МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975

УДК 532.595–141

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ В ТОНКОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ТРУБКЕ, ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОКРУГ ОСИ СИММЕТРИИ

Е. П. СМИРНОВА

(Ленинград)

Рассмотрен спектр собственных колебаний идеальной жидкости во вращающейся кольцевой трубке. Предложена рекуррентная процедура, пригодная для любой формы поперечного сечения трубки и позволяющая найти точки спектра и собственные функции в виде разложения по отношению толщины трубки к радиусу кольца. Процедура применена к случаям прямоугольной и круговой форм поперечного сечения. В обоих случаях спектр является счетным и плотно заполняет интервал вещественной оси.

1. Постановка задачи. Задача о собственных колебаниях идеальной жидкости во вращающейся полости интересна и как задача математической физики [1], и для прикладных целей. Она важна при описании движения волчка, содержащего полость с маловязкой жидкостью [2–6]. При заданном вращении полости применение метода пограничного слоя позволяет определить, как меняется во времени произвольное начальное движение жидкости с малой вязкостью, если известен полный набор собственных колебаний идеальной жидкости внутри этой полости [2, 3]. Для ряда полостей спектр колебаний идеальной жидкости изучен в работах [3, 5–7]. Здесь рассматривается случай тонкой кольцевой трубки.

Пусть идеальная несжимаемая жидкость целиком заполняет полость, ограниченную поверхностью S и вращающуюся с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, зависимость собственных колебаний от времени описывается множителем $\exp i\lambda t$. Для амплитудных значений скорости $\mathbf{v}$ и обобщенного давления $P=q\lambda$ получим систему

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &i\mathbf{v}+\varkappa[\mathbf{e}_\omega, \mathbf{v}]+\nabla q=0,\ \varkappa=2\omega/\lambda,\ \mathbf{e}_\omega=\boldsymbol{\omega}/\omega \\ &\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\ (\mathbf{v}, \mathbf{n})|_S=0 \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S. Задача (1.1) может иметь ненулевые решения только при вещественных $\varkappa$, $|\varkappa|\geqslant 1$ [2].

При $\varkappa\neq\pm1$, ∞ первое из уравнений (1.1) позволяет выразить $\mathbf{v}$ через ∇q, после чего второе уравнение и краевое условие приводят к краевой задаче для q

$$(1.2)\qquad \begin{aligned} &\Delta q-\varkappa^2(\mathbf{e}_\omega, \nabla)^2 q=0 \\ &(\mathbf{n}, \nabla q)-\varkappa^2(\mathbf{e}_\omega, \mathbf{n})(\mathbf{e}_\omega, \nabla q)+i\varkappa([\mathbf{n}, \mathbf{e}_\omega], \nabla q)|_S=0 \end{aligned}$$

Случаи $\varkappa=\pm1$ и $\varkappa=\infty$ должны рассматриваться отдельно. Значению $\varkappa=\infty$ соответствуют так называемые геострофические течения, существующие, вообще говоря, не во всякой полости [2]. Если полость допускает такие течения (это справедливо, в частности, для любой осесимметричной полости), то $\varkappa=\infty$ является бесконечнократно вырожденным собственным значением. В осесимметричной полости геострофическое течение определяется заданием произвольной функции одной переменной. При $\varkappa=\pm1$

задача (1.1) для осесимметричной полости приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка с сингулярными коэффициентами, решение которого должно быть всюду ограничено. Можно показать, что единственно допустимым оказывается нулевое решение и значения $\varkappa=\pm1$ в соответствии с [2] не являются точками спектра.

Ниже рассматривается краевая задача (1.2) для полости, имеющей форму кольцевой трубки с произвольным поперечным сечением. Трубку считаем тонкой, т. е. размеры поперечного сечения малы по сравнению с радиусом кольца R. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена параллельно оси симметрии трубки. Спектр и собственные функции такой задачи будем искать в виде разложения по степеням отношения толщины трубки к радиусу кольца.

