МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 · 1975

УДК 533.6.011

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ЗАКОНА ЛОКАЛЬНОСТИ

А. И. БУНИМОВИЧ, В. Г. ЧИСТОЛИНОВ

(Москва)

Излагается аналитический метод расчета аэродинамических сил, действующих на выпуклое тело вращения, движение которого удовлетворяет условиям закона локальности, т. е. импульс силы, действующей на элемент поверхности, зависит только от режима обтекания и местного угла между скоростью и нормалью к поверхности. Решение представлено в форме, где явно выделено влияние параметров, характеризующих форму обтекаемого тела, угла атаки и режима обтекания. Получены универсальные выражения для ряда коэффициентов, справедливые для любого тела вращения. Проведен расчет аэродинамических характеристик четырехпараметрического семейства тел вращения на режиме гиперзвукового обтекания в газе различной степени разреженности.

1. В работе [1] для произвольного тела вращения, которое движется в потоке газа или света в условиях закона локальности, в системе независимых углов α, φ, задающих ориентацию единичного вектора скорости $\mathbf{v}(\alpha, \varphi)$ в связанной с телом системе координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, получены основные дифференциальные соотношения для коэффициентов лобового сопротивления c_x и подъемной силы c_y

$$c_{x_\alpha}{}^1(\alpha)=(R+1)\,c_y \tag{1.1}$$

$$L[c_x{}^1]=c_{x_{\alpha\alpha}}{}^1+\operatorname{ctg}\alpha c_{x_\alpha}{}^1+(R+1)(R+2)c_x{}^1=(R+1)\Psi_R \tag{1.2}$$

где

$$c_x{}^1(\alpha)=c_x(\alpha)+N_R,\qquad \Psi_R=\Phi_R+(R+2)N_R,\qquad c_{x_\alpha}{}^1=dc_x{}^1/d\alpha \tag{1.3}$$

N_R и Φ_R — функции [1], зависящие от α, геометрии тела вращения $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})$, коэффициентов A_k и B_k разложения коэффициентов безразмерного локального давления c_p и касательного напряжения c_τ

$$c_p=\sum_{k=1}^{R}A_k(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^k,\qquad c_\tau=(\mathbf{v}\cdot\underline{t})\sum_{k=1}^{R-1}B_k(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^k \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{n}$ и $\mathbf{t}$ — орты внутренней нормали и касательной к элементу поверхности; A_k, $B_k=f_k(M, Re, T_w, \ldots)$ — коэффициенты, зависящие от режима обтекания, которые могут быть получены из известных теоретических или экспериментальных представлений [2].

Система (1.1), (1.2) допускает аналитическое решение относительно $c_x{}^1(c_x)$ и c_y во всем диапазоне углов атаки для произвольного выпуклого тела вращения и произвольного вида разложения локального импульса (1.4).

Отметим, что замена (1.3) улучшает гладкость правой части уравнения $L(c_x)$ на два порядка, что имеет существенное значение при фактическом решении этого уравнения.

2. Для определения аэродинамических характеристик заданного тела нужно найти функцию $c_x^1(\alpha)$, непрерывную и ограниченную на отрезке $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$, удовлетворяющую уравнению (1.2) и граничным условиям

$$(2.1)\qquad |\lim_{\alpha\to 0} c_x^1(\alpha)|<\infty \qquad |\lim_{\alpha\to\pi} c_x^1(\alpha)|<\infty$$

Решение задачи (1.2), (2.1) ищется методом разложения по собственным функциям соответствующей однородной задачи [3]. Уравнение для собственных функций и собственных значений оператора $L[c_x^1]$ имеет вид

$$(2.2)\qquad c^1_{x_{\alpha\alpha}}+\operatorname{ctg}\alpha c_{x_\alpha}{}^1+(R+1)(R+2)c_x{}^1+\lambda c_x{}^1=0$$

Краевая задача (2.1), (2.2) является сингулярным случаем краевой задачи для однородного дифференциального оператора $L[c_x^1]$; граничные условия (2.1) этой задачи эквивалентны однородным граничным условиям.

