

СОСТАВНЫЕ УСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ НА ПОТОКЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

В. С. ПОТАПКИН

(Москва)

Рассматривается задача о плоских установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды, вызванных давлением, периодически распределенным по поверхности потока идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной глубины. Предполагается, что эти волны не исчезают при переходе давления в постоянное, а обращаются в свободные волны, существующие при постоянном давлении и специальных значениях скорости потока. Такие волны, как и в [1], где рассмотрен поток бесконечной глубины, будут называться составными в отличие от вынужденных волн, пропадающих вместе с переменной частью давления. Дается общий метод расчета характеристик составных волн. До конца рассчитаны первые три приближения. Найдено приближенное уравнение профиля волны.

1. Постановка задачи и вывод основных уравнений. Рассматривается плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной средней глубины h . Неподвижно относительно дна потока вдоль поверхности жидкости распределено давление $p = p_0(x) + p_0'$, где $p_0' = \text{const}$, $p_0(x)$ — периодическая функция горизонтальной координаты x . Предположим, что поток на дне имеет заданную среднюю скорость c , направленную в сторону роста координаты x . Благодаря периодически распределенному давлению поверхность примет форму неподвижной периодической волны. Если всей жидкости сообщить скорость $-c$, то по поверхности жидкости побегут волны со скоростью $-c$, а на дне будут происходить колебательные движения, параллельные дну.

Пусть искомая волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вершины гребня. Совместим ось y с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат примем точку пересечения оси y со свободной поверхностью, а ось x направим вправо (фиг. 1).

Введем обозначения: φ — потенциал скоростей; ψ — функция тока; $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей, компоненты скорости по x и y равны соответственно U и V , тогда на плоскости течения, которая принимается за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$

$$U = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Рассмотрим один период волн от $-\lambda/2$ до $\lambda/2$, что графически соответствует прямоугольному образованию с волнистой верхней стороной. Пусть на стороне AOB $\psi = 0$, а на дне $CO'D$ $\psi = \psi_0 = ch$ — расход потока в единицу времени. На линии OO' положим $\varphi = 0$, тогда на BC $\varphi = -\varphi_0/2 = -c\lambda/2$, а на AD $\varphi = c\lambda/2$.

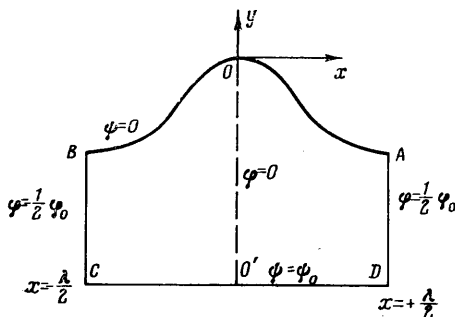
Отобразим конформно область $AOB CO'D$ на плоскость $w = \varphi + i\psi$, на которой образуется прямоугольник. Затем отобразим его на кольцо с единичным внешним радиусом и с центром в начале координат плоскости комп-

лексного переменного $u = u_1 + iu_2$. Для этого положим

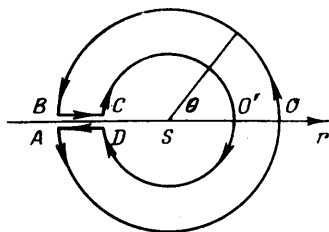
$$(1.1) \quad u = \exp\left(\frac{2\pi i w}{\lambda c}\right) = re^{i\theta}$$

где θ — угол радиуса вектора r с осью u_1 (фиг. 2).

Если обозначить $\exp(-2\pi h/\lambda) = r_0$, то в плоскости u получим кольцо с радиусами 1 и r_0 соответственно и с разрезом по отрицательной действительной полуоси. При этом отрезок $-c\lambda/2 \leq \varphi \leq c\lambda/2$, отвечающий свободной поверхности, перейдет во внешнюю окружность кольца радиуса 1, а



Фиг. 1



Фиг. 2

отрезок, соответствующий дну — во внутреннюю окружность радиуса r_0 . Отображение рассмотренного кольца в плоскости u на область одной волны плоскости z найдется из соотношения

$$(1.2) \quad \frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{f(u)}{u}$$

где функция $f(u)$ подлежит определению из граничных условий.

