения был получен интегральный параметр интенсивности закрутки

$$\varepsilon = \int_0^1 \left[ \int_{\psi}^1 \frac{\Gamma^2(\psi)}{\psi^2} d\psi \right] d\psi$$

В работе [2] было показано, что этот параметр можно успешно использовать в качестве критерия подобия для сравнения интегральных характеристик закрученных течений различных типов при таких интенсивностях закрутки, когда ее уже нельзя считать слабой, например когда коэффициент расхода сопла под ее воздействием уменьшается на несколько десятков процентов. В связи с этим представляет интерес задача о применимости линейной теории для расчета локальных характеристик течений с относительно сильной закруткой.

1. Рассмотрим поток газа с произвольными термодинамическими свойствами в сверхзвуковом сопле с центральным телом при известном распределении энтропии  $S$ , полной энтальпии  $H$  и циркуляции  $\Gamma$  по радиусу некоторого начального сечения. Представим их в виде

$$S(\psi) = S^0 + \Delta S(\psi), \quad H(\psi) = H^0 + \Delta H(\psi), \quad \Gamma(\psi) = w r,$$

где  $w$  — окружная составляющая скорости,  $r$  — радиус,  $S^0$  и  $H^0$  — некоторые постоянные для всего потока, определяемые из условия

$$(1.1) \quad \int_0^1 \Delta S d\psi = \int_0^1 \Delta H d\psi = 0$$

Функция тока  $\psi$  удовлетворяет соотношению

$$(1.2) \quad d\psi = (\rho u / G) dr^2$$

где  $\rho$  — плотность,  $u$  — осевая составляющая скорости,  $G$  — расход.

Все параметры считаются безразмерными. За характерные газодинамические величины приняты критические значения плотности и скорости. Давление отнесено к произведению критической плотности на квадрат критической скорости. Величины с размерностью площади отнесены к площади минимального проходного сечения сопла.

Давление  $p_-$  на центральном теле (оси в случае сопла Лаваля) в каждом сечении сопла назовем средним давлением рассматриваемого сечения. Используя это среднее давление, по известным  $S^\circ$  и  $H^\circ$  можно определить некоторые постоянные для каждого сечения  $x$  средние значения плотности  $\rho^\circ$  и скорости  $u^\circ$  и параметры течения в каждой точке внутри исследуемого сопла представить в виде

$$(1.3) \quad \begin{aligned} p(x, \psi) &= p_-(x) + \Delta p(x, \psi), & \rho(x, \psi) &= \rho^\circ(x) + \Delta \rho(x, \psi) \\ u(x, \psi) &= u^\circ(x) + \Delta u(x, \psi) \end{aligned}$$

При малой закрутке истинные параметры в каждом сечении слабо отличаются от средних ( $\Delta p/p_- \ll 1$  и т. д.), и можно провести линеаризацию всех соотношений относительно одномерного течения с параметрами  $p_-, \rho^\circ, u^\circ$ .

Так как распределение  $p_-$  по длине центрального тела заранее неизвестно, то задача отыскания  $p(x, \psi), \rho(x, \psi)$  и  $u(x, \psi)$  сводится к определению связи средних  $p_-, \rho^\circ, u^\circ$  с известными  $p, \rho$  и  $u$  идеального одномерного незакрученного течения в том же сопле при заданных  $H^\circ$  и  $S^\circ$  и зависимости  $\Delta p, \Delta \rho$  и  $\Delta u$  от закрутки,  $\Delta S$  и  $\Delta H$ .

2. Рассмотрим радиально-уравновешенное слабозакрученное течение ( $\Gamma \ll 1$ ) с распределениями энтропии и полной энтальпии по радиусу, слабо отличающимися от равномерных ( $\Delta S/S^\circ \ll 1, \Delta H/H^\circ \ll 1$ ).

