

## МОДЕЛЬНОЕ КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ГАЗА С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

В. А. РЫКОВ

(Москва)

В работе получено модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы. Осреднением функции распределения по величинам, отвечающим вращательным степеням свободы, это уравнение сведено к замкнутой системе двух кинетических уравнений, каждое из которых аналогично кинетическому уравнению для одноатомного газа.

1. Модельные кинетические уравнения для одноатомного газа дают результаты, удовлетворительно согласующиеся как с экспериментом, так и с решением уравнения Больцмана [1].

Модельное кинетическое уравнение для двухатомного газа, учитывающее вращательные степени свободы, получено в работе [2]. Недостатком этого уравнения является то, что оно содержит ограниченное число произвольных параметров и поэтому не может правильно описывать релаксацию всех неравновесных моментов, которые входят в уравнения макроскопического движения газа. Например, таким моментом является поток вращательной энергии. При построении модели кинетического уравнения для двухатомного газа, не содержащей отмеченных недостатков, будем следовать методике [3].

Будем предполагать, что температура газа не слишком высока, так что колебательные степени свободы не возбуждены, и не слишком низка, так что вращательные степени свободы можно рассматривать классически.

Вращательное состояние линейной молекулы с массой  $m$  и моментом инерции  $J$  удобно характеризовать тремя компонентами собственного момента импульса  $M_i$  и углом  $\psi$ , характеризующим ориентацию молекулы в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{M}$ . Такое описание состояния молекулы возможно потому, что вектор  $\mathbf{M}$  не имеет компоненты, направленной вдоль оси симметрии молекулы (вращательное движение вокруг этой оси не возбуждено) и поэтому он лежит в плоскости, перпендикулярной оси симметрии. При свободном движении молекулы вектор  $\mathbf{M}$  остается постоянным как по величине, так и по направлению, а угол  $\psi$  с течением времени меняется линейно.

Период изменения  $\psi$  можно оценить, например, по состоянию равновесия, приравняв средние энергии, приходящиеся на одну поступательную и одну вращательную степени свободы

$$(1.1) \quad \frac{1}{3} \frac{m \langle \xi \rangle^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{\langle M \rangle^2}{2J}$$

Здесь  $\langle \xi \rangle$  и  $\langle M \rangle$  означают соответственно средние значения скорости поступательного движения молекулы и собственного момента импульса молекулы. Так как

$$\langle M \rangle = J \langle \omega \rangle$$

Из (1.1) получим

$$(1.2) \quad \frac{1}{3} \frac{m \langle \xi \rangle^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{J \langle \omega \rangle^2}{2}$$

Здесь  $\langle \omega \rangle$  — средняя угловая скорость вращения молекулы.

Величина  $J$  имеет порядок  $m\delta^2$ , где  $\delta$  — линейный размер молекулы. Поэтому из (1.2) следует, что  $\langle \omega \rangle \sim \langle \xi \rangle / \delta$ . Период изменения  $\psi = 2\pi / \langle \omega \rangle \sim \delta / \langle \xi \rangle$ , что составляет время пролета молекулы со скоростью  $\langle \xi \rangle$  расстояния, равного размеру молекулы, т. е. это есть величина, равная времени соударения. Так как функция распределения не меняется на таких временах, можно считать, что она не зависит от  $\psi$ . Относительно угла  $\psi$  естественно предположить, что он является дополнительным прицельным параметром с равновероятным распределением своих значений. Таким образом, состояние двухатомного газа можно задавать при помощи функции распределения  $f(t, \mathbf{r}, \xi, \mathbf{M})$ , зависящей от вектора скорости центра инерции молекулы  $\xi$  и момента импульса  $\mathbf{M}$ .