Чтобы придать функции $f(u)$ физический смысл, введем, как обычно,

$$(1.3) \quad \omega(u) = -i \ln f(u) = \Phi(u) + i\tau(u)$$

Из (1.1) — (1.3) очевидно $dw/dz = -c \exp(-i\omega) = -c \exp(\tau - i\Phi)$, откуда

$$(1.4) \quad |q| = ce^\tau, \arg q = \Phi$$

Из (1.4) видно, что τ — показатель скорости q ; Φ — угол между вектором скорости q и осью x .

Функция $\ln f(u)$ голоморфная и раскладывается в рассматриваемом кольце в ряд Лорана с действительными коэффициентами

$$(1.5) \quad \ln f(u) = i\omega(u) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\left(\frac{u}{r_0}\right)^n + \left(\frac{r_0}{u}\right)^n \right]$$

На свободной поверхности $u = \exp(i\theta)$ имеем

$$(1.6) \quad -\tau(\theta) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (r_0^n + r_0^{-n}) \cos n\theta,$$

$$\Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (r_0^{-n} - r_0^n) \sin n\theta$$

Из последнего соотношения вытекает, что условие симметрии волны выполнено. На дне $u=r_0 \exp(i\theta)$ и из (1.5) получаем, что $\Phi(\theta)=0$. Таким образом, удовлетворено и условие непротекания на дне.

Далее обозначим коэффициенты разложений Φ и τ следующим образом: $b_0=A_0$, $b_n(r_0^n+r_0^{-n})=A_n$, $b_n(r_0^{-n}-r_0^n)=B_n$, откуда $A_n=v_n B_n/3n$. Нормируя функции Φ и τ , получим

$$(1.7) \quad A_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\eta) d\eta, \quad A_n = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\eta) \cos n\eta d\eta$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\eta) \sin n\eta d\eta$$

Для вывода основного уравнения задачи рассмотрим интеграл Бернулли на поверхности, где $p=p_0'+p_0(x)$

$$(1.8) \quad \frac{1}{\rho} (p_0' + p_0(x)) = c_1 - gy - \frac{1}{2} q^2$$

здесь $c_1 = \text{const}$, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести.

Продифференцируем (1.8) по θ

$$(1.9) \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp_0(x)}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -g \frac{dy}{d\theta} - \frac{1}{2} \frac{dq^2}{d\theta}$$

Из (1.2) и (1.3) при $u=e^{i\theta}$ имеем

$$(1.10) \quad \frac{dx}{d\theta} + i \frac{dy}{d\theta} = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau+i\Phi} = -\frac{\lambda}{2\pi} e^{-\tau} (\cos \Phi + i \sin \Phi)$$

В силу (1.10) и (1.4) соотношение (1.9) примет вид

$$\left(\frac{1}{\rho g} \frac{dp_0(x)}{dx} \cos \Phi + \sin \Phi \right) \frac{\lambda g}{c^2 \pi} = \frac{2}{3} \frac{d}{d\theta} (e^{-3\tau})$$

Пусть теперь $\tau_0 = \tau(0)$ и

$$(1.11) \quad 2\pi c^2 \exp(3\tau_0)/3g\lambda = 1/\mu$$

Проинтегрируем полученное из (1.10) выражение, и так как при этом постоянная интегрирования оказывается равной $c_2 = \exp(3\tau_0)$, то окончательно

$$e^{3\tau} = \frac{3g\lambda}{2\pi c^2 \mu} \left[1 + \mu \int_0^\eta \left(\sin \Phi(\theta) + \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0(x)}{dx} \cos \Phi(\theta) \right) d\theta \right]$$

Для дальнейшего выгодно взять логарифмическую производную от этого выражения. Тогда

$$(1.12) \quad \frac{d\tau}{d\theta} = \frac{1}{3} \mu H[\Phi(\theta), Q(\theta)] \left[1 + \mu \int_0^\theta H[\Phi(\eta), Q(\eta)] d\eta \right]^{-1}$$

$$H = [\Phi(\theta), Q(\theta)] = \sin \Phi(\theta) + Q(\theta) \cos \Phi(\theta), \quad Q(\theta) = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0(x)}{dx}$$