Проекция уравнения движения на радиус дает

$$(2.1) \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho \Gamma^2}{r^3}$$

Параметры  $S, H$  и  $\Gamma$  постоянны вдоль линии тока, поэтому вместо  $r$  удобно использовать функцию тока  $\psi$  (1.2). Пренебрегая квадратами малых величин, из (2.1) получим выражение для приращения давления ( $F_-$  — площадь центрального тела)

$$(2.2) \quad \Delta p = \frac{\rho^{\circ 2} u^\circ}{2} \int_0^\psi \frac{\Gamma^2(\psi)}{(\psi + \rho^\circ u^\circ F_-)^2} d\psi$$

Из-за малости величины  $\Gamma$  значения  $\rho^\circ$  и  $u^\circ$  в (2.2) можно заменить на идеальные  $\rho$  и  $u$ . Вместо циркуляции  $\Gamma$  удобно, следуя [1], ввести интегральный параметр закрутки

$$\varepsilon(x) f(x, \psi) = \int_0^\psi \left[ \int_\psi^1 \frac{\Gamma^2(\psi) d\psi}{(\psi + \rho u F_-)^2} \right] d\psi, \quad \varepsilon(x) = \int_0^1 \left[ \int_\psi^1 \frac{\Gamma^2(\psi) d\psi}{(\psi + \rho u F_-)^2} \right] d\psi$$

$$f(x, 1) = 1$$

С использованием введенного параметра (2.2) приобретает вид

$$(2.3) \quad \Delta p = \rho^2 u [f'(0) - f'(\psi)] \varepsilon / 2$$

Приращения плотности и скорости могут быть получены из заданных приращений энтропии и полной энтальпии

$$\Delta S(\psi) = S_p \Delta p + S_\rho \Delta \rho, \quad \Delta H(\psi) = \frac{\Gamma^2(\psi)}{2r^2} + h_p \Delta p + h_\rho \Delta \rho + u \Delta u$$

где параметры с индексами означают соответствующие частные производные, известные для каждого конкретного газа. Таким образом,

$$\Delta \rho = \frac{\Delta S}{S_p} + \frac{\rho^2 u}{c^2} [f'(0) - f'(\psi)] \varepsilon / 2$$

$$\Delta u = \frac{1}{u} \left[ \Delta H - \frac{h_p}{S_p} \Delta S \right] + \rho \{ [(\psi + \rho u F_-) f'(\psi)]' - f'(0) \} \varepsilon / 2$$

Известно [1-5], что наибольшее влияние закрутка оказывает на расход газа, тяга же сопла изменяется в основном благодаря уменьшению расхода. Коэффициент расхода сопла  $\mu$  определяется как отношение истинного расхода к идеальному, который пропускало бы сопло при одномерном течении без закрутки с постоянными значениями  $S^\circ$  и  $H^\circ$  во всем потоке. Интегрируя (1.2) и учитывая (1.1), получаем для произвольного сечения

$$(2.4) \quad \frac{F}{G} = \frac{1}{\rho^\circ u^\circ} \left\{ 1 + \frac{\rho}{u} [M^2 + (1 - M^2 + \rho u F_-) f'(0)] \varepsilon / 2 \right\}$$

Плотность тока  $q = \rho u$  является функцией числа Маха  $M = u/a$ . Так как по определению средние параметры течения мало отличаются от идеальных, то функцию  $q^\circ$  в минимальном сечении можно разложить в ряд по  $(M^\circ - 1)$

$$q^\circ(M^\circ) = q(1) + (M^\circ - 1) q_M(1) + (M^\circ - 1)^2 q_{MM}(1) + \dots$$

Так как  $q_M(1) = 0$ , а  $(M^\circ - 1)^2 = o(\varepsilon)$ , то при сделанных допущениях в минимальном сечении сопла  $q^\circ = q = 1$ . Благодаря выбранным характеристическим параметрам  $\mu$  численно равно расходу закрученного течения  $\mu = G$ . Поэтому из (2.4) следует

$$(2.5) \quad \mu = 1 - [1 + (F_-) f'(0)] \varepsilon / 2$$

Для сопла без центрального тела последнее выражение приобретает особенно простой вид:

$$(2.6) \quad \mu = 1 - \varepsilon / 2$$

который с учетом различия в выборе характеристических параметров для приведения величин к безразмерному виду совпадает с соответствующим выражением, полученным в [1]. Здесь параметр закрутки

$$\varepsilon = \int_0^1 \left[ \int_\psi^1 \frac{\Gamma^2(\psi)}{\psi^2} d\psi \right] d\psi$$

уже не зависит от сечения, в котором он определяется.