При столкновении двухатомных молекул появляется новый инвариант столкновений, который представляет собой полный момент импульса молекулы  $\mathbf{K}$  и складывается из момента импульса центра инерции молекулы и собственного момента импульса молекулы при ее вращательном движении вокруг центра инерции

$$\mathbf{K} = m[\mathbf{r} \times \xi] + \mathbf{M} = m[\mathbf{r} \times \xi] + J\omega$$

Если, как это обычно бывает,  $\omega \sim \langle \xi \rangle / \delta$  и  $J \sim m\delta^2$ , то  $J\omega \sim m\delta \langle \xi \rangle$ . Величина  $|m[\mathbf{r} \times \xi]| \sim mL \langle \xi \rangle$ , где  $L$  — макроскопический размер. Поэтому собственный момент импульса в  $\delta/L$  раз меньше момента импульса центра инерции частицы. Это означает, что при подсчете полного момента импульса газа величиной собственного момента импульса можно пренебрегать [4].

При отсутствии внешних электрических и магнитных полей, способных вызывать у частиц значительную преимущественную ориентацию векторов  $\mathbf{M}$ , локально равновесная функция распределения имеет вид [5]

$$f^{(0)}(t, \mathbf{r}, \xi, \mathbf{M}) = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\xi - \mathbf{U})^2}{2kT} \right] (4\pi JkT)^{-1} \exp \left( -\frac{\mathbf{M}^2}{2JkT} \right)$$

Здесь  $n$  — плотность частиц,  $T$  — температура,  $\mathbf{U}$  — макроскопическая скорость.

Модельное кинетическое уравнение для функции распределения  $f(t, \mathbf{r}, \xi, \mathbf{M})$  запишем в форме

$$(1.3) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = \nu_r (f^r - f) + \nu_i (f^i - f)$$

Здесь, как и в [2], принято, что интеграл столкновений состоит из двух частей, соответствующих упругим и неупругим столкновениям (индекс  $t$  относится к упругим, индекс  $r$  к неупругим). Величины  $\nu_i$  и  $\nu_r$  представляют частоты столкновений, которые зависят от макропараметров газа и не зависят от  $\xi$  и  $\mathbf{M}$ ;  $f^i$  и  $f^r$  — функции распределения частиц, испытавших упругое и неупругое столкновения соответственно. Так как  $\nu_r$  и  $\nu_i$  не зависят от  $\mathbf{M}$ , то уравнение (1.4) допускает осреднение по направлениям  $\mathbf{M}$ . Умножая уравнение (1.3) на  $1/4\pi$  и интегрируя по телесному углу вектора  $\mathbf{M}$ , получим

$$(1.4) \quad \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \xi \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{r}} = \nu_i (\hat{f}^i - \hat{f}) + \nu_r (\hat{f}^r - \hat{f})$$

$$\hat{f}(t, \mathbf{r}, \xi, M) = \frac{1}{4\pi} \int f(t, \mathbf{r}, \xi, M) d\Omega_M$$

$$\hat{f}^i = \frac{1}{4\pi} \int f^i d\Omega_M, \quad \hat{f}^r = \frac{1}{4\pi} \int f^r d\Omega_M$$

Всюду далее значок  $\wedge$  у функций  $\hat{f}$  и  $\hat{f}^i$  будем опускать.

Вместо переменной  $M$  в дальнейшем удобнее пользоваться величиной  $e = M^2/2J$ , которая имеет смысл энергии вращательного движения частицы относительно ее центра инерции. Тогда функция распределения нормируется соотношением

$$dn = f(t, \mathbf{r}, \xi, e) d\mathbf{r} d\xi de$$

Здесь  $dn$  — количество частиц, содержащихся в момент времени  $t$  в объеме  $d\mathbf{r}$  около точки  $\mathbf{r}$  со скоростями, принадлежащими элементу  $d\xi$  около точки  $\xi$ , и вращательными энергиями из интервала  $[e, e+de]$ .