Используя разложение (1.6) по действительной части $\tau(\theta)$ аналитической функции $-\iota\omega$, восстановим ее мнимую часть $\Phi(\theta)$ для внешнего контура кольца в плоскости u . Вводя общепринятые обозначения

$$\varphi_n(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\eta, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin n\theta$$

$$(1.13) \quad K(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\theta) \varphi_n(\eta)}{\nu_n}$$

$$\nu_n = 3n \frac{1+r_0^{2n}}{1-r_0^{2n}} = 3n \operatorname{cth}(2\pi n h/\lambda)$$

$\varphi_n(\theta)$ — собственные функции, ν_n — собственные значения ядра $K(\eta; \theta)$, получаем формулу обращения типа Дини [2] для кольца

$$\Phi(\theta) = 3 \int_0^{2\pi} \frac{d\tau}{d\eta} K(\eta; \theta) d\eta$$

Подставляя в эту формулу выражение (1.12), получаем основное интегральное уравнение задачи

$$(1.14) \quad \Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} H[\Phi(\eta); Q(\eta)] \left[1 + \mu \int_0^{\eta} H[\Phi, Q] d\eta_1 \right]^{-1} K(\eta, \theta) d\eta$$

Полученное уравнение неоднородно, так как $\Phi=0$ ему не удовлетворяет. Величины x и y , определяющие профиль волны, зависят как от Φ , так и от τ . Параметрические уравнения профиля, получаемые из (1.10), таковы:

$$(1.15) \quad x = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\theta} e^{-\tau(\eta)} \cos \Phi(\eta) d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{\theta} e^{-\tau(\eta)} \sin \Phi(\eta) d\eta$$

Так как функция давления $Q(\theta)$ имеет ту же симметрию, что и волна, то ее также, как и функцию $\Phi(\theta)$, следует считать представленной в форме ряда Фурье по синусам. Введем далее малый параметр ε , такой, что $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и представим разложение функции давления в виде

$$Q(\theta) = \frac{1}{\rho g} \frac{dp_0(x)}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+2} d_n \sin n\theta$$

предполагая, что ряд в последнем выражении сходится при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, из (1.11), (1.6) и (1.7) имеем

$$(1.16) \quad \mu = \mu_0 \exp \left[-3 \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \tau(\eta) \cos n\eta d\eta \right] \right],$$

$$\mu_0 = \frac{3}{2} \frac{g\lambda}{\pi c^2}$$

Разлагая экспоненту в выражении для μ , получим

$$\mu = \mu_0 + \mu^*[\tau(0)]$$

Очевидно, μ определяется скоростью потока на вершине гребня, и далее в соответствии с методикой Некрасова [2] следовало бы искать решение в виде разложения по μ^* . Параметр μ^* оказывается единственным в случае свободной волны (в постановке Некрасова). В случае же волн вынужденных и рассматриваемых составных волн имеется второй малый параметр ε , в виде ряда по степеням которого представлено заданное распределение давления. Естественно этот параметр считать независимым, а параметр μ^* искать как функцию ε в виде ряда по степеням этого параметра [1]. При этом необходимо учесть требование, чтобы в случае, когда все $d_n=0$, волна не пропадала, а переходила в свободную. Этому требованию можно удовлетворить, задавая выражение $1/c^2$, так же как и в случае свободной волны [1], в виде

$$1/c^2 = (1 - \alpha \varepsilon^2) / c_*^2$$

где c_* определится из

$$(1.17) \quad \mu_0 = v_1 = 3g\lambda / 2\pi c_*^2$$

величина c_*^2 соответствует линейной свободной волне. Параметр α не имеет самостоятельного физического смысла. Его введение позволит рассматривать как вынужденную волну $\alpha=0$, так и составную $\alpha=1$. Параметр ε^2 характеризует малое изменение заданной скорости, поэтому выражение для μ примет вид

$$(1.18) \quad \mu = \mu_0 (1 - \alpha \varepsilon^2) \exp \left[3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n + A_0 \right]$$

Составим теперь уравнение для определения A_0 , входящего в выражение для μ . При изменении θ от 0 до 2π абсцисса x уменьшается на λ . Следовательно, из (1.15) имеем

$$-\lambda = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\tau(\theta)} \cos \Phi(\theta) d\theta$$

Умножая обе части этого равенства на $\exp(-A_0)$, получаем

$$(1.19) \quad e^{-A_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta} \cos \Phi(\theta) d\theta$$

Это уравнение послужит для определения A_0 .