2. Метод решения. Осевая симметрия задачи позволяет использовать цилиндрическую систему координат ρ, z, φ (ось z совпадает с осью симметрии полости). Краевые условия и уравнения не зависят от φ, так что решение задачи ищем в виде $q=q_m \exp im\varphi$. Для q_m получим уравнение (2.1)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)q_m=0;\quad \mu^2=\varkappa^2-1 \tag{2.1}$$

$$\left(n_\rho\frac{\partial}{\partial\rho}-\mu^2 n_z\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\varkappa m}{\rho}n_\rho\right)q_m\bigg|_s=0.$$

Вместо ρ удобно ввести новую переменную s по формуле $\rho=R+s$. Так как трубка тонкая, внутри нее z/R, $s/R\ll1$, а величина R имеет конечное значение. Краевая задача (1.2) однородна по координатам, поэтому вместо случая z, $s\ll R$, $R=\mathrm{const}$ можно рассматривать случай, когда z и s внутри трубки принимают конечные значения, а $R\to\infty$. В дальнейшем используется именно такой подход.

Если искать решение (2.1) в виде ряда по R^{-k}, то для нулевого приближения получается однородная краевая задача, а каждое следующее приближение является решением неоднородной краевой задачи, в которой правые части уравнения и краевого условия определяются предыдущими приближениями. Однако этот подход неудобен, поскольку на каждом шаге такой процедуры возникает новая краевая задача с существенно другими правыми частями.

Поэтому здесь предлагается иной вариант рекуррентной процедуры. Представим q_m в виде

$$q_m(\rho,z)=\sqrt{\frac{R}{\rho}}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^{-k}q_m^{(k)}(s,z) \tag{2.2}$$

Легко убедиться, что это разложение является решением уравнения (2.1), если функции $q_m^{(k)}(s,z)$ удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)q_m^{(k)}=0,\quad k\geqslant0 \tag{2.3}$$

и добавочному условию

$$2k\frac{\partial}{\partial s}q_m^{(k)}=[(k-{}^1/_2)^2-m^2]\,q_m^{(k-1)},\quad k\geqslant1 \tag{2.4}$$

Очевидно, условие (2.4) не противоречит уравнению (2.3).

Функции $q_m^{(k)}(s, z)$ ищем в виде ряда по целым отрицательным степеням R

$$q_m^{(k)}=\sum_{p=0}^{\infty} R^{-p} q_m^{(kp)}$$

Каждый член такого разложения должен удовлетворять уравнению (2.3), а краевые условия в каждом данном порядке применяются к сумме ряда (2.2), найденной с заданной точностью. Параметр μ^2 в (2.3) предполагается одним и тем же в любом порядке итерации. Краевое условие определяет его в виде разложения по степеням $1/R$. (Ниже эта процедура будет продемонстрирована явно.) Симметрия задачи (2.1) относительно формальной замены $R \to -R$, $s \to -s$ (очевидно, при этом $\rho \to -\rho$) приводит к тому, что ряд для собственных значений содержит лишь четные отрицательные степени R.

Уравнение (2.3) и условие (2.4) при известном $q_m^{(k-1)}$ определяют $q_m^{(k)}$ с точностью до произвольного слагаемого вида $Az+B$, где A и B — постоянные. Этот произвол устраняется граничными условиями.

Для $q_m^{(00)}$ получаем однородную краевую задачу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) q_m^{(00)}=0; \quad \left(n_\rho \frac{\partial}{\partial s}-\mu^2 n_z\frac{\partial}{\partial z}\right) q_m^{(00)}\Big|_s=0 \tag{2.5}$$

Значения μ^2, при которых (2.5) имеет ненулевые решения, определяют нулевое приближение для собственных значений задачи (2.1). В этом приближении спектр бесконечнократно вырожден по m, но в следующих приближениях поправки к спектру снимают это вырождение. Если задача (2.5) переходит в себя при $s \to -s$, то $q_m^{(00)}$ обладает определенной четностью по s. Из формальной симметрии (2.1) относительно замены $R \to -R$, $s \to -s$ и структуры разложений q_m, $q_m^{(k)}$ получаем тогда, что и $q_m^{(kp)}$ имеют определенную четность по s, приобретая добавочный множитель $(-1)^{k+p}$ по сравнению с $q_m^{(00)}$.