Для того чтобы перейти от неизвестных  $p_-$ ,  $\rho^\circ$  и  $u^\circ$  к известным идеальным  $p$ ,  $\rho$  и  $u$ , представим средние значения параметров в виде

$$(2.7) \quad p_- = p + \frac{dp}{dq} \Delta q, \quad \rho^\circ = \rho + \frac{d\rho}{dq} \Delta q, \quad u^\circ = u + \frac{du}{dq} \Delta q$$

где  $\Delta q = q^\circ - q$ , причем для сверхкритических режимов из условия сохранения расхода в каждом сечении  $q = 1/F$ . Из (2.4) с учетом (2.5) получим

$$\Delta q = \rho u \left( \frac{\rho}{u} A \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right), \quad A = A(x) = M^2 + (1 - M^2 + \rho u F_-) f'(0)$$

$A_*$  — значение  $A$  в минимальном сечении сопла  $A_* = 1 + (F_-)_* f'(0)$ .

Соответствующие производные от  $p$ ,  $\rho$  и  $u$  в (2.7) могут быть найдены с использованием уравнения Эйлера

$$\frac{dp}{dq} = \frac{u}{M^2 - 1}, \quad \frac{d\rho}{dq} = \frac{M^2}{u(M^2 - 1)}, \quad \frac{du}{dq} = \frac{1}{\rho(1 - M^2)}$$

После чего из выражений (1.3) определяются давление, плотность и скорость слабозакрученного и слабонервномерного течения в любой

точке  $\psi$  произвольного сечения сопла с центральным телом через параметры идеального одномерного течения в том же сопле

$$\begin{aligned}
 (2.8) \quad p(x, \psi) &= p + \frac{\rho u^2}{M^2 - 1} \left( \frac{\rho}{u} A^p \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right) \\
 \rho(x, \psi) &= \rho + \frac{\Delta S(\psi)}{S_p} + \frac{\rho M^2}{M^2 - 1} \left( \frac{\rho}{u} A^p \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right) \\
 u(x, \psi) &= u + \frac{1}{u} \left[ \Delta H(\psi) - \frac{h_p}{S_p} \Delta S(\psi) \right] - \\
 &\quad - \frac{u}{M^2 - 1} \left( \frac{\rho}{u} A^u \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right) \\
 A^p &= A^p(x, \psi) = M^2 + (1 - M^2) f'(\psi) + \rho u F_- f'(0) \\
 A^u &= A^u(x, \psi) = M^2 + (1 - M^2) [(\psi + \rho u F_-) f'(\psi)]' + \rho u F_- f'(0)
 \end{aligned}$$

Для сопла без центрального тела  $F_- = (F_-)_* = 0$ ,  $A_* = 1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_*$ . Распределения параметров вдоль образующей центрального тела и вдоль стенки сопла получаются из (2.8), если положить  $\psi$  равным 0 или 1. Соотношения (2.8) можно использовать для расчета параметров течения в любом сечении сопла, кроме минимального, так как в этом случае в их правых частях возникает неопределенность типа 0:0. Раскрывая ее, получаем распределения давления, плотности и скорости в минимальном сечении сопла

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad p_*(\psi) &= p_* + A_*^p \frac{\varepsilon_*}{2}, \quad \rho_*(\psi) = 1 + \frac{\Delta S(\psi)}{S_p} + A_*^p \frac{\varepsilon_*}{2}, \\
 u_*(\psi) &= 1 + \left[ \Delta H(\psi) - \frac{h_p}{S_p} \Delta S(\psi) \right] - A_*^u \varepsilon_*/2. \\
 A_*^p &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)^{-1} \right]^{-1} - f'(\psi) - \left\{ F_- \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)^{-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{dF_-}{dx} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right) \frac{d^2 F}{dx^2} \right]^{-1/2} \right\} f'(0) \\
 A_*^u &= \left[ 1 + \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)^{-1} \right]^{-1} - [(\psi + F_-) f'(\psi)]' - \\
 &\quad - \left\{ F_- \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right)^{-1} + \frac{dF_-}{dx} \left[ 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 p}{d\rho^2} \right) \frac{d^2 F}{dx^2} \right]^{-1/2} \right\} f'(0)
 \end{aligned}$$