Вернемся к основному интегральному уравнению (1.14). Положим далее, как и в случае уравнения Некрасова,

$$(1.20) \quad \Psi(\theta) = \left[1 + \mu \int_0^{\theta} H[\Phi(\eta); Q(\eta)] d\eta \right]^{-1}$$

Подставим (1.20) в (1.14) и получим

$$(1.21) \quad \Phi(\theta) = \mu \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) H[\Phi(\eta); Q(\eta)] \Psi(\eta) d\eta$$

Учитывая, что $\Psi_0=1$, проинтегрируем полученное тождество (1.20), тогда

$$(1.22) \quad \Psi(\theta) = 1 - \mu \int_0^{\theta} \Psi^2(\eta) H[\Phi(\eta); Q(\eta)] d\eta$$

Полученная система уравнений (1.21) и (1.22) эквивалентна уравнению (1.14). Итак, задача свелась к решению системы двух функциональных и двух трансцендентных уравнений относительно неизвестных функций Φ , Ψ и констант μ и A_0 .

2. Построение решения системы. Система уравнений (1.18), (1.19), (1.21), (1.22) решается в форме разложений в ряд по введенному выше параметру ε .

$$(2.1) \quad \Phi(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi_n(\theta), \quad \Psi(\theta) = \Psi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n(\theta)$$

$$\mu = \mu_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mu_n, \quad A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_{0n} \varepsilon^n$$

Разложения $\sin \Phi$ и $\cos \Phi$ были получены в работе [1]. Так что, вводя коэффициенты $\Gamma_0=1$, $\Gamma_{2m-1}=(-1)^{m+1}/(2m-1)!$, $\Gamma_{2m}=(-1)^m/(2m)!$, получим

$$\sin \Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n s_n, \quad s_n = \Phi_n + \sum_{m=2}^{m \leq \frac{1}{2}(n+1)} \Gamma_{2m-1} (2m-1)! \sum_{j=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\alpha_j!} \Phi_j^{\alpha_j}$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 2m-1, \quad \sum_{k=1}^n k \alpha_k = n$$

Здесь выделен член с Φ_n , так как Φ_{n-1} в формуле для s_n не содержится. Аналогично

$$\cos \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n, \quad c_n = \sum_{m=1}^{m \leq n/2} \Gamma_{2m} (2m)! \sum_{j=1}^{n-2} \prod_{i=1}^{n-2} \frac{1}{\alpha_j!} \Phi_j^{\alpha_j}$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j' = 2m, \quad \sum_{j=1}^n j \alpha_j' = n$$

Подставив разложения (2.1) в (1.21) и (1.22) и учтя разложения по ε для $\sin \Phi$ и $\cos \Phi$, приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε . Таким путем придем к уравнениям для коэффициентов разложений Φ и Ψ . Сравнение (1.17) и (2.1) показывает, что коэффициенты A_n и B_n содержат ε , начиная с n -й степени и представляются в виде рядов по ε . Последнее вытекает как из построения решения уравнения (1.21), так и

из самой сути приближений, как поисков более высоких гармоник, т. е.

$$A_n = \sum_{k=n}^{\infty} A_n^k \varepsilon^k, \quad B_n = \sum_{k=n}^{\infty} B_n^k \varepsilon^k \text{ или, считая, что } A_n^{m < n} = 0, \text{ можно записать}$$

$$A_n = \sum_0^{\infty} A_n^k \varepsilon^k = v_n / 3\pi n \int_0^{2\pi} \Phi(\eta) \sin j\eta d\eta. \quad \text{Подставляя в последнее соотношение разложение } \Phi(\eta), \text{ получим}$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_n^k \varepsilon^k = \frac{1}{\pi} \frac{v_n}{3n} \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Phi_r(\eta) \sin n\eta d\eta$$