Для вычисления макроскопических параметров, входящих в уравнения сплошной среды двухатомного газа, достаточно знания осредненной по направлениям функции распределения  $f(t, \mathbf{r}, \xi, e)$ . Макропараметры определяются соотношениями

$$n = \int f de d\xi, \quad U_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f de d\xi$$

$$\frac{3}{2} kT_i = \frac{1}{n} \int \frac{mc^2}{2} f de d\xi, \quad P_{ij} = \int mc_i c_j f de d\xi$$

$$\varepsilon = kT_r = \frac{1}{n} \int e f de d\xi, \quad q_i^t = \int c_i \frac{mc^2}{2} f de d\xi$$

$$q_i^r = \int c_i e f de d\xi, \quad q_i = q_i^t + q_i^r$$

Здесь  $n$  — плотность частиц,  $U_i$  — компоненты макроскопической скорости,  $T_i$  — поступательная температура, или средняя энергия поступательных степеней свободы частицы,  $P_{ij}$  — тензор напряжений,  $\varepsilon$  — средняя энергия вращательных степеней свободы,  $q_i^t$  — компоненты потока тепла, связанного с поступательными степенями свободы,  $q_i^r$  — компоненты потока тепла, обусловленного переносом вращательной энергии частиц; полный поток тепла  $\mathbf{q}$  равен сумме потоков  $\mathbf{q}^t$  и  $\mathbf{q}^r$ ;  $c_i = \xi_i - U_i$ ,  $c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ .

Полная средняя энергия частицы  $E$  определяется выражением

$$E = \frac{3}{2} kT_i + \varepsilon = \frac{1}{n} \int \left( \frac{mc^2}{2} + e \right) f de d\xi$$

В равновесии, когда наступает равномерное распределение энергии по всем пяти степеням свободы, имеем

$$(1.5) \quad 5 \frac{kT}{2} = \frac{3}{2} kT_i + \varepsilon = \frac{1}{n} \int \left( \frac{mc^2}{2} + e \right) f de d\xi$$

Равенство (1.5) определяет температуру двухатомного газа  $T$  и в неравновесном случае.

Локально равновесная функция распределения, записанная в новой переменной  $e$ , имеет вид

$$(1.6) \quad f^{(0)} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mc^2/2kT) (kT)^{-1} \exp(-e/kT)$$

Удельная теплоемкость при постоянном объеме  $c_v$  для рассматриваемого газа определяется выражением  $c_v = d(E/m)/dT$  или

$$c_v = d\left(\frac{5}{2} \frac{k}{m} T\right) / dT = \frac{5}{2} \frac{k}{m}$$

Удельная теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  находится из соотношения  $c_p - c_v = k/m$ . Отсюда  $c_p = 7k/2m$ . Отношение удельных теплоемкостей  $c_p/c_v = \kappa = 7/5$ , что совпадает с известным результатом для двухатомного газа.

Выбор конкретных выражений для величин  $v_i$ ,  $v_r$ ,  $f^i$  и  $f^r$  в уравнении (1.4) определяет конкретную модель кинетического уравнения для двухатомного газа.

Перепишем уравнение (1.4) в виде

$$(1.7) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = v_r f^r + v_i f^i - f(v_r + v_i)$$

Выражение  $f(v_r + v_i)$  представляет собой количество столкновений, которое происходит в единице объема фазового пространства  $(\mathbf{r}, \xi, e)$  за единицу времени. Величина  $v = v_i + v_r$  является частотой столкновений. Будем предполагать, что частота столкновений определяется плотностью частиц, поступательной температурой, величиной эффективного сечения частиц и не зависит от того, какова энергия вращательного движения молекул. Поэтому частоту столкновений  $v = v_i + v_r$  определим аналогично тому, как это делается для одноатомного газа, положив

$$(1.8) \quad v_r + v_i = p_i / \mu_i, \quad p_i = nkT_i$$

где  $p_i$  — давление, определенное по поступательной температуре,  $\mu_i = \mu(T_i)$  — вязкость двухатомного газа, зависящая от поступательной температуры  $T_i$ . Частота  $v = v_i + v_r$  зависит от поступательной температуры  $T_i$ , так как именно температура  $T_i$  характеризует среднюю относительную скорость сталкивающихся частиц, а не температура  $T$ . В состоянии равновесия  $T_i = T$ .

Из (1.8) находим, что  $v_i = p_i / \mu_i - v_r$ .