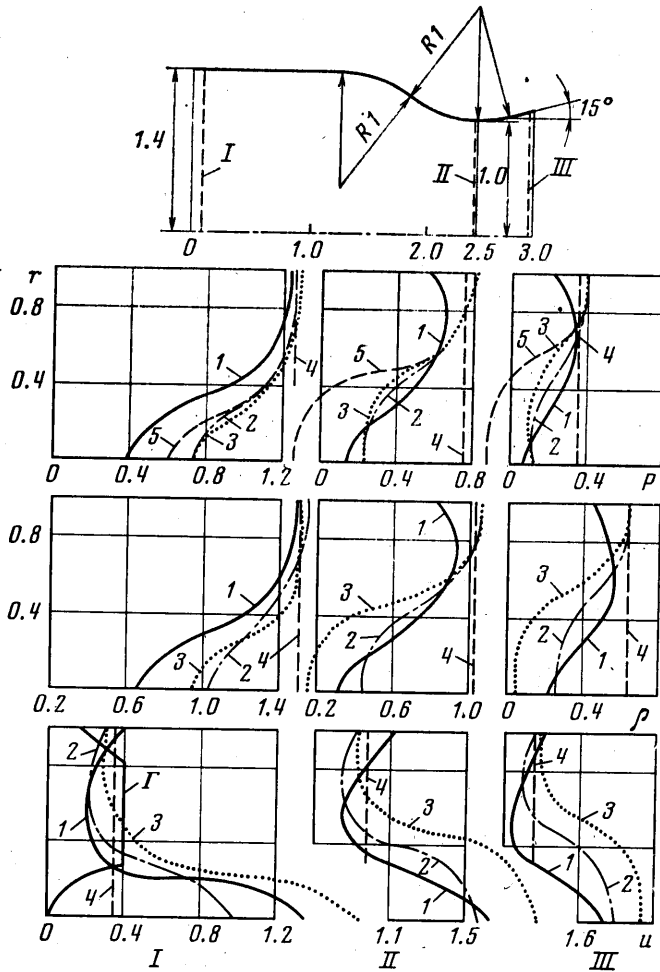
Полный импульс потока в произвольном сечении сопла имеет вид  $J = \mu I =$   
 $= \mu \int_0^1 [u + p/(\rho u)] d\psi$ , где  $I$  — удельный импульс (импульс, соответствующий единице расхода). Используя (2.8), получаем для полного  $J^\psi$  и удельного  $I^\psi$  импульсов закрученного потока

$$J^\psi = J - u \left( \frac{\rho}{u} A^i \frac{\varepsilon}{2} + A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right), \quad I^\psi = I - \frac{p}{\rho u} \left( \frac{\rho^2 u}{p} A^i \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right)$$

где  $A^i = 1 + \rho u F_- f'(0)$ , а  $J$  и  $I$  — импульсы идеального одномерного потока в рассматриваемом сечении. Для сопла без центрального тела  $J^\psi = J - (\rho + u)\varepsilon/2$ ,  $I^\psi = I - [\rho - p/(\rho u)]\varepsilon/2$ .

3. Представляет интерес определение ошибок, получающихся при использовании полученных соотношений для расчета течений, в которых закрутку уже нельзя считать слабой. Для такой оценки были рассчитаны параметры течения в сопле, геометрические размеры которого показаны

в верхней части фиг. 1, с граничными условиями варианта 7 из [2]. Задаваемый на входе в сопло профиль циркуляции  $\Gamma$  в этом варианте (сплошная жирная линия на нижнем левом графике фиг. 1) состоял из трех частей: середина профиля — потенциальное течение с постоянной циркуляцией  $\Gamma=0.4$ , к стенке — линейное уменьшение циркуляции до значения



Фиг. 1

$\Gamma=0.15$ , в ядре — закрутка по закону твердого тела с параболическим распределением  $\Gamma$  по радиусу. Коэффициент расхода сопла при таком течении, как было показано в [2], уменьшался из-за закрутки на  $\sim 17\%$ .