Заменой переменных $x=\cos\alpha$ уравнение (2.2) сводится к уравнению Лежандра [4]

$$(2.3)\qquad \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dc_x^1}{dx}\right]+[(R+1)(R+2)+\lambda]c_x^1=0$$

решения которого существуют при любых комплексных значениях λ. Однако решение уравнения (2.3), удовлетворяющее граничным условиям (2.1), существует лишь при

$$(2.4)\qquad \lambda_n=n(n+1)-(R+1)(R+2)\qquad n=0,1,2,\ldots$$

и представляет собой полиномы Лежандра

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Следовательно, вся совокупность собственных значений λ_n линейного оператора $L[c_x^1]$ с граничными условиями (2.1) выражается соотношением (2.4) и соответствующая ей полная замкнутая система ортогональных в области $\alpha[0,\pi]$ собственных функций имеет вид

$$(2.5)\qquad c_{xn}{}^1=P_n(\cos\alpha)$$

Для решения неоднородного уравнения (1.2) с граничными условиями (2.1) раскладываем на отрезке $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ функцию $\Psi_R(\alpha)$ в ряд Фурье по собственным функциям (2.5).

$$(2.6)\qquad \Psi_R(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nP_n(\cos\alpha),\qquad b_n=\frac{2n+1}{2}\int_0^\pi\Psi_R(\alpha)P_n(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha$$

Решение неоднородной задачи ищется в виде ряда с неопределенными коэффициентами c_n

$$(2.7)\qquad c_x^1(\alpha)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(\cos\alpha)$$

Как известно [3], решение задачи существует и единственно, если ни одно из собственных значений λ_n соответствующей однородной задачи не равно нулю. Из (2.4) следует, что в рассматриваемом случае собственное значение λ_{R+1} равно нулю.

Следовательно, для того чтобы решение задачи (1.2), (2.1) существовало, необходимо наложить дополнительное условие на функцию $\Psi_R(\alpha)$, потребовав, чтобы коэффициент b_{R+1} равнялся нулю.

Как показал анализ функции $\Psi_R(\alpha)$ и конкретные расчеты, функция $\Psi_R(\alpha)$ для рассматриваемого класса задач удовлетворяет этому условию.

При этом решение задачи (1.2), (2.1) существует, но неединственно, так как собственная функция $P_{R+1}(\cos\alpha)$ с точностью до произвольной постоянной также удовлетворяет данной задаче.

Окончательное решение для приведенного коэффициента лобового сопротивления $c_x^1(\alpha)$ произвольного тела вращения и произвольного вида разложения локального импульса (1.4) во всем диапазоне углов атаки будет иметь вид

$$c_x^1(\alpha)=cP_{R+1}(\cos\alpha)+\sum_{n=0}^{\infty}c_nP_n(\cos\alpha), \tag{2.8}$$

$$c_n=\frac{(R+1)b_n}{[(R+1)(R+2)-n(n+1)]},\qquad n\neq R+1$$

Физический коэффициент лобового сопротивления c_x и коэффициент подъемной силы c_y определяются из соотношений (1.3) и (1.1).

Константа интегрирования c находится из условий конкретной задачи по известному расчетному или экспериментальному значению c_x в одной точке.

Как показал анализ результатов расчета, определение константы интегрирования по экспериментальным данным в значительной мере уменьшает неточности «закона локальности».

В случае, когда правая часть уравнения (1.2) имеет специальный вид, допускающий определение частного решения $F(\alpha)$, удовлетворяющего граничным условиям (2.1), решение задачи может быть записано в форме

$$c_x^1(\alpha)=cP_{R+1}(\cos\alpha)+F(\alpha)$$

Отметим, что решение уравнения, подобного уравнению (1.2), для частного случая, когда из всех коэффициентов разложения (1.4) отличен от нуля лишь один, $A_2\neq0$, рассматривалось в работе [5].

Однако в [5] решение строилось по отрезкам непрерывности функции $\Psi_R(\alpha)$ и ее производной, что требует использования функций Лежандра второго рода и существенно усложняет расчет.