Итак, предлагаемая рекуррентная процедура на каждом шаге сводится к решению плоского однородного волнового уравнения (2.3). Это сильно ограничивает класс функций, появляющихся при итерациях. В частности, когда форма поверхности допускает разделение переменных в уравнении (2.3), итерация сводится лишь к определению некоторого количества численных коэффициентов. Стандартность процедуры делает ее удобной для численных расчетов, особенно с применением ЭВМ. В следующих параграфах эта рекуррентная процедура применяется к простым формам поперечного сечения.

3. Кольцевая трубка прямоугольного сечения. Пусть кольцевая трубка имеет прямоугольное сечение, определенное условиями: $-s_0 \leqslant s \leqslant s_0$, $-z_0 \leqslant z \leqslant z_0$. Уравнение (2.1) и граничные условия принимают вид ($\rho_{1,2}=R\pm s_0$)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}-\mu^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}-\frac{m^2}{\rho^2}\right) q_m=0 \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \rho}-\frac{\varkappa m}{\rho}\right) q_m\Big|_{\rho=\rho_{1,2}}=0, \quad \frac{\partial q_m}{\partial z}\Big|_{z=\pm z_0}=0$$

В этой задаче переменные разделяются, и решение имеет вид

$$q_m(\rho, z)=f_{mn}(\rho)\cos n\frac{\pi}{2}\left(\frac{z}{z_0}+1\right) \tag{3.2}$$

Из краевых условий по z следует, что n — целое число. Все решения четны или нечетны по z (при четных или нечетных n) в соответствии с симметрией краевой задачи (3.1). Для $f_{mn}(\rho)$ получается уравнение Бесселя, так что можно написать точное решение

(3.3) $$f_{mn}(\rho)=a_{mn}J_m(y)+b_{mn}Y_m(y),\quad y=\rho n\pi\mu/2z_0$$

Краевые условия по ρ записываются в виде

$$(1-\varkappa)\left[a_{mn}J_{m-1}(y)+b_{mn}Y_{m-1}(y)\right]-$$
$$-(1+\varkappa)\left[a_{mn}J_{m+1}(y)+b_{mn}Y_{m+1}(y)\right]\Big|_{y=y_{1,2}}=0$$

Одно из условий определяет b_{mn}/a_{mn}, а второе позволяет найти значения μ и $\varkappa$ в точках спектра.

Пусть теперь $R\to\infty$. Используя первый член асимптотического разложения функций Бесселя, перепишем краевые условия в виде

(3.4) $$(\pi y/2)^{-1/2}\cos(y-m\pi/2-\alpha_{mn})\,|_{y=y_{1,2}}=0,\quad \operatorname{tg}\left(\alpha_{mn}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{b_{mn}}{a_{mn}}$$

Члены, пропорциональные $\varkappa$, в этом приближении сокращаются. Из (3.4) следует, что $2s_0n\pi\mu/2z_0=y_1-y_2=l\pi$, l — целое число.

Отсюда

(3.5) $$\mu_{mnl}^{(0)}=\frac{l}{n}\frac{z_0}{s_0}$$

Значение $l=0$ соответствует точкам $\varkappa=\pm1$, не принадлежащим спектру. При $n=0$, $\mu=\infty$, т. е. $\varkappa=\infty$. Это случай геострофического течения, которое нужно рассматривать отдельно (см. п. 1). Отрицательные значения l и n не дают новых решений и могут не использоваться. В сделанном приближении спектр не зависит от m, но уже при учете второго члена разложения функций Бесселя вырождение снимается. Значения $\varkappa^2=1+\mu^2$, вычисленные по формуле (3.5), плотно заполняют вещественную область $\varkappa^2>1$.