С увеличением закрутки уравнения (2.8) перестают быть справедливыми. Поэтому проведенные по ним расчеты не должны давать тех же результатов, что и расчеты, например, по первому из уравнений (2.8), дополненному условиями постоянства  $S$  и  $H$  вдоль струек тока. С увеличением закрутки растет ошибка, возникающая при линеаризации от замены  $\rho$  в коэффициенте при  $\epsilon$  на его идеальное, постоянное по сечению значение. С другой стороны, отношение  $\rho/\rho$  изменяется по радиусу меньше, чем каждый из этих параметров в отдельности. Поэтому может оказаться целесообразным заменить первое из уравнений (2.8) на

$$(3.1) \quad p(\psi) = \rho e^{\Delta p}$$

которое получается, если перед интегрированием обе части (2.1) разделить на  $p$ . Здесь

$$\Delta p = \frac{\rho u^2}{p(M^2-1)} \left( \frac{\rho}{u} A^p \frac{\varepsilon}{2} - A_* \frac{\varepsilon_*}{2} \right)$$

На фиг. 1 изображены рассчитанные разными способами распределения  $p$ ,  $\rho$  и  $u$  по радиусам. Здесь радиусы отнесены к местным радиусам стенки в трех сечениях сопла: начальном (I), близком к минимальному (II) и выходном (III). Сплошными линиями 1 нанесены профили из [2], полученные в результате «точного» расчета; штрихпунктирными линиями 2 — полученные в результате расчетов по формуле (3.1), дополненной условием адиабатичности и интегралом Бернулли. Для сравнения был проведен расчет, где вместо условия адиабатичности и интеграла Бернулли использовались две последние формулы из (2.8). Его результаты изображены пунктирными линиями 3. Вертикальными штриховыми линиями 4 нанесены идеальные значения соответствующих параметров, полученные из одномерного расчета без учета закрутки. Наконец, на графиках  $p(r)$  штриховыми линиями 5 нанесены профили давления, рассчитанные по формуле (2.8).

Сравнение всех кривых показывает, что лучшее приближение к точным распределениям параметров дал расчет по формуле (3.1), дополненной условием адиабатичности и интегралом Бернулли. Использование же при сравнительно сильных закрутках первой формулы (2.8) может привести к физическому противоречию — образованию приосевой области с отрицательным давлением.

4. Соотношения (2.8) получены при условии  $q=1/F$  для сверхкритических перепадов давления в сопле. В случае докритических перепадов давление на стенке выходного сечения сопла равно  $p_B$  — давлению среды, в которую происходит истечение. Полагая  $\psi=1$ , из (2.3) можно определить связь между давлением на стенке и давлением  $p_-$  на центральном теле. Идеальные значения плотности и скорости в выходном сечении определяются через  $p_B$  из условия адиабатичности и интеграла Бернулли по известным  $S^\circ$  и  $H^\circ$ . В результате получаем  $p(\psi) = p_B - Qf'(\psi)\varepsilon/2$ , где  $Q = Q(p_B, S^\circ, H^\circ) = [2H^\circ - h(p_B, S^\circ)]^{1/2} [\rho(p_B, S^\circ)]^2$

Откуда

$$\Delta p(\psi) = \frac{\Delta S(\psi)}{S_p} + \frac{Q}{a^2} [f'(0) - f'(\psi)] \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Delta u(\psi) = \frac{1}{u} \left[ \Delta H(\psi) - \frac{h_p}{S_p} \Delta S(\psi) \right] +$$

$$+ \rho \{ [(\psi + \rho u F_-) f'(\psi)]' - f'(0) \} \frac{\varepsilon}{2}$$

Связи между идеальными и средними значениями плотности и скорости находятся из очевидных соотношений  $\rho^\circ = \rho + (\partial\rho/\partial p)\delta p$  и  $u^\circ = u + (\partial u/\partial p)\delta p$ , где  $\delta p = p_- - p_B = -Qf'(0)\frac{\varepsilon}{2}$ . Выражения для распределения  $\rho$  и  $u$  в выходном сечении сопла принимают вид

$$\rho(\psi) = \rho + \frac{\Delta S}{S_p} - \frac{Q}{a^2} f'(\psi) \frac{\varepsilon}{2}, \quad u(\psi) = u + \frac{1}{u} \left[ \Delta H - \frac{h_p}{S_p} \Delta S \right] +$$

$$+ \rho [(\psi + \rho u F_-) f'(\psi)]' \frac{\varepsilon}{2}$$

Истинный расход газа определяется интегрированием (1.2) по выходному сечению сопла. При определении идеального расхода учитывается,