Из (1.7) получим

$$(1.9) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = v_r (f^r - f) + \left(\frac{p_i}{\mu_i} - v_r\right) (f^i - f)$$

Величина  $v_r$  прямо пропорциональна плотности частиц  $n$ , поэтому отношение  $Z = v_i / v_r$  может быть функцией только поступательной и вращательной температур. Отношение  $Z$  показывает, сколько столкновений приходится на одно вращательное столкновение. В работе [6] приведены для азота и кислорода зависимости  $Z$  от величин  $T_i$  и  $T_r$ , как рассчитанные теоретически, так и полученные из эксперимента. Величину  $v_r$  теперь можно записать в виде

$$(1.10) \quad v_r = \frac{p_i}{\mu_i} \frac{1}{Z}$$

При установлении приближенного вида интеграла столкновений потребуем, чтобы в задаче о релаксации функция распределения релаксировала к равновесной функции (1.6) и чтобы правильно релаксировали все неравновесные макроскопические моменты, входящие в уравнения сплошной среды. К таким моментам относятся

$$p_{ij} = P_{ij} - p_i \delta_{ij}, \quad p_i - p = nk(T_i - T), \quad q_i^t, \quad q_i^r$$

Так как только неупругие столкновения приближают функцию распределения к равновесной функции (1.6), то главным членом в выражении функции  $f'$  должна быть равновесная функция распределения. Поэтому  $f'$  разложим около равновесной функции (1.6) в ряд по ортогональным многочленам от переменных  $c_i$ ,  $e$  и таким, которые отвечают моментам  $q_i^r$  и  $q_i^i$ . Чтобы получить представление о виде функции  $f'$ , изучим процесс релаксации газа в предположении, что столкновения являются упругими и вращательные степени свободы заморожены.

2. Уравнение Больцмана, описывающее релаксацию газа с замороженными вращательными степенями свободы, выводится аналогично тому, как это делается для газа, обладающего только поступательными степенями свободы. Оно имеет вид

$$(2.1) \quad \frac{\partial f(t, \xi, e)}{\partial t} = \iiint \iiint [f(t, \xi_1', e_1) f(t, \xi', e) - f(t, \xi, e) f(t, \xi_1, e_1)] g b db de d\xi_1 de_1$$

где  $\xi_1'$  и  $\xi'$  выражаются через  $\xi_1$ ,  $\xi$  и прицельные параметры  $b$  и  $e$  по обычным формулам теории упругого столкновения частиц.

Аналогично [7] для правой части (2.1) можно доказать следующие тождества:

$$(2.2) \quad \int \Phi J de d\xi = \frac{1}{2} \int (\Phi_1' + \Phi' - \Phi_1 - \Phi) f f_1 g b db de d\xi_1 de_1 d\xi de$$

$$(2.3) \quad \int \Phi J de d\xi = -\frac{1}{4} \int (\Phi_1' + \Phi' - \Phi_1 - \Phi) (f_1' f' - f f_1) g b db de d\xi_1 de_1 d\xi de$$

Здесь  $J$  — правая часть уравнения (2.1);  $f = f(t, \xi, e)$ ,  $f_1 = f(t, \xi_1, e_1)$ ,  $f_1' = f(t, \xi_1', e_1)$ ,  $f' = f(t, \xi', e)$ ,  $\Phi = \Phi(t, \xi, e)$ ,  $\Phi_1 = \Phi(t, \xi_1, e_1)$ ,  $\Phi_1' = \Phi(t, \xi_1', e_1)$ .

Момент от правой части интеграла столкновений равен нулю, если

$$(2.4) \quad \Phi_1' + \Phi' - \Phi_1 - \Phi = 0$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$(2.5) \quad \Phi = A(e) + B_i \xi_i + C \xi_i^2$$

где  $A(e)$  — произвольная функция,  $B_i$  и  $C$  — произвольные постоянные.