Сравним теперь результат, найденный из точного решения, с результатом рекуррентной процедуры, описанной в п. 2. Так как зависимость от z выделяется в множитель (см. (3.2)) и не затрагивается разложениями q_m и $q_m^{(k)}$, то достаточно применять итерацию к $f_{mn}(\rho)$.

Отделяя в (2.5) зависимость от z, получим в нулевом приближении

(3.6) $$\left[\frac{d^2}{ds^2}+(\mu n\pi/2z_0)^2\right]f_{mn}^{(00)}=0,\qquad \frac{d}{ds}f_{mn}^{(00)}\Big|_{s=\pm s_0}=0$$

Решение запишем в виде (l — целое)

(3.7) $$f_{mnl}^{(00)}(s)=\cos\frac{\pi}{2}(\mu ns/z_0+l)$$

Для μ получаем выражение (3.5).

В первом приближении имеем две функции $f_{mnl}^{(10)}$ и $f_{mnl}^{(01)}$ Из (2.4) следует

(3.8) $$f_{mnl}^{(10)}(s)=\frac{z_0}{\mu n\pi}\left(\frac{1}{4}-m^2\right)\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu ns}{z_0}+l\right)$$

В таком же виде ищем функцию $f_{mnl}^{(01)}$. Коэффициент в ней определяется граничным условием (3.1) по ρ

$$f_{mnl}^{(01)}(s)=\frac{2z_0}{\mu n\pi}\left[\varkappa m+\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{3}{4}\right)\right]\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu ns}{z_0}+l\right) \tag{3.9}$$

В этом приближении не требуется вводить поправки к спектру, поэтому сделаем еще один шаг.

Во втором приближении из (2.4), (3.8) и (3.9) получаем

$$f_{mnl}^{(20)}(s)=-\frac{1}{2}\left(\frac{z_0}{\pi\mu n}\right)^2\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left(m^2-\frac{9}{4}\right)\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu ns}{z_0}+l\right) \tag{3.10}$$

$$f_{mnl}^{(11)}(s)=2\left(\frac{z_0}{\pi\mu n}\right)^2\left(m^2-\frac{1}{4}\right)\left[\varkappa m+\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{3}{4}\right)\right]\times$$

$$\times\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{\mu ns}{z_0}+l\right)$$

Вклад $f_{mnl}^{(02)}(s)$ ведет лишь к переопределению коэффициента при $f_{mnl}^{(00)}(s)$, так что можно положить $f_{mnl}^{(02)}=0$. Краевое условие по ρ с точностью до $1/R^2$ определяет поправку к спектру:

$$\mu_{mnl}=\frac{z_0}{s_0}\frac{l}{n}\left\{1+\left(\frac{2s_0}{l\pi R}\right)^2\left[\varkappa^{(0)}m+\frac{1}{2}\left(m^2+\frac{3}{4}\right)\right]\right\} \tag{3.11}$$

где $\varkappa^{(0)}=\pm\sqrt{1+(\mu_{mnl}^{(0)})^2}$. Выражение (3.11) совпадает с тем, что дает в этом приближении точное решение. Как уже отмечалось ранее, вырождение по m снимается.

4. Кольцевая трубка кругового сечения (тороидальная полость). Перейдем теперь к более сложному случаю кругового сечения, для которого

$$s^2+z^2|_S=r_0^2,\qquad n_\rho=\frac{s}{r_0},\qquad n_z=\frac{z}{r_0} \tag{4.1}$$

Введем новые переменные

$$z=a\sin\xi\cos\eta,\qquad s=\frac{a}{\mu}\cos\xi\sin\eta;\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\xi,\ \eta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$

Уравнение границы (4.1) принимает вид $\xi=\pm\xi_0$, если выбрать

$$\operatorname{tg}^2\xi_0=\frac{1}{\mu^2},\qquad a=r_0|\varkappa|,\qquad \varkappa^2=\frac{1}{\sin^2\xi_0} \tag{4.3}$$

В новых переменных нулевое приближение итерационной процедуры дает

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right)q_m^{(00)}=0;\qquad \left.\frac{\partial q_m^{(00)}}{\partial\xi}\right|_{\xi=\pm\xi_0}=0 \tag{4.4}$$

Значения ξ_0, при которых (4.4) имеет ненулевые решения, определяют точки спектра.