Коэффициенты A_n показывают вклад соответствующей гармоники $\sin n\eta$ в зависимости от ε . Коэффициенты же разложения в ряд по ε самих коэффициентов A_n имеют вид

$$(2.2) \quad A_n^{j > n} = \frac{1}{\pi} \frac{v_n}{3n} \int_0^{2\pi} \Phi_j(\eta) \sin n\eta d\eta, \quad A_n^{j < n} = 0$$

В уравнении для μ содержится

$$\sum_1^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \varepsilon^j A_n^j = \varepsilon A_1^1 + \varepsilon^2 (A_1^2 + A_2^2) + \varepsilon^3 (A_1^3 + A_2^3 + A_3^3) + \dots$$

Находя последовательные приближения Φ_n , можно с помощью (2.2) вычислять эту сумму с неограниченной точностью. Из (1.16) видно, что

μ как бы состоит из двух частей. Вклад $\exp 3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n$ задается

$$(2.3) \quad \exp 3 \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \beta_j$$

После дифференцирования (2.3) по ε и перемножения рядов получим, что

$$(2.4) \quad \beta_n = \frac{3}{n} \sum_{r=0}^{n-1} (n-r) \beta_r \sum_{j=1}^{n-r} A_j^{n-r}$$

Соотношение (1.19), как указано, послужит нам для определения A_0 . Положим

$$(2.5) \quad \exp \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r p_r$$

Перемножая в (2.5) ряды и опять дифференцируя по ε , получим аналогично

$$p_n = 1/n \sum_{j=0}^{n-1} (n-j) p_j \sum_{k=1}^{n-j} A_k^k \cos k\theta.$$

Рассчитаем далее весь интеграл из (1.11). Имеем

$$\begin{aligned}\exp(-A_0) &= 1/2\pi \int_0^{2\pi} \exp\left(\sum_1^{\infty} A_n \cos n\theta\right) \cos \Phi(\theta) d\theta = \\ &= 1/2\pi \int_0^{2\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r p_r \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varepsilon^n d\theta = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \gamma_i.\end{aligned}$$

Перемножая ряды и производя интеграцию, получим

$$\begin{aligned}(2.6) \quad \gamma_0 &= 1, \quad \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = \frac{1}{4} (A_1^1)^2 - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_1^2 d\theta \\ \gamma_3 &= \frac{1}{2} A_1^1 A_2^2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\Phi_1 \Phi_2 + \frac{1}{2} A_1^1 \Phi_1^2 \cos \theta \right) d\theta \\ \gamma_4 &= \frac{1}{64} (A_1^1)^4 + \frac{1}{8} (A_1^1)^2 A_2^2 + \frac{1}{2} A_1^1 A_1^3 + \frac{1}{4} (A_1^2)^2 + \\ &+ \frac{1}{4} (A_2^2)^2 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} \Phi_1^2 \left[\frac{1}{2} (A_1^1)^2 \cos^2 \theta + A_1^2 \cos \theta + \right. \right. \\ &\left. \left. + A_2^2 \cos^2 \theta \right] + \Phi_1 \Phi_3 + A_1^1 \Phi_1 \Phi_2 \cos \theta + \frac{1}{24} \Phi_1^4 + \frac{1}{2} \Phi_2^2 \right\} d\theta\end{aligned}$$

Однако в выражение для μ входит $\exp 3A_0$. Очевидно,

$$\exp(3A_0) = [\exp(-3A_0)]^{-3} = 1 / \left(\sum_0^{\infty} \varepsilon^j \gamma_j \right)^3 = \sum_0^{\infty} \varepsilon^n \xi_n$$

тогда $\sum_0^{\infty} \varepsilon^n \xi_n \left(\sum_0^{\infty} \varepsilon^j \gamma_j \right)^3 = 1$. Из последнего соотношения

$$\begin{aligned}(2.7) \quad \xi_0 &= 1, \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = -3\gamma_2, \quad \xi_3 = -3\gamma_3 \\ \xi_4 &= -3(\gamma_4 - 2\gamma_2^2), \quad \exp(3A_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \xi_n\end{aligned}$$