Если (2.1) умножить на  $(1 + \ln f)$  и проинтегрировать по  $\xi$  и  $e$ , то после применения (2.3) для преобразования правой части приходим к  $H$  — теореме:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{4} \int \ln \frac{f_1' f'}{f_1 f} (f_1' f' - f_1 f) g b db de d\xi_1 de_1 d\xi de$$

$$H = \int f \ln f d\xi de$$

При  $t \rightarrow \infty$   $\partial H / \partial t \rightarrow 0$ , поэтому в состоянии равновесия

$$\int \ln f J(f) d\xi de = 0$$

Согласно (2.2) приходим к условию

$$\ln f_1' + \ln f' - \ln f_1 - \ln f = 0$$

Общее решение этого уравнения в соответствии с (2.5) имеет вид

$$\ln f = A(e) + B_i \xi_i + C \xi_i^2$$

С учетом условий

$$N(e) = \int f d\xi, \quad n = \int N(e) de$$

$$U_i = \frac{1}{n} \int \xi_i f d\xi de, \quad \frac{3}{2} kT_i = \frac{1}{n} \int \frac{mc^2}{2} f d\xi de$$

для равновесной функции распределения найдем

$$f_{(0)}^i = N(e) \left( \frac{m}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mc^2}{2kT_i} \right)$$

Умножив (2.1) на  $c_i e$  и проинтегрировав по переменным  $e$  и  $\xi_i$ , получим

$$\frac{\partial q_i^r}{\partial t} = \int e c_i J(f) de d\xi$$

Предполагая максвелловский закон взаимодействия между частицами, можно вычислить момент от интеграла столкновений. В результате получим

$$\frac{\partial q_i^r}{\partial t} = -\delta \frac{p_i}{\mu_i} q_i^r, \quad \delta = \frac{\mu_i}{mnD}$$

Здесь  $D$  — коэффициент самодиффузии газа. Комбинация  $\delta = \mu_i / mnD$  является константой для степенных законов взаимодействия между частицами [8].

Хотя релаксационное уравнение для  $q_i^r$  получено для максвелловского газа, аналогично тому как поступают при получении модельного уравнения для одноатомного газа, будем предполагать в дальнейшем его справедливость и для газов с немасвелловским законом взаимодействия между частицами, меняя лишь вязкость и коэффициент диффузии. Момент  $q_i^i$  релаксирует по уравнению

$$\frac{\partial q_i^i}{\partial t} = -\frac{2}{3} \frac{p_i}{\mu_i} q_i^i$$

3. Остановимся на конкретизации вида функций  $f^r$  и  $f^i$ .

Функцию  $f^r$  разложим около функции (2.6) в ряд по ортогональным многочленам от переменных  $c_i$ ,  $e$ , и отвечающим моментам  $q_i^r$  и  $q_i^i$

$$(3.1) \quad f^r = N(e) \left( \frac{m}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mc^2}{2kT_i} \right) \left[ 1 - \frac{2}{15} \frac{q_i^i}{nkT_i} \frac{mc_i}{kT_i} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT_i} \right) - (1-\delta) \frac{q_i^r mc_i}{kT_i} \frac{(e-e)}{\theta} \right] \\ \theta = \int (e-e)^2 f de d\xi$$

В этом разложении коэффициенты выбраны так, чтобы совпадали моменты от приближенного упругого интеграла столкновений и от точного больцмановского интеграла столкновений с максвелловским законом взаимодействия между молекулами.

Функцию  $f^i$  разложим около равновесного распределения (1.6) в ряд по ортогональным многочленам от переменных  $c_i$ ,  $e$  и удержим в нем только те члены, которые отвечают моментам  $q_i^r$  и  $q_i^i$

$$(3.2) \quad f^i = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-mc^2/2kT) (kT)^{-1} \exp(-e/kT) \left[ 1 - \alpha \frac{q_i^i}{p} \times \right. \\ \left. \times \frac{mc_i}{kT} \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT} \right) - \beta \frac{q_i^r}{p} \frac{mc_i}{kT} \left( 1 - \frac{e}{kT} \right) \right]$$

Произвольные величины  $\alpha$  и  $\beta$ , содержащиеся в (3.2), необходимо выбирать из условия правильной релаксации моментов  $q_i^t$  и  $q_i^r$  в полном уравнении (1.9). Так как сведения о релаксации величин  $q_i^t$  и  $q_i^r$  ограничены, то  $\alpha$  и  $\beta$  можно определять по значениям коэффициента теплопроводности в двухатомном газе.