Независимые решения уравнения (4.4) даются произведениями $\cos n\xi$ или $\sin n\xi$ на $\cos n\eta$ или $\sin n\eta$ с любым n. Однако они могут не быть решениями задачи (2.5) в переменных s и z. Это связано с тем, что выражения для производных по s и z через производные по ξ и η сингулярны на характеристиках $z\pm\mu s=a$, которые имеют точки касания с поверхностью (4.1). Обычное для гидродинамики условие принадлежности скоростей пространству W_2^1, т. е. условие квадратичной интегрируемости компонент ϑ и их производных, отбирает следующие решения для $q_m^{(00)}$:

$$
(4.5)\qquad
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}&\sin n\xi \cos n\eta \text{ при } \cos n\xi_0 = 0\\ &\cos n\xi \sin n\eta \text{ при } \sin n\xi_0 = 0\end{aligned}\right\}, \quad n=2j+1\\
&\left.\begin{aligned}&\sin n\xi \sin n\eta \text{ при } \cos n\xi_0 = 0\\ &\cos n\xi \cos n\eta \text{ при } \sin n\xi_0 = 0\end{aligned}\right\}, \quad n=2j
\end{aligned}
$$

Таким образом, в нулевом приближении точками спектра являются значения

$$
(4.6)\qquad \xi_0^{(0)} = \frac{l}{n}\frac{\pi}{2}, \qquad (\varkappa^{(0)})^{-2} = \sin^2\left(\frac{l}{n}\frac{\pi}{2}\right)
$$

где l и n — целые числа, $0 \leqslant l < n$. В зависимости от их четности или нечетности выбирается одно из решений (4.5). Случай $l=0$ соответствует геострофическим течениям, которые должны рассматриваться отдельно. Точки спектра (4.6), как и в случае прямоугольного сечения, образуют счетное множество, плотное в интервале $|\varkappa| > 1$.

Все решения (4.5) обладают определенной четностью при заменах $\xi \to -\xi$, $\eta \to -\eta$, которые эквивалентны заменам $z \to -z$, $s \to -s$. Выраженные через z и s, эти решения являются полиномами степени n.

Рассмотрим теперь следующие приближения. Все $q_m^{(k)}$ должны удовлетворять тому же уравнению (4.4), что и $q_m^{(00)}$. Выразим добавочное условие (2.4) через ξ и η:

$$
(4.7)\qquad \frac{4k\mu}{a}\left(\sin\xi \sin\eta \frac{\partial}{\partial\xi} + \cos\xi \cos\eta \frac{\partial}{\partial\eta}\right) q_m^{(k)} =
= \left[\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 - m^2\right] (\cos 2\xi + \cos 2\eta)\, q_m^{(k-1)}
$$

В соответствии со сказанным в п. 2 при последовательных итерациях сохраняется четность по ξ (т. е. по z), но меняется четность по η (т. е. по s). Так как все $q_m^{(kp)}$ удовлетворяют одному и тому же уравнению, на каждом шаге итерации можно искать решения в виде линейной комбинации выражений типа (4.5). Условие (4.7) показывает, что номера гармоник каждый раз сдвигаются на единицу по сравнению с предыдущим шагом итерации.