Подставляя теперь все разложения в (1.18), получим для μ_n

$$\begin{aligned}(2.8) \quad \mu_0 &= \text{const}, \quad \mu_1 = \mu_0 \beta_1, \quad \mu_2 = \mu_0 (\beta_2 + \xi_2 - \alpha) \\ \mu_3 &= \mu_0 (\beta_3 + \beta_1 \xi_2 + \xi_3 - \alpha \beta_1) \\ \mu_4 &= \mu_0 (\beta_4 + \beta_2 \xi_2 + \beta_1 \xi_3 + \xi_4 - \alpha \beta_2 - \alpha \xi_2), \dots\end{aligned}$$

Коэффициенты γ_i и A_{0i} связаны, как нетрудно показать, рекуррентными соотношениями $\gamma_i = -1/i \sum_{j=1}^i j A_{0j} \gamma_{i-j}$. Так как $\gamma_0 = 1$, то из этих соотношений

$$(2.9) \quad A_{0n} = -1/n \sum_{j=1}^n j A_{0j} \gamma_{n-j} - \gamma_n, \quad A_{01} = 0, \quad A_{02} = -\gamma_2, \quad A_{03} = -\gamma_3$$

3. Решение уравнений для последовательных приближений основной системы.

1. Для определения первого приближения решения системы (1.21), (1.22) получаются уравнения

$$(3.1) \quad \Phi_1 = \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \Phi_1(\eta) d\eta, \quad \Psi_1 = -\mu_0 \int_0^{\theta} \Phi_1(\eta) d\eta$$

Так как из (1.15) и (1.21) $\mu_0 = v_1 = 3 \operatorname{cth} 2\pi h/\lambda$, то по второй теореме Фредгольма решением первого уравнения (3.1), являющегося линейным однородным интегральным уравнением Фредгольма второго рода, будет $\Phi_1(\theta) = C_{11} \sin \theta$.

Константа C_{11} найдется из условия разрешимости уравнения для третьего приближения Φ . Вычисляя A_1^1 , β_1 и A_{01} , получим из (2.4), (2.6) — (2.9) и (3.1)

$$\Psi_1 = \mu_0 C_{11} (\cos \theta - 1), \quad \mu_1 = \mu_0^2 C_{11}, \quad A_{01} = 0$$

2. Второе приближение основной системы задается так:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \Phi_2 &= \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \Phi_2(\eta) d\eta + \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) [\mu_0 \Phi_1 \Psi_1 + \mu_1 \Phi_1] d\eta = \\ &= \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) \Phi_2(\eta) d\eta + \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) P_2(\eta) d\eta \\ \Psi_2 &= - \int_0^{\theta} (\mu_0 \Phi_2 + 2\mu_0 \Psi_1 \Phi_1 + \mu_1 \Phi_1) d\eta \end{aligned}$$

Прибавляя $P_2(\theta)$ к обеим частям первого уравнения (3.2), получим эквивалентное ему уравнение

$$(3.3) \quad \Phi_2(\theta) + P_2(\theta) = \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) [\Phi_2(\eta) + P_2(\eta)] d\eta + P_2(\theta)$$

По третьей теореме Фредгольма условие разрешимости неоднородного уравнения

$$(3.3), \text{ а следовательно, и (3.2), имеет вид } \int_0^{2\pi} P_2(\eta) \Phi_1(\eta) d\eta = 0. \text{ Нетрудно видеть, что}$$

это равенство выполняется. Тогда решением уравнения (3.3) будет сумма общего решения однородного уравнения $\bar{\Phi}_2 = C_{12} \sin \theta$ и частного решения данного уравнения, определяемого при формуле [1]

$$\bar{\Phi}_2 = \mu_0 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_{i2} \Phi_i(\theta)}{v_i - \mu_0} = \frac{1}{2} C_{11}^2 \frac{\mu_0^2}{v_2 - \mu_0} \sin 2\theta, \quad a_{i2} = \int_0^{2\pi} P_2(\eta) \Phi_i(\eta) d\eta$$

Тогда $\Phi_2(\theta) = C_{12} \sin \theta + C_{22} \sin 2\theta$, коэффициент C_{12} найдется из условия разрешимости уравнения для Φ_4 , а $C_{22} = \mu_0^2 C_{11}^2 / 2(v_2 - \mu_0)$. Подсчитывая A_1^2 , A_2^2 , β_2 , ξ_2 и γ_2 , получим