что истечение происходит в среду с давлением  $p_B$ . В результате выражение для коэффициента расхода имеет вид

$$(4.1) \quad \mu = 1 - \frac{\rho}{u} [M^2 + \rho u F - f'(0)] \frac{\varepsilon}{2}$$

Полный и удельный импульсы в выходном сечении сопла равны

$$J^* = J - \rho^2 u F (M^2 + 1) \varepsilon / 2 \quad \text{и} \quad I^* = I - (\rho - p_B / a^2) \varepsilon / 2$$

Для нахождения распределения параметров течения в произвольном сечении выражения для  $\rho$  и  $u$  из (1.3) преобразуются к виду, правая часть которого зависит от давления на центральном теле рассматриваемого сечения. Связь последнего с давлением окружающей среды находится с помощью уравнения неразрывности.

5. Рассмотрим течение совершенного газа в сопле Лавала. Вместо  $p_B$  удобно ввести отношение давлений  $\pi = p_0 / p_B$  ( $p_0$  — среднее полное давление, соответствующее  $S^0$  и  $H^0$ ).

Тогда (4.1) приобретает вид

$$(5.1) \quad \mu = 1 - k(\pi) \varepsilon / 2, \\ k(\pi) = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{(2-\kappa)/(\kappa-1)} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{(2-\kappa)/\kappa} \left\{ \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left[ 1 - \left( \frac{1}{\pi} \right)^{(\kappa-1)/\kappa} \right] \right\}^{1/2}$$

Зависимость  $k(\pi)$ , изображенная справа вверху на фиг. 2, показывает, что на докритических режимах при уменьшении  $\pi$  снижается влияние закрутки на коэффициент расхода сопла.

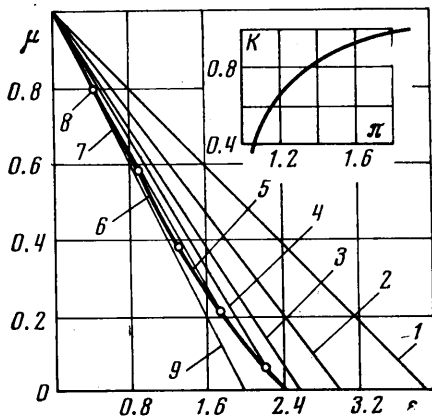
С увеличением  $\pi$  расход в сопле при заданной закрутке увеличивается до своей максимальной величины. Давление на стенке минимального сечения  $p_*(1)$  при этом достигает критического значения. Введя критическое отношение давлений  $\pi^* = p_0 / p_*(1)$ , из (2.9) получим

$$(5.2) \quad \pi^* = \left( \frac{\kappa + 1}{2} \right)^{\kappa/(\kappa-1)} \left( 1 - \kappa \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Таким образом, при закрутке запырирование сопла происходит раньше, чем в соответствующем течении без закрутки.

На фиг. 2 изображены зависимости (5.1) для значений  $\pi$  от 1.1 (прямая 1) до 1.8 (прямая 8) с шагом 0.1 и зависимость (2.6) (прямая 9). Как следует из (5.2), каждая из прямых (5.1) должна быть ограничена тем значением  $\varepsilon$ , при котором для заданного  $\pi$  сопло запирается. Линия, соединяющая эти конечные точки (жирная кривая на фиг. 2), так же как и прямая (2.6), представляет собой зависимость  $\mu(\varepsilon)$  для сверхкритических режимов течения в сопле. Так как эта кривая получена в рамках той же линейной теории, то расхождение между ними характеризует точность применения линейной теории.