Для примера возьмем в качестве нулевого приближения функцию (4.8)

$$
(4.8)\qquad q_{mnl}^{(00)} = \cos n\xi \sin n\eta
$$

при нечетном $n \neq 1$. Функции первого приближения $q_{mnl}^{(01)}$ и $q_{mnl}^{(10)}$ ищем в виде

$$
(4.9)\qquad q_{mnl}^{(10)} = A_{10} \cos(n-1)\xi \cos(n-1)\eta + B_{10} \cos(n+1)\xi \cos(n+1)\eta
$$

и аналогично для $q_{mnl}^{(01)}$. Используя (4.7), находим

$$
(4.10)\qquad (n-1)A_{10} = (n+1)B_{10} = {}^1\!/_4\,(m^2 - {}^1\!/_4)\,a/\mu
$$

Для определения коэффициентов в $q_{mnl}^{(01)}$ используем граничное условие по ξ, которое можно записать в виде

$$
(4.11)\qquad -\operatorname{ctg}\xi_0 \frac{\partial}{\partial\xi} q_m + \frac{\varkappa m}{\rho} s q_m |_S = 0
$$

где $\rho = R + s$, s выражается через ξ и η согласно (4.2), а q_m является суммой ряда (2.2). В первом приближении кроме равенства $\sin n\xi_0 = 0$ получаем

$$
(4.12)\qquad -\operatorname{ctg}\xi_0 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(q_{mnl}^{(01)} + q_{mnl}^{(10)}\right) + \left(\varkappa m + \frac{1}{2}\right)\frac{a}{\mu}\cos\xi_0 \sin\eta\, q_{mnl}^{(00)}\,|_{\xi=\xi_0} = 0
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках по η, имеем

$$(n-1)(A_{01}+A_{10})=(n+1)(B_{01}+B_{10})=\frac{a}{2\mu}\left(\varkappa m+\frac{1}{2}\right) \tag{4.13}$$

Спектр в этом приближении не меняется.

Во втором приближении появляются три новых функции $\overset{(20)}{q}_{mnl}$, $\overset{(11)}{q}_{mnl}$, $\overset{(02)}{q}_{mnl}$. Ищем их в виде

$$\overset{(20)}{q}_{mnl}=A_{20}\cos(n-2)\xi\sin(n-2)\eta+ \\ +B_{20}\cos n\xi\sin n\eta+C_{20}\cos(n+2)\xi\sin(n+2)\eta \tag{4.14}$$

Для $\overset{(11)}{q}_{mnl}$ и $\overset{(02)}{q}_{mnl}$ используется такая же форма, но чтобы избежать переопределения коэффициента нулевого приближения, положим $B_{02}=0$. Используя соотношение (4.7) и выражения (4.9) для $\overset{(01)}{q}_{mnl}$ и $\overset{(10)}{q}_{mnl}$, найдем коэффициенты в $\overset{(11)}{q}_{mnl}$ и $\overset{(20)}{q}_{mnl}$:

$$(4\mu/a)(n-2)A_{11}=-(m^2-{}^1/_4)A_{01},\quad (4\mu/a)(n+2)C_{11}=-(m^2-{}^1/_4)B_{01} \\ (4\mu/a)nB_{11}=-(m^2-{}^1/_4)(A_{01}+B_{01}) \tag{4.15}$$

$$(8\mu/a)(n-2)A_{20}=-(m^2-{}^9/_4)A_{10},\quad (8\mu/a)(n+2)C_{20}=-(m^2-{}^9/_4)B_{10} \\ (8\mu/a)nB_{20}=-(m^2-{}^9/_4)(A_{10}+B_{10}) \tag{4.16}$$

Воспользуемся краевым условием (4.11), которое во втором приближении дает условие (4.12) и равенство

$$-\operatorname{ctg}\xi_0\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\overset{(00)}{q}_{mnl}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\overset{(02)}{q}_{mnl}+\overset{(11)}{q}_{mnl}+\overset{(20)}{q}_{mnl}\right)-\frac{1}{R^2}\overset{(10)}{q}_{mnl}\frac{\partial s}{\partial\xi}\right]- \\ -\frac{\varkappa m+\frac{1}{2}}{R^2}s\left(s\overset{(00)}{q}_{mnl}-\overset{(01)}{q}_{mnl}-\overset{(10)}{q}_{mnl}\right)\Big|_{\xi=\xi_0}=0 \tag{4.17}$$

