

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗВИТОГО ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Е. К. ХОЛЩЕВНИКОВА

(Москва)

Уравнение для турбулентной вязкости использовано для исследования развитого течения проводящей жидкости в продольном магнитном поле. Проведен анализ решения этого уравнения в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. Изучено влияние магнитного поля на локальные и интегральные характеристики течения. Выполнен расчет конвективного теплообмена в случае течения жидкого металла при постоянном тепловом потоке в стенку. Показано, что расчетные данные хорошо согласуются с результатами экспериментов в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

Известно, что магнитное поле оказывает сильное стабилизирующее воздействие на течение проводящих жидкостей в каналах. Изучению этого явления посвящено значительное число экспериментальных и теоретических работ [1-10]. Теоретические работы, посвященные указанному вопросу, можно разделить на две группы в соответствии с используемым способом замыкания уравнений, описывающих осредненное движение в турбулентных потоках. В первой группе работ [1, 4-6] используются алгебраические соотношения, связывающие турбулентное трение с осредненными параметрами течения, в частности применяется формула Л. Прандтля для пути смешения, в которую вводится поправочный множитель, учитывающий влияние магнитного поля. Во второй группе работ [7-10] используются дифференциальные уравнения для энергии турбулентности или для компонент тензора напряжений Рейнольдса. Почти во всех перечисленных работах рассматривалась область развитой турбулентности, поэтому наибольшие отклонения расчетных и экспериментальных данных были в области переходных чисел Рейнольдса. С помощью модифицированной теории Л. Прандтля можно рассчитать переходную область, но для этого нужно заранее знать критическое число Рейнольдса [5]; в связи с этим круг рассматриваемых задач сильно сужается.

В последнее время для расчета сложных турбулентных течений в обычной гидродинамике успешно применяется дифференциальное уравнение для турбулентной вязкости [11, 12]. В работе [13] была сделана первая попытка использовать это уравнение для расчета течения в магнитном поле. Однако диссипативный член, учитывающий влияние магнитного поля в уравнении для турбулентной вязкости, был выписан с точностью до некоторой функции, которая должна находиться из сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными или из каких-либо других соображений.

Целью настоящей работы является определение этой функции и выяснение особенностей турбулентного течения в продольном магнитном поле. В том случае, когда вектор магнитной индукции параллелен вектору средней скорости, электромагнитные силы не воздействуют на осредненное течение и влияние магнитного поля на турбулентность проявляется в наиболее чистом виде.

1. Система уравнений и определяющие параметры. Рассмотрим развитое стационарное течение несжимаемой жидкости в канале при наличии продольного магнитного поля $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$, направленного вдоль оси трубы. Такое течение описывается системой уравнений, состоящей из уравнения движения в проекции на продольную координату x , совпадающую с осью трубы, и уравнения для турбулентной вязкости ϵ . Эта система имеет вид

$$(1.1) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{r^i} \frac{d}{dr} \left[(\epsilon + \nu) r^i \frac{du}{dr} \right] = 0$$

$$(1.2) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dr} \left[(\kappa \varepsilon + \nu) r^i \frac{d\varepsilon}{dr} \right] + \alpha \varepsilon \left| \frac{du}{dr} \right| - \frac{\gamma \varepsilon (\beta \varepsilon + \nu)}{(R-r)^2} + A = 0$$

$$A = -r_0 \frac{\sigma B^2 \varepsilon}{c^2 \rho}$$

Здесь ρ — плотность, p — давление, u — продольная компонента осредненной скорости, ν — кинематическая вязкость, r — расстояние от оси канала, σ — проводимость, c — скорость света в вакууме; κ , γ , β , α и r_0 — эмпирические постоянные и функции; A — диссипативный член, учитывающий влияние магнитного поля.

При $i=0$ эти уравнения описывают течение в плоском канале с высотой $2R$, при $i=1$ — в осесимметричном канале радиуса R .

Решение системы (1.1), (1.2) должно удовлетворять граничным условиям

$$(1.3) \quad u=0, \varepsilon=0 \text{ при } r=R; \quad du/dr=0, d\varepsilon/dr=0 \text{ при } r=0$$

Интегрируя (1.1) по площади поперечного сечения, получим

$$(1.4) \quad \left| \frac{du}{dr} \right| = \frac{ru_*^2}{R(\varepsilon + \nu)}, \quad u = \frac{u_*^2}{R} \int_R^r \frac{r}{\varepsilon + \nu} |dr|$$

$$U = \frac{2^i}{R^{i+1}} \int_R^0 r^i u |dr|$$

где U — средняя по сечению скорость, а u_* — динамическая скорость, которая определяется через касательное напряжение трения на стенке τ_w следующим образом

$$(1.5) \quad u_*^2 = |\tau_w / \rho|, \quad |\tau_w| = \nu \rho (du/dr)_w = -R(dp/dx)/2^i$$