3. Для сокращения объема выкладок при исследовании функции $\Psi_R(\alpha)$ и полученных решений в дальнейшем ограничимся случаем $R=2$, который соответствует, в частности, гиперзвуковому ньютоновскому течению, движению тела в разреженном газе и в потоке света.

В этом случае решение (2.8) принимает вид

$$c_x^1(\alpha)=cP_3(\cos\alpha)+\sum_{\substack{n=0\\n\neq3}}^{\infty}c_nP_n(\cos\alpha),\qquad c_x=c_x^1-N_2(\alpha) \tag{3.1}$$

Функции $N_2(\alpha)$ и $\Psi_2(\alpha)$, полученные в работе [1], можно записать в форме

$$N_2(\alpha)=-B_1^*J^{\mathrm{I}}(\alpha)+\frac{1}{2}A_1^*J^{\mathrm{III}}(\alpha) \tag{3.2}$$

$$\Psi_2(\alpha)=A_1^*J^{\mathrm{IV}}(\alpha)+2(A_2^*-B_1^*)J^{\mathrm{I}}(\alpha) \tag{3.3}$$

$$J^{\mathrm{I}}(\alpha)=\int\limits_{S^*}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS,\qquad J^{\mathrm{II}}(\alpha)=\int\limits_{S^*}dS \tag{3.4}$$

$$J^{\mathrm{III}}(\alpha)=\int\limits_{S^*}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})^2\,dS,\qquad J^{\mathrm{IV}}(\alpha)=J^{\mathrm{II}}(\alpha)+3J^{\mathrm{III}}(\alpha)$$

$$A_k^*=A_k/S_R,\ B_k^*=B_k/S_R$$

Здесь S_R — характерная площадь, S^* — «освещенная» площадь $(\mathbf{vn})\geqslant\geqslant 0$; в дальнейшем для простоты звездочки у A_k^* и B_k^* опускаются. Коэффициенты c_n в решении (3.1) и коэффициенты b_n разложения функции $\Psi_2(\alpha)$ в ряд (2.6) можно выразить через b_n^{I}, b_n^{II}, b_n^{III}, b_n^{IV} — коэффициенты разложения функций $J^{\mathrm{I}}(\alpha)$, $J^{\mathrm{II}}(\alpha)$, $J^{\mathrm{III}}(\alpha)$, $J^{\mathrm{IV}}(\alpha)$ в ряды, аналогичные (2.6)

$$b_n=A_1b_n^{\mathrm{IV}}+2(A_2-B_1)b_n^{\mathrm{I}},\qquad c_n=A_1c_n^{\mathrm{IV}}+2(A_2-B_1)c_n^{\mathrm{I}} \tag{3.5}$$

$$b_n^{\mathrm{IV}}=b_n^{\mathrm{II}}+3b_n^{\mathrm{III}}$$

$$c_n^{\mathrm{I,IV}}=-3b_n^{\mathrm{I,IV}}[n(n+1)-12]^{-1},\qquad n\neq 3 \tag{3.6}$$

Здесь (3.6) следует из (2.8).

Проведенные расчеты аэродинамических характеристик различных тел вращения и оценки показали, что ряд (3.1) быстро сходится и его можно аппроксимировать с точностью 1% полиномом степени $n=7$.

Априорный анализ функций (3.4) для произвольного тела вращения позволил получить приводимые ниже универсальные выражения всех коэффициентов b_n^{I}, b_n^{II}, b_n^{III}, b_n^{IV}, которые зависят только от формы тела вращения, что существенно сокращает объем вычислений при расчете характеристик конкретного тела вращения

$$b_{2n+1}^{\mathrm{I}}=0\qquad(n=0,1,2,\ldots)\qquad b_0^{\mathrm{I}}=S_0/4$$

$$b_{2n}^{\mathrm{I}}=B_{2n}\left\{S_0+2\pi\int\limits_{x_0}^{x_1}H(x)\chi_{2n}(\cos\beta)\,dx\right\},\qquad n=1,2,3,4 \tag{3.7}$$