Итак, получено модельное уравнение (1.9) с  $v_r$ ,  $f^t$  и  $f^r$  определенными формулами (1.10), (3.1) и (3.2). Можно показать, что для полученного уравнения выполняются все законы сохранения.

4. Модельное кинетическое уравнение (1.9) допускает дальнейшее упрощение при помощи осреднения функции распределения по переменной  $e$ .

Введем в рассмотрение функции  $f_0$  и  $f_1$  по формулам

$$f_0(t, r, \xi) = \int f de, \quad f_1(t, r, \xi) = \int ef de$$

Чтобы получить определяющие их уравнения, умножим уравнение (1.9) последовательно на 1,  $e$  и проинтегрируем по переменной  $e$ . В результате приходим к следующей системе уравнений:

$$(4.1) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} + \xi \frac{\partial f_0}{\partial r} = v_r(f_0^r - f_0) + v_t(f_0^t - f_0)$$

$$(4.2) \quad \frac{\partial f_1}{\partial t} + \xi \frac{\partial f_1}{\partial r} = v_r(f_1^r - f_1) + v_t(f_1^t - f_1)$$

$$v_r = \frac{p_t}{\mu_t} \frac{1}{Z}, \quad v_t = \frac{p_t}{\mu_t} \left( 1 - \frac{1}{Z} \right)$$

$$f_0^r = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right) \left[ 1 - \omega_0 \frac{2}{15} \frac{q_i^t}{p} \frac{mc_i}{kT} \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT} \right) \right]$$

$$f_0^t = n \left( \frac{m}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT_i}\right) \left[ 1 - \frac{2}{15} \frac{q_i^t}{p_i} \frac{mc_i}{kT_i} \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT_i} \right) \right]$$

$$f_1^r = kTn \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right) \left[ 1 - \omega_0 \frac{2}{15} \frac{q_i^t}{p} \frac{mc_i}{kT} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT} \right) + \omega_1(1-\delta) \frac{q_i^r mc_i}{pkT} \right]$$

$$f_1^t = \varepsilon n \left( \frac{m}{2\pi kT_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT_i}\right) \left[ 1 - \frac{2}{15} \frac{q_i^t}{p_i} \frac{mc_i}{kT_i} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{5}{2} - \frac{mc^2}{2kT_i} \right) + (1-\delta) \frac{q_i^r mc_i}{\varepsilon nkT_i} \right], \quad \delta = \frac{\mu_t}{m n D}$$

Макроскопические параметры, входящие в систему уравнений (4.1), (4.2), определяются через функции  $f_0$  и  $f_1$ , поэтому полученная система уравнений является замкнутой. Выпишем выражения для макропараметров через функции  $f_0$  и  $f_1$

$$n = \int f_0 d\xi, \quad nU_t = \int \xi_i f_0 d\xi, \quad \frac{3}{2} kT_t = \frac{1}{n} \int \frac{mc^2}{2} f_0 d\xi$$

$$q_i^t = \int c_i \frac{mc^2}{2} f_0 d\xi, \quad \varepsilon = \frac{1}{n} \int f_1 d\xi, \quad q_i^r = \int c_i f_1 d\xi$$

$$\frac{5}{2} kT = \frac{3}{2} kT_t + \varepsilon, \quad kT_r = \varepsilon, \quad p_t = nkT_t, \quad p = nkT$$

5. Рассмотрим задачу о релаксации на основе системы уравнений (4.1), (4.2). Получим макроскопические уравнения, описывающие релаксацию.

Умножая уравнение (4.1) последовательно на 1,  $\xi_i$  и интегрируя по пространству скоростей, получим

$$\partial n / \partial t = 0, \quad \partial U_i / \partial t = 0$$

Отсюда следует, что  $n = \text{const}$ ,  $U_i = \text{const}$ . Без ограничения общности можно положить  $U_i = 0$ . Умножая (4.1) на  $m\xi^2/2$ , а уравнение (4.2) на 1, интегрируя по пространству скоростей и суммируя, получим

