МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975

УДК 532.546

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ МЕТОДАМИ

Э. А. БОНДАРЕВ

(Якутск)

Интегральные методы, впервые предложенные для решения задач фильтрации в [1], впоследствии были эффективно использованы при изучении трещиновато-пористых сред [2, 3]. Однако реализация метода интегральных соотношений в работах [2, 3] противоречит идее взаимопроникающих континуумов, положенной в основу построения модели фильтрации в трещиновато-пористых средах [4]. Это противоречие впервые отмечено в [5], где указывалось на необходимость введения двух зон изменения давления жидкости, соответствующих распространению возмущений в пористых блоках и трещинах (см. также [6]).

Формальное использование метода интегральных соотношений в работах [2, 3] привело к тому, что размер зоны возмущения в начальный момент времени оказался отличным от нуля. Ниже будет показано, что введение двух таких зон не только устраняет этот недостаток, но и позволяет легко обобщить полученные результаты на случай фильтрации газа.

1. Рассмотрение выполним на примере следующей одномерной задачи:

$$\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial\theta}-(u_2-u_1)=\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial\theta}+(u_2-u_1)=\varepsilon_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}\tag{1.2}$$

$$u_k(y,0)=0,\quad u_k(0,\theta)=1,\quad u_k(\infty,\theta)=0\quad(k=1,2)\tag{1.3}$$

$$u_k=\frac{p_н-p_k}{p_н-p_0},\quad \theta=t/\tau,\quad y=x/\sqrt{\varkappa\tau}$$

p_k — давление жидкости в трещинах и блоках соответственно ($k=1,\ 2$); $p_н$ — начальное давление; p_0 — давление на галерее; τ — время релаксации (запаздывания); $\varkappa$ — коэффициент пьезопроводности трещиновато-пористой среды; ε_1 — отношение упругоемкостей трещин и блоков; ε_2 — отношение проницаемостей блоков и трещин.

Обычно проницаемость трещин гораздо больше проницаемости блоков, а упругоемкость блоков гораздо больше упругоемкости трещин, так что ε_1 и ε_2 — малые параметры.

В соответствие с методом интегральных соотношений примем, что для каждой из сред (трещины и пористые блоки) возмущение давления локализуется внутри некоторой области, размеры которой определяются следующим образом:

$$u_k=\frac{\partial u_k}{\partial y}=0,\quad y=l_k\quad(k=1,2)\tag{1.4}$$

Распределение давлений в каждой зоне будем искать в виде

$$u_1=a_1+a_2\frac{y}{l_1(\theta)}+a_3\frac{y^2}{l_1^2(\theta)},\quad u_2=b_1+b_2\frac{y}{l_2(\theta)}+b_3\frac{y^2}{l_2^2(\theta)}$$

Определяя коэффициенты a_i и b_i $(i=1, 2, 3)$ из граничных условий (1.3), (1.6) и (1.7), получим

(1.5) $$u_k=\left[1-\frac{y}{l_k(\theta)}\right]^2 \qquad (k=1, 2)$$

Для определения функции $l_1(\theta)$ и $l_2(\theta)$ воспользуемся интегральными соотношениями, соответствующими уравнениям (1.1) и (1.2) и граничным условиям (1.4)

(1.6) $$\varepsilon_1\frac{d}{d\theta}\int\limits_0^{l_1(\theta)}u_1\,dy-\int\limits_0^{l_2(\theta)}u_2\,dy+\int\limits_0^{l_1(\theta)}u_1\,dy=-\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}$$

(1.7) $$\frac{d}{d\theta}\int\limits_0^{l_2(\theta)}u_2\,dy+\int\limits_0^{l_2(\theta)}u_2\,dy-\int\limits_0^{l_1(\theta)}u_1\,dy=-\varepsilon_2\left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0}$$

При выводе (1.6) и (1.7) принималось во внимание, что скорость распространения возмущений давления в системе трещин больше, чем в системе пористых блоков. Следовательно $l_1(\theta)>l_2(\theta)$. Это неравенство следует из сравнения уравнений (1.1) и (1.2), а также подтверждается результатами работы [6].

Подставляя (1.5) в (1.6) и (1.7), после несложных преобразований получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $l_1(\theta)$ и $l_2(\theta)$:

(1.8) $$\varepsilon_1\frac{dl_1}{d\theta}=\frac{6}{l_1}+l_2-l_1$$

(1.9) $$\frac{dl_2}{d\theta}=\frac{6\varepsilon_2}{l_2}-l_2+l_1$$

(1.10) $$l_1(0)=l_2(0)=0$$

Анализ системы (1.8), (1.9) показывает, что при малых θ возмущения давления в трещинах и пористых блоках распространяются независимо

(1.11) $$l_1=\sqrt{12\theta/\varepsilon_1},\quad l_2=\sqrt{12\varepsilon_2\theta}$$