$$B_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\,\frac{4n+1}{2n-1}\,\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}$$

$$b_0^{\mathrm{III}}=\frac{1}{6}S_0,\qquad b_1^{\mathrm{III}}=0,\qquad b_2^{\mathrm{III}}=\frac{16}{15}b_2^{\mathrm{I}},\qquad b_{2n}^{\mathrm{III}}=0\qquad(n=2,3,\ldots)$$

$$b_{2n+1}^{\mathrm{III}}=B_{2n+1}\pi\int\limits_{x_0}^{x_1}M(x)\chi_{2n+1}(\cos\beta)\,dx\qquad(n=1,2,3) \tag{3.8}$$

$$B_{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}\,\frac{4n+3}{2n-1}\,\frac{(2n-1)!!}{(n+2)!}$$

$$b_0^{\mathrm{IV}}=6b_0^{\mathrm{III}},\qquad b_1^{\mathrm{IV}}=0,\qquad b_2^{\mathrm{IV}}=3b_2^{\mathrm{III}},\qquad b_3^{\mathrm{IV}}=0 \tag{3.9}$$

$$b_{2n}^{\mathrm{IV}}=0\qquad(n=2,3,4,\ldots),\qquad b_5^{\mathrm{IV}}=-9b_5^{\mathrm{III}},\qquad b_7^{\mathrm{IV}}=-22b_7^{\mathrm{III}}$$

$$\beta=\operatorname{arctg}\left(\frac{dr}{dx}\right),\qquad M(x)=r(x)\frac{dr}{dx},\qquad H(x)=\frac{r(x)}{\cos\beta}$$

$$S_0=2\pi\int_{x_0}^{x_1}H(x)\,dx+\pi(r_0^2+r_1^2)$$

$$\chi_2(z)=-\frac{3}{2}z^2,\qquad \chi_3(z)=-5z^2,\qquad \chi_4(z)=5z^2\left(-1+\frac{7}{8}z^2\right)$$

$$\chi_5(z)=7z^2\left(-2+\frac{9}{4}z^2\right),\qquad \chi_6(z)=21z^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}z^2-\frac{11}{16}z^4\right)$$

$$\chi_7(z)=\frac{99}{2}z^2\left(-\frac{6}{11}+\frac{3}{2}z^2-\frac{13}{12}z^4\right)$$

$$\chi_8(z)=\frac{99}{2}z^2\left(-\frac{4}{11}+\frac{3}{2}z^2-\frac{13}{6}z^4+\frac{65}{64}z^6\right)$$

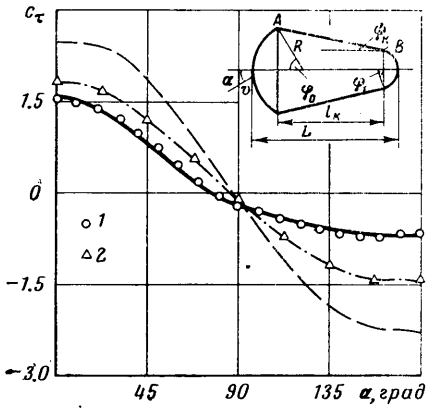
Здесь $r(x)$ — уравнение образующей тела вращения, S_0 — полная поверхность тела вращения, r_0 и r_1 — радиусы переднего и заднего торцевых затуплений соответственно.

Используя (3.6) — (3.9), решение для произвольного тела вращения во всем диапазоне углов атаки $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$ можно записать в форме

$$c_x^{\mathrm{I}}(\alpha)=cP_3(z)+\frac{3}{2}A_1[b_0^{\mathrm{III}}+b_2^{\mathrm{III}}P_2(z)+b_5^{\mathrm{III}}P_5(z)+b_7^{\mathrm{III}}P_7(z)]+ \tag{3.10}$$

$$+2(A_2-B_1)\sum_{n=0}^{3}\frac{3}{12-2n(2n+1)}b_{2n}^{\mathrm{I}}P_{2n}(z),\qquad z=\cos\alpha$$

В выражении (3.10) явно выделены параметры, зависящие от режима обтекания (A_i, B_i), угла атаки $\alpha(P_i(\alpha))$ и формы тела вращения (b_i). Это дает возможность проводить анализ зависимости аэродинамических характеристик от каждого из параметров, определяющих режим течения и геометрию тела вращения, формулировать экстремальные задачи и обобщенные законы аэродинамического подобия.