$$\partial p / \partial t = 0 \quad \text{или} \quad p = p(0) = \text{const}$$

Умножая (4.1) на  $m\xi_i\xi_j$  и интегрируя по пространству скоростей, найдем

$$(5.1) \quad \frac{\partial P_{ij}}{\partial t} = -\frac{p_i}{\mu_i} P_{ij}, \quad i \neq j$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial P_{11}}{\partial t} &= \frac{p_i}{\mu_i} \frac{1}{Z} (p - p_i) + \frac{p_i}{\mu_i} (p_i - P_{11}) \\ \frac{\partial P_{22}}{\partial t} &= \frac{p_i}{\mu_i} \frac{1}{Z} (p - p_i) + \frac{p_i}{\mu_i} (p_i - P_{22}) \\ \frac{\partial P_{33}}{\partial t} &= \frac{p_i}{\mu_i} \frac{1}{Z} (p - p_i) + \frac{p_i}{\mu_i} (p_i - P_{33}) \end{aligned}$$

Суммируя уравнения (5.2) и деля на 3, получим уравнение, определяющее релаксацию  $p_i$

$$(5.3) \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{p_i}{\mu_i} \frac{1}{Z} (p - p_i)$$

Вычитая из каждого уравнения (5.2) уравнение (5.3) и вводя величины  $p_{11} = P_{11} - p_i$ ,  $p_{22} = P_{22} - p_i$ ,  $p_{33} = P_{33} - p_i$ , получим уравнения

$$(5.4) \quad \frac{\partial p_{11}}{\partial t} = -\frac{p_i}{\mu_i} p_{11}, \quad \frac{\partial p_{22}}{\partial t} = -\frac{p_i}{\mu_i} p_{22}, \quad \frac{\partial p_{33}}{\partial t} = -\frac{p_i}{\mu_i} p_{33}$$

Системы уравнений (5.1) и (5.4) можно записать единообразно, если обозначить  $p_{ij} = P_{ij}$  при  $i \neq j$

$$(5.5) \quad \frac{\partial p_{ij}}{\partial t} = -\frac{p_i}{\mu_i} p_{ij}$$

Таким образом, решение системы уравнений (5.1), (5.2) свелось к решению уравнения (5.3) и затем уравнений (5.5).

Умножая уравнение (4.1) на  $\xi_i m \xi^2/2$  и интегрируя, получим

$$\frac{\partial q_i^t}{\partial t} = -\left[ \frac{2}{3} + \frac{(1 - \omega_0)}{3Z} \right] \frac{p_i}{\mu_i} q_i^t$$

Умножая уравнение (4.2) на  $\xi_i$  и интегрируя, получим

$$\frac{\partial q_i^r}{\partial t} = -\left[ \delta + \frac{1}{Z} (1 - \delta) (1 - \omega_1) \right] \frac{p_i}{\mu_i} q_i^r$$

Из уравнений, описывающих релаксацию, видно, что величина  $Z$  определяет релаксацию давления  $p_i$  к равновесному давлению  $p$ , величина  $p/\mu_i$  — релаксацию величин  $p_{ij}$ . Выбором величин  $\omega_0$  и  $\omega_1$  можно добиться правильной релаксации моментов  $q_i^t$  и  $q_i^r$  соответственно.

Поступила 15 I 1975



## ЛИТЕРАТУРА

1. Жук В. И., Рыков В. А., Шахов Е. М. Кинетические модели и задача о структуре ударной волны. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4.
2. Холуэй Л. Г. Новые статистические модели для кинетической теории и методы их построения. Механика, Период. сб. перев. иностр. ст., 1967, № 6.
3. Шахов Е. М. Метод аппроксимации кинетического уравнения Больцмана. В сб.: Числен. методы в теории разреж. газов. М., Вычисл. центр АН СССР, 1969.
4. Седов Л. И. Механика сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1973.
5. Каган Ю., Афанасьев А. М. К кинетической теории газа с вращательными степенями свободы. ЖЭТФ, 1961, т. 41, вып. 5.
6. Lordi J. A., Mates R. E. Rotational relaxation in nonpolar diatomic gases. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, № 2.
7. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. М., «Наука», 1967.
8. Вальдман Л. Явления переноса в газах при среднем давлении. В сб.: Термодинамика газов. М., «Машиностроение», 1970.