Далее поскольку левые части (1.8) и (1.9) всегда положительны, то из (1.8) следует, что при $\theta\to\infty$ разность $(l_1-l_2)\to0$, оставаясь всегда положительной. Интересно, что при этом разность $(l_1^2-l_2^2)\to12$. Действительно, умножая (1.8) на l_1, а (1.9) на l_2 и вычитая второе из первого, после несложных преобразований получим линейное дифференциальное уравнение

(1.12) $$\varepsilon_1\frac{d(\Delta l^2)}{d\theta}+2\Delta l^2=12(1-\varepsilon_2)+(1-\varepsilon_1)2l_2\frac{dl_2}{d\theta},\quad \Delta l^2=l_1^2-l_2^2$$

Пренебрегая ε_2 по сравнению с 1 и замечая, что при этом из (1.9) следует, что $dl_2/d\theta=l_1-l_2$, вместо (1.12) получим

$$\varepsilon_1\frac{d(\Delta l^2)}{d\theta}+2\Delta l^2=12+2(1-\varepsilon_1)l_2(l_1-l_2)$$

При $\theta\to\infty$ в силу ранее сказанного $2l_2\approx l_1+l_2$ и тогда для больших θ из последнего уравнения получаем

(1.13) $$l_1^2-l_2^2=\frac{12}{1+\varepsilon_1}\left(1-e^{-\theta(1+1/\varepsilon_1)}\right)\approx12$$

Используя (1.13), из (1.8) и (1.9) найдем, что при $\theta\to\infty$

(1.14) $$l_1=\sqrt{12(\theta+1)},\quad l_2=\sqrt{12\theta}$$

Заметим, что формулы (1.11) и (1.14) находятся в полном соответствии с результатами [6].

Перейдем к построению решения задачи (1.8)–(1.10). Уравнения (1.8), (1.9) содержат два малых параметра, причем один из них ε_1 — сингулярный. Для упрощения выкладок положим $\varepsilon_2=0$ и будем искать решение укороченной системы

(1.15) $$\varepsilon_1\frac{dl_1}{d\theta}=\frac{6}{l_1}+l_2-l_1,\quad \frac{dl_2}{d\theta}=l_1-l_2$$

методом сингулярных возмущений.

В соответствии с методом [7] нулевое приближение найдем, положив в системе (1.15) $\varepsilon_1=0$

(1.16) $$\frac{6}{l_{10}}-l_{10}+l_{20}=0,\quad \frac{dl_{20}}{d\theta}=l_{10}-l_{20},\quad l_{20}(0)=0$$

Решение системы (1.16) имеет вид

(1.17) $$l_{10}^2-6+6\ln\frac{l_{10}^2}{6}=12\theta$$

(1.18) $$\frac{l_{20}^2+l_{20}\sqrt{l_{20}^2+24}}{12}+\ln\left(1+\frac{l_{20}^2+l_{20}\sqrt{l_{20}^2+24}}{12}\right)=2\theta$$

Пограничные функции Π_0l_1 и Π_0l_2 найдем из следующей системы [7]:

(1.19) $$\frac{d\Pi_0l_2}{dx}=0,\quad x=\frac{\theta}{\varepsilon_1},\quad \frac{d\Pi_0l_1}{dx}=\frac{6}{\sqrt{6}+\Pi_0l_1}-(\sqrt{6}+\Pi_0l_1)+\Pi_0l_2$$

(1.20) $$\Pi_0l_2(0)=0,\quad \Pi_0l_1(0)=-\sqrt{6}.$$

Из первого уравнения системы (1.19) имеем $\Pi_0l_2=\text{const}$. В силу первого начального условия (1.20) эта константа равна нулю. Тогда из второго уравнения (1.19) получаем

(1.21) $$\Pi_0l_1=\sqrt{6}\left[\sqrt{1-\exp\left(-\frac{2\theta}{\varepsilon_1}\right)}-1\right]$$

Ограничимся первым членом асимптотического разложения. В этом случае решение системы (1.15) при начальных условиях (1.10) дается формулой (1.18) и выражением

(1.22) $$l_1(\theta)=l_{10}-\sqrt{6}\left[1-\sqrt{1-\exp(-2\theta/\varepsilon_1)}\right]$$

где l_{10} определяется из (1.17), причем $l_{10}(0)=\sqrt{6}$.