Так как функция $N_2(\alpha)$ выражается через исследованные функции $J^{\mathrm{I}}(\alpha)$ и $J^{\mathrm{III}}(\alpha)$ по формуле (3.2), то ее также удобно представить в виде ряда по полиномам Лежандра. Анализ этой функции и проведенные оценки для ряда конкретных тел показали, что с точностью порядка 2% этот ряд можно аппроксимировать полиномом от многочленов Лежандра степени $n=8$

$$N_2(\alpha)=-B_1\sum_{n=0}^{4}b_{2n}^{\mathrm{I}}P_{2n}(z)+ \tag{3.11}$$

$$+\frac{1}{2}A_1\left[b_0^{\mathrm{III}}+b_2^{\mathrm{III}}P_2(z)+\sum_{n=1}b_{2n+1}^{\mathrm{III}}P_{2n+1}(z)\right]$$

Физические коэффициенты лобового сопротивления c_x и подъемной силы c_y во всем диапазоне углов атаки $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ определяются из соотношений (1.3), (1.1) и (3.10), (3.11).

4. В качестве примера применения предложенного метода расчета аэродинамических характеристик рассмотрим четырехпараметрический класс сегментально-конических тел вращения, определяемых параметрами ψ_K, l_K, φ_0, R (фигура). Для таких тел

$$S_0 = 2\pi\rho_0^2(1-\cos\varphi_0) + 2\pi\rho_1^2(1-\cos\varphi_1) + S_K \tag{4.1}$$

$$\rho_0 = R, \qquad \rho_1 = \frac{r_B}{\cos\psi_K}, \qquad r_A = R\sin\varphi_0, \qquad \varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_K$$

$$r_B = R\sin\varphi_0 - l_K \operatorname{tg}\psi_K, \qquad S_K = \frac{\pi l_K (r_A + r_B)}{\cos\psi_K}$$

Здесь S_K — площадь конической поверхности. Коэффициенты формы выражаются в явном виде

$$b_{2n}^{\mathrm{I}} = B_{2n}\left\{\sum_{i=0}^{1} W(\rho_i, \varphi_i)\,\delta_{2n}(\sin\varphi_i) + S_K[1+\chi_{2n}(\cos\psi)]\right\} \tag{4.2}$$

$$n = 1, 2, 3, 4$$

$$b_{2n+1}^{\mathrm{III}} = B_{2n+1}\left\{\sum_{i=0}^{1} (-1)^i W^*(\rho_i, \varphi_i)\,\delta_{2n+1}(\sin\varphi_i) + \right. \tag{4.3}$$

$$\left. + \frac{\pi}{2}(r_B^2 - r_A^2)\chi_{2n+1}(\cos\psi)\right\}, \qquad n = 1, 2, 3$$

$$W(\rho, \varphi) = \pi\rho^2\cos\varphi\sin^2\varphi, \qquad W^*(\rho, \varphi) = \pi\rho^2\sin^4\varphi$$

$$\delta_2(z) = 1, \qquad \delta_3(z) = -\frac{5}{4}, \qquad \delta_4(z) = 1 - \frac{7}{4}z^2$$

$$\delta_5(z) = \left(1 - \frac{3}{4}z^2\right)\left(-\frac{7}{2}\right)$$

$$\delta_6(z) = 1 - \frac{9}{2}z^2 + \frac{33}{8}z^4, \qquad \delta_7(z) = \frac{99}{2}\left(-\frac{3}{22} + \frac{1}{4}z^2 - \frac{13}{96}z^4\right)$$

$$\delta_8(z) = -11\left(-\frac{1}{11} + \frac{3}{4}z^2 - \frac{13}{8}z^4 + \frac{65}{64}z^6\right)$$

Выражение для приведенного коэффициента лобового сопротивления $c_x^1(\alpha)$ во всем диапазоне углов атаки α дается формулой (3.10), в которой коэффициенты формы определены по (4.1) — (4.3), а характерная площадь $S_R = \pi r_A^2$.