Введем коэффициент сопротивления канала λ , пользуясь общепринятой формулой $-dp/dx = \lambda \rho U^2 / (2^{i+1} R)$. Используя (1.5), получим

$$(1.6) \quad \tau_w = \lambda \rho U^2 / 2^{2i+1}, \quad \lambda = 2^{2i+1} u_*^2 / U^2$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$(1.7) \quad r^\circ = \frac{r}{R}, \quad u^\circ = \frac{u}{V}, \quad \nu^\circ = \frac{\nu}{VR}, \quad \varepsilon^\circ = \frac{\varepsilon}{VR}, \quad \text{Ha}^2 = 4^i \frac{\sigma B^2 R^2}{c^2 \rho \nu}$$

$$\text{Re}_w = \frac{u_* R}{\nu} = \left(\frac{d(u/u_*)}{dr^\circ} \right)_w, \quad \text{Re} = 2^i \frac{UR}{\nu}, \quad \text{Re}_w = \frac{\text{Re}}{4^i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$$

Здесь V — характерная скорость, Ha — параметр Гартмана, Re_w и Re — числа Рейнольдса.

Подставим (1.7) в (1.2) и (1.4). Учитывая (1.6) и опуская для удобства индекс у безразмерных величин, получим

$$(1.8) \quad \frac{1}{r^i} \frac{d}{dr} \left[(\kappa \varepsilon + \nu) r^i \frac{d\varepsilon}{dr} \right] + \alpha \varepsilon \left| \frac{du}{dr} \right| - \frac{\gamma \varepsilon (\beta \varepsilon + \nu)}{(1-r)^2} - \frac{r_0 \text{Ha}^2 \nu \varepsilon}{4^i} = 0$$

$$(1.9) \quad \left| \frac{du}{dr} \right| = k \frac{r}{\varepsilon + \nu}, \quad u = k \int_1^r \frac{r}{\varepsilon + \nu} |dr|, \quad U = 2^i \int_1^0 r^i u |dr|$$

где $k=1$, если в качестве характерной скорости V берется u_* , и $k=\lambda/2^{2i+1}$ при $V=U$.

Из (1.7) видно, что безразмерная кинематическая вязкость ν° , которая является параметром уравнений (1.8), (1.9), однозначно связана с Re_w и Re .

Уравнение (1.8) — однородное нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, удовлетворяющее однородным граничным условиям (1.3). Оно имеет тривиальное решение $\epsilon=0$. Для нахождения нетривиальных решений использовался модифицированный метод прогонки, разработанный А. Н. Секундовым и А. Б. Лебедевым. Решение находится численно в результате итерационного процесса. В качестве начального приближения для ϵ задается функция $\epsilon=\epsilon_0 \cos^2(\pi r/2)$. Здесь ϵ_0 — начальное значение турбулентной вязкости на оси канала.

В том случае, когда характерной скоростью является U , неизвестный коэффициент сопротивления λ , входящий в систему (1.8), (1.9), определяется пристрелкой по условию $U=1$.

Эмпирические коэффициенты, входящие в уравнение для турбулентной вязкости (1.8), были определены из условий наилучшего совпадения расчетных и экспериментальных данных [2, 3] по течениям в каналах без магнитного поля и в присутствии продольного магнитного поля. Эти коэффициенты имеют следующий вид:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} &\gamma=12, \quad \beta=0.34, \quad \kappa=2 \\ &\alpha = \begin{cases} 0.28[\epsilon/(7\nu)]^{0.71} & \text{при } \epsilon/(7\nu) \leq 1 \\ 0.28 & \text{при } \epsilon/(7\nu) > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= a(\epsilon/\nu)^b \exp[-\epsilon/(c\nu)], \quad b=0.7, \quad c=21.4 \\ r_{0m} &= 0.07 + 0.06 \exp[-Na^2/A^2], \quad A=140 \\ a &= r_{0m} [(bc)^b \exp(-b)]^{-1} \approx r_{0m}/3.305, \quad bc=15 \end{aligned}$$

Функция α — кусочно-монотонная функция параметра ϵ/ν ; входит в член, определяющий порождение энергии турбулентности; α возрастает от 0 при $\epsilon/\nu=0$ до значения 0.28 и далее остается постоянной. Функция r_0 , входящая в диссипативный член, учитывающий влияние магнитного поля, зависит от двух параметров: ϵ/ν и Na ; с увеличением ϵ/ν r_0 возрастает от нуля при $\epsilon/\nu=0$ до максимального значения r_{0m} , а затем убывает и стремится к нулю при $\epsilon/\nu \rightarrow \infty$; максимум r_{0m} при любых числах Гартмана соответствует значению $\epsilon/\nu=15=bc$; величина r_{0m} убывает при увеличении чисел Na , стремясь к своему асимптотическому значению 0.07 при $Na \rightarrow \infty$.