6. Проведенные исследования могут быть обобщены на случай слабозакрученного течения с произвольной (возможно, сильной) неравномерностью параметров торможения по струйкам тока. Для этого вначале рассмотрим течение без закрутки ( $\Gamma \equiv 0$ ) при произвольном распределении  $S(\varphi)$  и  $H(\varphi)$ . Если обводы сопла достаточно плавные, то с большой сте-



Фиг. 2

пенью точности можно считать, что в любом сечении сопла давление постоянно, т. е.  $p=p(x)$ . По аналогии с одномерным случаем можно ввести среднюю плотность тока  $q=G/F$ , которая находится в каждом сечении интегрированием (1.2). Используя известные  $S(\psi)$  и  $H(\psi)$ , можно в функциональных зависимостях плотности и скорости заменить  $x$  на  $p$

$$(6.1) \quad \rho=\rho(p, \psi), \quad u=u(p, \psi)$$

и выразить  $q$  в виде функции от  $p$ .

Введем параметр

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{q} \right) = - \int_0^1 \frac{1}{\rho^2 u^2} \left[ u \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\psi} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial p} \right)_{\psi} \right] d\psi = \\ &= \int_0^1 \frac{1-M^2}{\rho^2 u^3} d\psi \end{aligned}$$

Для стационарного течения  $q$  максимально в минимальном сечении сопла, т. е.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{q} \right) = \frac{F'}{G} = \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{q} \right) \frac{dp}{dx} = \chi \frac{dp}{dx} = 0$$

При докритических режимах течения в сопле последнее равенство достигается за счет экстремума в минимальном сечении  $p(x)$ , при сверхкритических режимах, когда функция  $p(x)$  изменяется вдоль  $x$  монотонно, — должно достигаться за счет равенства нулю  $\chi$ . Для произвольного сечения  $dp/dx = F'/(G\chi)$ . Поскольку при каждом давлении окружающей среды расход в сопле фиксирован, направление изменения  $p$  по  $x$  определяется знаком отношения  $F'/\chi$ . Поэтому, при сверхкритическом течении газа с произвольным поперечным распределением параметров торможения в сопле с плавными обводами поток в сечении с  $\chi > 0$  можно назвать в среднем дозвуковым, с  $\chi = 0$  — в среднем звуковым, а с  $\chi < 0$  — в среднем сверхзвуковым.

Таким образом, условие равенства  $\chi$  нулю в минимальном сечении есть условие запираания сопла. Оно является обобщением известного условия запираания на случай газа с произвольными термодинамическими свойствами. Первоначально условие запираания для двух одномерных потоков совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями было получено в [6], анализировалось для различных условий их совместного течения А. Н. Крайко (1959 г.), использовалось в [7] и в более общем виде (совершенный газ с постоянными удельными теплоемкостями, произвольное поперечное распределение параметров торможения) — в [8].

Из условия запираания определяется давление в минимальном сечении. Затем, в том же сечении по найденному давлению, — распределение плотности и скорости и, наконец, расход газа. Уравнение неразрывности позволяет после этого определить распределение давления по всему соплу, а значит, согласно (6.1), распределение параметров течения во всем потоке.

Назовем полученные  $p(x)$ ,  $\rho(x, \psi)$ ,  $u(x, \psi)$  идеальными значениями давления, плотности и скорости и наложим на рассмотренное течение слабую закрутку  $\Gamma \ll 1$ . Далее, подобно тому как это было сделано при получении (2.8), вводимся средние  $p_-(x)$ ,  $\rho^o(x, \psi)$  и  $u^o(x, \psi)$  и находится их связь с известными идеальными значениями этих параметров и зависимости от них и от закрутки величин  $\Delta p$ ,  $\Delta \rho$  и  $\Delta u$ . Интенсивность закрутки в



этом случае оценивается функцией

$$E\Phi(x, \psi) = \int_0^{\psi} \left[ \int_{\psi}^1 \frac{\rho^2 u \Gamma^2}{(\psi + \rho u F_-)^2} d\psi \right] d\psi$$

$$E(x) = \int_0^1 \left[ \int_{\psi}^1 \frac{\rho^2 u \Gamma^2}{(\psi + \rho u F_-)^2} d\psi \right] d\psi$$

Здесь множитель  $E$  обращает функцию  $\Phi$  в единицу на стенке сопла.