Константа интегрирования c определяется из уравнения (3.10) по известному расчетному или экспериментальному значению $c_x^*(\alpha)$, например при $\alpha = 0$

$$c = c_x^*(\alpha=0) + N_2(0) - F(0) \tag{4.4}$$

$$F(0) = \frac{3}{2}A_1[b_0^{\mathrm{III}} + b_2^{\mathrm{III}} + b_5^{\mathrm{III}} + b_7^{\mathrm{III}}] +$$

$$+ 2(A_2 - B_1)\sum_{n=0}^{3} \frac{3}{12 - 2n(2n+1)} b_{2n}^{\mathrm{I}}$$

Расчетное значение $c_x^*(\alpha=0)$ выражается соотношением

$$c_x^*(\alpha=0)=2\pi\rho_0^2\left[\frac{A_1}{3}(1-\cos^3\varphi_0)+\frac{A_2}{4}(1-\cos^4\varphi_0)+\frac{B_1}{4}\sin^4\varphi_0\right] \tag{4.5}$$

Для конкретной геометрии (фиг. 1) с параметрами $\psi_K=7°$, $\varphi_0=30°$, $\bar{\rho}_1=\rho_1/r_A=0.89$, $\lambda=L/2r_A=1$ коэффициенты формы b_n^{I}, b_n^{III} принимают значения

$$\begin{gathered} b_0^{\mathrm{I}}=1.07,\quad b_2^{\mathrm{I}}=0.029,\quad b_4^{\mathrm{I}}=-0.093,\quad b_6^{\mathrm{I}}=-0.011,\quad b_8^{\mathrm{I}}=-0.003 \\ b_0^{\mathrm{III}}=0.71,\quad b_2^{\mathrm{III}}=0.031,\quad b_3^{\mathrm{III}}=-0.16,\quad b_5^{\mathrm{III}}=-0.0046 \\ b_7^{\mathrm{III}}=-0.0055 \end{gathered} \tag{4.6}$$

Коэффициент осевой силы $c_\tau=c_x\cos\alpha-c_y\sin\alpha$ такого тела вращения для различных режимов обтекания во всем диапазоне углов атаки приведен на фигуре.

Сплошная кривая рассчитана по модифицированной теории Ньютона при $M=6$. Точками *1* отмечены экспериментальные данные, заимствованные из работы [6]. Пунктирная кривая соответствует режиму свободномолекулярного обтекания при диффузной схеме отражения с коэффициентом аккомодации энергии $\alpha_e=0.8$ и $M_\infty\geqslant4$. (Коэффициенты $A_1=0.5$, $A_2=B_1=2$.) Средняя кривая соответствует промежуточному режиму течения ($M_\infty=7$) с учетом разреженности среды, который характеризуется параметрами $A_1=0.635$, $A_2=1.225$, $B_1=0.989$. Точками *2* показаны расчетные значения c_τ, полученные методом численного интегрирования локального потока импульса (1.4) по обтекаемой поверхности тела.

Поступила 17 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунимович А. И.* Соотношения между силами, действующими на тела, движущиеся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4.
2. *Баранцев Р. Г., Васильев Л. А., Иванов Е. В., Козачек В. В., Минайчев А. Д., Михайлов Л. В., Мурзов Н. В.* Аэродинамический расчет в разреженном газе на основе гипотезы локальности. В сб.: Аэродинамика разреженных газов. Сб. 4. Изд-во Ленингр. ун-та, 1969.
3. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М.— Л., Физматгиз, 1963.
5. *Pike J.* Newtonian lift and drag of blunt-cone cylinder bodies. AJAA Journal, 1972, vol. 10, No. 2.
6. *Артонкин В. Г., Петров К. П.* Исследования аэродинамических характеристик сегментально-конических тел. Тр. ЦАГИ, 1971, вып. 1361.