При выбранных функциях и константах уравнения (1.8), (1.9) позволяют рассчитывать развитые плоские и осесимметричные течения в каналах в широком диапазоне изменения параметров Re и Na . При этом отклонения расчетных данных от экспериментальных по основным интегральным характеристикам составляют величину $\approx 12\%$, т. е. находятся в пределах погрешности эксперимента.

Эмпирическая зависимость для r_0 (1.10) подтверждает концепцию преимущественного подавления магнитным полем поперечных пульсаций скорости. Для обоснования этого утверждения получим приближенную формулу для r_0 из уравнения для энергии турбулентности и закона Ома. Согласно работе [13], диссипативный член A в уравнении (1.2) соответствует магнитогидродинамическому члену A^* в уравнении для энергии турбулентности, имеющему вид

$$A^* = \langle \mathbf{V}' \mathbf{F}' \rangle = \langle \mathbf{V}' (\mathbf{j}' \mathbf{B}) \rangle / (c\rho)$$

Здесь V' , F' и j' — пульсации векторов скорости, электромагнитной силы и плотности тока соответственно. Рассмотрим течение изотропно проводящей жидкости в магнитном поле $\mathbf{B}=(B, 0, 0)$ при $Re_m \ll 1$ (Re_m — магнитное число Рейнольдса). Предположим, что пульсационное электрическое поле E' можно выразить с помощью соотношения

$$(1.11) \quad E' \approx -f(V'B)/c, \quad 0 < f < 1$$

и что пульсационные составляющие вектора скорости по направлениям y и z одинаковы $v' \sim w'$. Тогда $A^* \approx -2\sigma dB^2 \langle v'^2 \rangle / c^2 \rho$, $d=1-f$ или, выражая $\langle v'^2 \rangle$ через энергию турбулентности e ,

$$A^* \approx -\frac{\sigma B^2 e}{c^2 \rho} \frac{2d}{1+0.5(u'^2/v'^2)}$$

Переходя теперь от уравнения для e к уравнению для ϵ (см. [11]) и сопоставляя A^* с A , получим¹

$$(1.12) \quad A \approx -\frac{\sigma B^2 \epsilon}{c^2 \rho} r_0, \quad r_0 = \frac{2d}{1+0.5(u'^2/v'^2)}$$

Проанализируем формулу (1.12) в следующих случаях: 1) вблизи стенки $v' \rightarrow 0$, $u' \rightarrow 0$, $u'/v' \rightarrow \infty$, отсюда $r_0 \rightarrow 0$; согласно (1.10), $r_0 \rightarrow 0$, так как у стенки $\epsilon/v \rightarrow 0$; 2) при удалении от стенки продольные и поперечные пульсации выравниваются ($u'/v' \sim 1$ вблизи оси) и r_0 возрастает. В этом случае отношение ϵ/v также возрастает, и по формуле (1.10) r_0 достигает на оси некоторого конечного значения, зависящего от параметров Ha и Re ; 3) при очень больших числах Рейнольдса ($Re \rightarrow \infty$, $v \rightarrow 0$) все пульсации стремятся к нулю. Если предположить, что при этом поперечные пульсации убывают быстрее, чем продольные, то $r_0 \rightarrow 0$ при $Re \rightarrow \infty$. Можно показать, что $\epsilon/v \rightarrow \infty$ при $Re \rightarrow \infty$. Отсюда по формуле (1.10) $r_0 \rightarrow 0$. Таким образом, в рассмотренных случаях функции (1.10) и (1.12) изменяются одинаково; 4) согласно эмпирической формуле (1.10), в области умеренных магнитных полей r_0 убывает при увеличении чисел Ha . Функция (1.12) даст такую же зависимость для r_0 только в том случае, если считать, что магнитное поле сильнее подавляет поперечные пульсации скорости, чем продольные. Такое представление о механизме воздействия магнитного поля на турбулентность нельзя автоматически распространять на случай очень больших магнитных полей, так как при этом структура турбулентности может отличаться от обычной и аппроксимация (1.11) может быть неверна.