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu_0 \left[\mu_0 C_{12} + C_{11}^2 \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{12} \mu_0^2 \frac{8v_2 - 5\mu_0}{v_2 - \mu_0} \right) \right] - \alpha \mu_0 \\ A_{02} &= \frac{1}{4} C_{11}^2 \left(1 - \frac{1}{9} \mu_0 \right)^2 \end{aligned}$$

$$\Psi_2(\theta) = (\mu_0 C_{12} + C_{11}^2 \mu_0^2) (\cos \theta - 1) + \frac{1}{4} \mu_0^2 C_{11}^2 \frac{2\nu_2 - \mu_0}{\nu_2 - \mu_0} (\cos 2\theta - 1)$$

3. Нахождение третьего приближения основной системы проводится аналогично. Уравнение для $\Phi_3(\theta)$ имеет вид

$$(3.4) \quad \Phi_3(\theta) = \mu_0 \int_0^{2\pi} K(\eta; \theta) [\Phi_3(\eta) + P_3(\eta)] d\eta$$

$$\mu_0 P_3(\eta) = \mu_0 \Phi_1 \left(\Psi_2 + \Gamma_3 \Phi_1^3 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \Psi_1 + \frac{\mu_2}{\mu_0} \right) + \mu_0 \Phi_2 \left(\Psi_1 + \frac{\mu_1}{\mu_0} \right) + \mu_0 d_1 \sin \eta$$

Подставляя значение функций и коэффициентов в $P_3(\theta)$, получим

$$P_3(\theta) = \left\{ \left[\frac{5}{8} + \mu_0^2 C_{11}^2 \frac{-2\nu_2 + 5\mu_0}{24(\nu_2 - \mu_0)} - \alpha C_{11} + d_1 \right] \sin \theta + \right.$$

$$\left. + \mu_0 C_{11} C_{12} \sin 2\theta + \frac{1}{8} C_{11}^2 \left[\frac{1}{3} + \mu_0^2 \frac{2\nu_2 + \mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right] \sin 3\theta \right\}$$

Как и в предыдущем пункте, условие разрешимости уравнения (3.4) аналогично рассмотренному в п. 2: $\int_0^{2\pi} P_3(\theta) \sin \theta d\theta = 0$. Оно равносильно требованию равенства

нулю коэффициента при $\sin \theta$ в $P_3(\theta)$. Выполнение этого условия приводит к уравнению для определения C_{11}

$$(3.5) \quad \left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2\nu_2 + 5\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) C_{11}^3 - \alpha C_{11} + d_1 = 0$$

Заметим, что при $d_1 = 0$ уравнение (3.5) переходит в уравнение для C_{11} в случае свободной волны. Далее, как и в случае для Φ_2 , находим

$$\Phi_3 = C_{13} \sin \theta + C_{23} \sin 2\theta + C_{33} \sin 3\theta$$

$$C_{23} = C_{11} C_{12} \frac{\mu_0^2}{\nu_2 - \mu_0}, \quad C_{33} = \frac{1}{8} C_{11}^3 \frac{\mu_0}{\nu_3 - \mu_0} \left(\frac{1}{3} + \mu_0^2 \frac{2\nu_2 + \mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right)$$

4. Дальнейший весьма громоздкий расчет величин Ψ_3 , μ_3 , A_{03} , Φ_4 , Ψ_4 , μ_4 здесь не приводим. Отметим только, что соответствующие интегральные уравнения будут аналогичны случаю $n=2$. Из условия разрешимости уравнения для Φ_4 следует

$$C_{12} = -\mu_0 C_{11} \left[\left(\frac{5}{8} + \frac{1}{24} \mu_0^2 \frac{-2\nu_2 + 5\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) C_{11}^3 - \alpha C_{11} + d_1 \right] :$$

$$: \left[\frac{1}{8} C_{11}^2 \left(15 + \mu_0^2 \frac{-2\nu_2 + 5\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) - \alpha \right] = 0$$

В самом деле, в числителе последнего выражения стоит форма (3.5), а знаменатель, как можно показать, не равен 0.