Выделяя в (4.17) вклады отдельных фурье-гармоник по η, найдем A_{02}, C_{02}:

$$(n-2)(A_{02}+A_{11}+A_{20})=\left(\varkappa m+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{a^2}{8\mu^2}-\frac{a}{4\mu}(A_{10}+A_{01})\right]+\frac{a}{4\mu}A_{10} \\ (n+2)(C_{02}+C_{11}+C_{20})=\left(\varkappa m+\frac{1}{2}\right)\left[-\frac{a^2}{8\mu^2}-\frac{a}{4\mu}(B_{10}+B_{01})\right]+\frac{a}{4\mu}B_{10} \tag{4.18}$$

и получим равенство

$$n\sin n\xi_0+\frac{1}{R^2}\frac{a}{4\mu}\cos n\xi_0\sin 2\xi_0\left[(B_{10}-A_{10})-\right. \\ \left.-\left(\varkappa m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{\mu}+B_{10}+B_{01}-A_{10}-A_{01}\right)\right]=0 \tag{4.19}$$

определяющее спектр с точностью до $1/R^2$. Представив ξ_0 в виде $\xi_0=\xi_0^{(0)}+\xi_0^{(1)}$, найдем отсюда поправку $\xi_0^{(1)}$:

$$\xi_0^{(1)}=\frac{1}{2\mu^{(0)}}\left(\frac{r_0}{nR}\right)^2\left[\left(\varkappa^{(0)}m+\frac{1}{2}\right)-\right. \\ \left.-\frac{\left(\varkappa^{(0)}m+\frac{1}{2}\right)^2}{n^2-1}+\frac{1}{2}\,\frac{m^2-\frac{1}{4}}{n^2-1}\right] \tag{4.20}$$

Здесь в правой части стоят μ и $\varkappa$ в нулевом приближении. С помощью (4.3) легко найти теперь поправку к μ и $\varkappa$. Учет этой поправки, как и в случае прямоугольного сечения, снимает вырождение спектра по m.

Если в качестве нулевого приближения взять какое-либо из решений (4.5), отличное от (4.8), то соответствующим образом изменится вид функций высших приближений (4.9), (4.14), но выражения для коэффициентов (4.10), (4.13), (4.15), (4.16) и (4.18), а также для поправки к спектру (4.20) останутся прежними.

Рассмотрим кратко вопрос о произвольных добавках вида $Az+B$, о которых говорилось в п. 2. Проделанные до сих пор вычисления не допускали их введения. Однако в случае кругового сечения, в отличие от прямоугольного, в процессе итерации добавки обязательно возникают. Более того, так как в каждом порядке итерации появляется несколько новых функций, приходится вводить и несколько коэффициентов указанного типа. Краевые условия в заданном приближении определяют не все коэффициенты, а лишь такую их линейную комбинацию, которая обеспечивает в этом приближении однозначное выражение для рядов q_m и $q_m^{(k)}$. Использование более высоких приближений позволяет найти все коэффициенты однозначно.

В заключение отметим, что результаты п.4 можно применить и к случаю круговой трубки эллиптического сечения. Для этого нужно лишь соответствующим образом изменить формулы (4.3), связывающие a и μ с ξ_0 и размерами сечения.

Поступила 16 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1954, т. 18, № 1.
2. *Greenspan H. P.* On the general theory of contained rotating fluid motions. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, pt. 3.
3. *Greenspan H. P.* On the transient motion of a contained rotating fluid. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20, pt. 4.
4. *Черноусько Ф. Л.* Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
5. *Рвалов Р. В., Роговой В. М.* О вращательных движениях тела с полостью, содержащей жидкость. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
6. *Рвалов Р. В.* Краевая задача о свободных колебаниях вращающейся идеальной жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 4.
7. *Докучаев Л. В., Рвалов Р. В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 2.