Результаты вычислений для $\varepsilon_1=0.01$, выполненные по формулам (1.17), (1.18) и (1.22), а также результаты численного интегрирования системы (1.15) приведены ниже

θ	0.1	1.0	2.0	3.0	11.0	78.0	108.0
l_1	2.56	3.63	4.69	5.63	10.90	30.05	35.46
l_2	0.23	1.98	3.42	4.57	10.36	29.85	35.29
l	1.10	3.46	4.90	6.00	11.45	30.50	35.80

Здесь же помещены значения функции $l=\sqrt{12\theta}$, представляющей собой размер зоны распространения возмущений в обычной пористой среде [1]. Анализ приведенных результатов показывает, что равенство (1.13) выполняется с большой степенью точности уже при $\theta=100$. При этом разность $(l_1-l_2)=0.2$. Из приведенных данных также следует, что распространение возмущений по трещинам вначале происходит быстрее, чем в обычной пористой среде, а затем, начиная с $\theta=2$, картина меняется на обратную. Возмущения в пористых блоках все время распространяются медленнее, чем в обычной пористой среде. При достаточно больших θ все три скорости выравниваются.

2. Выполненный анализ легко обобщается на случай фильтрации газа. В самом деле, рассмотрим систему уравнений, описывающих фильтрацию идеального газа в трещиновато-пористой среде [8]:

$$\varepsilon_1\frac{\partial p_1}{\partial t}-\frac{p_2^2-p_1^2}{\tau_1}=\varkappa'\frac{\partial^2 p_1^2}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial p_2}{\partial t}+\frac{p_2^2-p_1^2}{\tau_1}=\varepsilon_2\varkappa'\frac{\partial^2 p_2^2}{\partial x^2} \tag{2.1}$$

где $p_{1,2}$ — безразмерные давления, отнесенные к давлению в невозмущенной среде $p_н$; τ_1 — время релаксации трещиновато-пористой среды, заполненной газом; $\varkappa'$ — коэффициент пьезопроводности трещиновато-пористой среды в невозмущенном состоянии.

Поставим для системы (2.1) ту же граничную задачу, что и для системы (1.1), (1.2), а именно

$$p_k(x,0)=1,\quad p_k(0,t)=p_0,\quad p(\infty,t)=1\quad (k=1,2) \tag{2.2}$$

Снова будем искать решение методом интегральных соотношений. Однако в отличие от пункта 1 профили давлений в трещинах и пористых блоках зададим в виде

$$p_i^2=1+(p_0^2-1)\left(1-\frac{x}{l_i'}\right)^2\quad (i=1,2) \tag{2.3}$$

а размеры области распространения возмущений определим следующим образом:

$$p_i^2|_{x=l_i'(t)}=1,\qquad \left.\frac{\partial p_i^2}{\partial x}\right|_{x=l_i'(t)}=0 \tag{2.4}$$

После вычислений, аналогичных выполненным в пункте 1, для определения $l'_{1,2}$ получаем систему обыкновенных уравнений

$$\varepsilon_1 a\frac{dl_1'}{dt}=\frac{6\varkappa'}{l_1'}+\frac{l_2'-l_1'}{\tau_1}\qquad a\frac{dl_2'}{dt}=\frac{6\varepsilon_2\varkappa'}{l_2'}-\frac{l_2'-l_1'}{\tau_1} \tag{2.5}$$

$$a=\frac{3(1-I)}{1-p_0^2},\qquad I(p_0^2)=\int\limits_0^1\sqrt{1-(1-p_0^2)(1-z)^2}\,dz \tag{2.6}$$

Вычисления, выполненные в работе [5], показывают, что интеграл (2.6) можно аппроксимировать следующей простой зависимостью: $I(p_0^2)=1-0.22(1-p_0^2)$, что дает $a=0.66$. Путем введения безразмерных переменных

$$l_i=l_i'(\varkappa'\tau_1)^{-1/2},\quad \theta=t/(a\tau_1)\quad (i=1,2)$$

система (2.5) приводится к виду совершенно идентичному системе (1.8), (1.9). Следовательно, все результаты пункта 1 будут справедливы и в этом случае. Если $\varkappa'$ и τ_1 соответствуют $\varkappa$ и τ, то перераспределению давления жидкости будет соответствовать перераспределение квадрата давления газа, причем скорость распространения возмущений в газе будет больше, чем в жидкости. В соответствии с результатами пункта 1 это увеличение будет примерно $1/\sqrt{a}$-кратным.

Поступила 16 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баренблатт Г. И.* О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме. Изв. АН СССР, ОТН, 1954, № 9.
2. *Авакян Э. А.* Некоторые приближенные решения задач фильтрации в трещиновато-пористой среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4.

3. *Авакян Э. А., Горбунов А. Т., Николаевский В. Н.* Нелинейно-упругий режим фильтрации жидкости в трещиновато-пористых пластах. В кн. Теория и практика добычи нефти. М., «Недра», 1968.
4. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П.* Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
5. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
6. *Бондарев Э. А., Николаевский В. Н.* К постановке задач теории фильтрации однородной жидкости в трещиноватых пористых средах. Научно-техн. сб. по добыче нефти. Всес. нефтегаз. н.-и. ин-т, 1966, вып. 30.
7. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
8. *Желтов Ю. П., Золотарев П. П.* О фильтрации газа в трещиноватых породах. ПМТФ, 1962, № 5.