5. Профиль искомой волны задается параметрическими уравнениями (1.15). Для определения профиля в явном виде исключаем θ из (1.15), тогда

$$(3.6) \quad y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k} \left\{ \varepsilon C_{11} (\cos kx - 1) + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{1}{6} \mu_0 C_{11}^2 \frac{-\nu_2 + 4\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} (\cos 2kx - 1) + \right.$$

$$+ \frac{1}{3!} \varepsilon^3 \left[\left(6C_{13} + \frac{9}{8} C_{11}^3 + \frac{1}{24} \mu_0^2 C_{11}^3 \frac{-6\nu_2 + 27\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) (\cos kx - 1) + \right.$$

$$\left. + \left(2C_{33} - \frac{7}{24} C_{11}^3 + \frac{1}{72} \mu_0 C_{11}^3 \frac{2\nu_2 - 29\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) (\cos 3kx - 1) \right] + \dots \left. \right\}, \quad k = 2\pi/\lambda$$

Параметр θ можно исключить и из функции давления, выразив ее также через x :

$$\begin{aligned} Q(x, \varepsilon) = & -\varepsilon^3 d_1 \sin kx - \varepsilon^4 \left(d_2 - \frac{1}{6} \mu_0 d_1 C_{11} \right) \sin 2kx + \\ & + \varepsilon^5 \left\{ \left[\frac{1}{16} d_1 C_{11}^2 \left(1 + \frac{1}{3} \mu_0^2 \frac{2\nu_2 - \mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) - \frac{1}{3} \mu_0 d_2 C_{11} \right] \sin kx + \right. \\ & \left. + \left[\frac{1}{16} d_1 C_{11}^2 \left(1 + \frac{1}{9} \mu_0^2 \frac{2\nu_2 + 5\mu_0}{\nu_2 - \mu_0} \right) + \frac{1}{3} \mu_0 C_{11} d_2 - d_3 \right] \sin 3kx \right\} + \dots \end{aligned}$$

4. Вопросы существования и единственности решения. В уравнении профиля (3.6) коэффициент C_{13} определяется из условия разрешимости уравнения для Φ_5 . Числитель C_{13} громоздок, но знаменатель оказывается тем же, что и в выражении для C_{12} . Как можно показать, это оказывается справедливым для любого коэффициента C_{1n} , определяемого из условия разрешимости уравнения для Φ_{n+2} . Все коэффициенты C_{1n} при $n \geq 2$ определяются линейными соотношениями единственным образом, если только отмеченный выше знаменатель отличен от нуля.

Каждый коэффициент C_{1n} определяется коэффициентами C_{11} и d_n . В соответствии с (3.6) и фиг. 1 y может быть отрицательным только при положительных C_{11} . Анализ кубического уравнения (3.5) в свою очередь показывает, что оно имеет положительный корень C_{11} лишь при отрицательных d_1 . Учитывая сказанное выше, можно показать, что знаменатель C_{1n} не может обратиться в нуль, а поэтому C_{1n} , как отмечено, определяется единственным образом. Применяя теперь методы Ляпунова — Шмидта [3] по аналогии с [4], можно установить следующую теорему.

Теорема. Система уравнений (1.21), (1.22), (1.18), (1.19) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ имеет единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение: $\Phi(\theta, \varepsilon)$, $\Psi(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$. Это решение будет аналитической функцией ε .

Из этой теоремы следует абсолютная и равномерная сходимость рядов (2.1). Сходимость рядов (1.15) и (3.6) следует как из этой теоремы, так и из общих теорем анализа о подстановке ряда в ряд.

В заключение хочу поблагодарить Я. И. Секерж-Зеньковича за постановку и обсуждение задачи.

Поступила 23 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Секерж-Зенькович Я. И. О составных установившихся гравитационных волнах конечной амплитуды, ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
2. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1951.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Методы Ляпунова и Шмидта в теории нелинейных уравнений и их дальнейшее развитие. Успехи матем. наук, 1962, т. 17, вып. 2.
4. Секерж-Зенькович Я. И. Об одном виде установившихся волн конечной амплитуды. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.