При нахождении  $\mu$  для сверхкритических режимов следует использовать разложение  $q^\circ$  в ряд в минимальном сечении не по  $(M^\circ - 1)$ , а по  $\chi$ .

7. Использование линейных соотношений для расчета течения с неравномерным распределением  $S$  и  $H$  наталкивается на трудность оценки точности полученных результатов при таких интенсивностях закрутки, когда ее уже нельзя считать малой, так как для такого течения нет эталона, по которому можно было бы проводить сравнение. Однако имеется частный вид неравномерных по  $S$  и  $H$  течений, параметры которых могут быть приведены в соответствие параметрам некоторых эквивалентных им течений с постоянными  $S$  и  $H$ .

Можно показать [9, 10], что если в потоке с переменными по струйкам тока  $S$  и  $H$  произведение  $\rho_*(\psi) a_{*2}^2(\psi) = \text{const}$  во всем течении, что в случае совершенного газа эквивалентно постоянству во всем потоке полного давления, то система уравнений, описывающая это течение, может быть приведена к виду

$$\text{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \quad (\mathbf{V} \text{ grad}) \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

который соответствует системе для установившегося течения идеального газа с постоянными  $S$  и  $H$  во всем потоке. При этом за характерные параметры при приведении к безразмерному виду должны быть взяты местные значения критической скорости  $a_*(\psi)$  и критической плотности  $\rho_*(\psi)$ . Таким образом, если имеется два течения — одно с неравномерным распределением  $S$  и  $H$ , другое с равномерным и таким, что  $\rho_*(\psi) a_{*2}^2(\psi) = \rho_*^\circ a_{*2}^{\circ 2}$ , то при одинаковых граничных условиях распределение всех параметров течения у этих потоков будет одинаковым. При этом, в первом случае, плотность, скорость и давление в каждой точке отнесены к местным значениям  $\rho_*(\psi)$ ,  $a_*(\psi)$  и  $\rho_*(\psi) a_{*2}^2(\psi)$ . Все сказанное в равной мере может быть отнесено и к соответствующим закрученным течениям и может быть использовано для апробации приближенных методов расчета течений с переменными  $S$  и  $H$  путем сравнения с точным решением для эквивалентных им известных течений с постоянными  $S$  и  $H$ . Физические (размерные) характеристики этих двух сравниваемых потоков при их течении в заданном сопле должны отвечать следующим требованиям: в каждом рассматриваемом сечении сопла профили статических давлений у двух потоков должны совпадать; отношение плотностей и отношения компонент скорости двух потоков в каждой точке течения должны быть равны отношениям соответствующих критических параметров в этих же точках.

Автор благодарит А. Н. Крайко за постановку задачи и помощь в работе и выражает признательность Г. Г. Черному за обсуждение результатов.

Поступила 27 XII 1974

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Закрученные течения сжимаемого газа в каналах. Изв. АН СССР. ОТН, 1956, № 6.
2. Славянов Н. Н. Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавалья. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6.
3. Mager A. Approximate solution of isentropic swirling flow through a nozzle. ARS Journal, 1961, vol. 31, No. 8.
4. Lewellen W. S., Burns W. J., Strickland H. J. Transonic swirling flow. AIAA Journal, 1969, vol. 7, No. 7.
5. Гостинцев Ю. А. Расходные характеристики сопла при истечении винтового потока газа. Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4.
6. Pearson H., Holliday J. B., Smith S. F. A theory of the cylindrical ejector supersonic propelling nozzle. J. Roy. Aeronaut. Soc., 1958, vol. 62, No. 574.
7. Hoge H. J., Segars R. A. Choked flow: A generalization of the concept and some experimental data. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 12.
8. Зимонт В. Л. Некоторые неравенства, справедливые при неравномерных течениях в сверхзвуковых соплах. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 2.
9. Munk M. M., Prim R. C. On the canonical form of the equations of steady motion of a perfect gas. J. Appl. Phys., 1948, vol. 19, No. 10.
10. Таганов Г. И. Выравнивающее действие сетки в потоках жидкостей и газов. Тр. ЦАГИ, 1947, № 604.