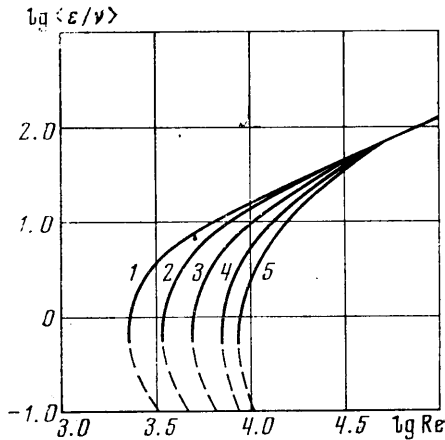
2. Качественное исследование решения в области перехода от ламинарного режима течения к турбулентному. На фиг. 1 показаны расчетные зависимости среднего по сечению отношения $\langle \epsilon/v \rangle$ от числа Re , построенные в логарифмическом масштабе. Каждая кривая, проведенная на фиг. 1, характеризуется определенным значением параметра Ha : 1—0, 2—70, 3—124, 4—207, 5—248. Все кривые имеют вертикальные касательные к точкам минимума Re , где $d Re/d \langle \epsilon/v \rangle = 0$. Пунктиром схематично показаны нижние ветви кривых, соответствующие, согласно данным А. Н. Секундова, неустойчивому решению. Получение этих ветвей требует некоторого видоизменения процесса численного решения, и в настоящей работе такие расчеты не проводились. Из фиг. 1 видно, что в логарифмических координатах расчетная зависимость для течения без магнитного поля (кривая 1) при $\langle \epsilon/v \rangle \geq 15$ выходит на прямую, которая с погрешностью до 2% описывается формулой

$$(2.1) \quad \langle \epsilon/v \rangle = 0.00316 Re^{0.918}$$

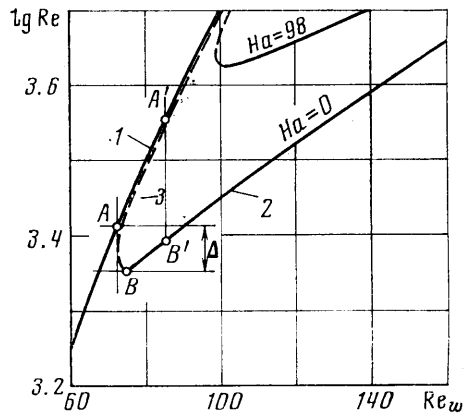
¹ Представление для r_0 (1.12) было предложено А. Б. Ватажиным.

Значения $\langle \varepsilon/\nu \rangle \geq 15$ соответствуют области развитой турбулентности, для которой справедлив универсальный закон сопротивления. При больших числах Re магнитное поле перестает влиять на течение и все кривые для случаев $Ha \neq 0$ сливаются с кривой 1, переходя в зависимость (2.1).

Заметим, что по физическому смыслу отношение ε/ν эквивалентно уровню возмущений в канале, при котором существует стационарный режим течения. Согласно гипотезе А. Н. Колмогорова — Л. Прандтля, $\varepsilon/\nu = k\sqrt{e}L/\nu$; в качестве характеристики возмущенного течения используется число Рейнольдса турбулентности $Re_\varepsilon = \sqrt{e}L/\nu$ (см., например, [9]). В этих



Фиг. 1



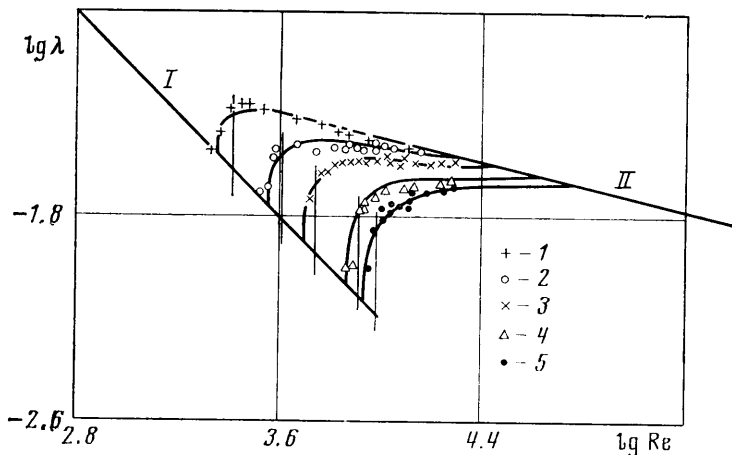
Фиг. 2

формулах приняты обозначения: e — кинетическая энергия турбулентности, L — масштаб турбулентности, k — постоянная. Учитывая сказанное, вполне логично отождествлять турбулентную вязкость в начальном приближении с уровнем начальных возмущений. Назовем отношение $\langle \varepsilon/\nu \rangle$ в точках минимума Re критическим уровнем возмущений для данного числа Ha и обозначим его через $\langle \varepsilon/\nu \rangle_*$. Расчеты показали, что если уровень начальных возмущений достаточно большой и в начальном приближении $\langle \varepsilon/\nu \rangle \geq \langle \varepsilon/\nu \rangle_*$, то критическое число Рейнольдса (будем обозначать его Re_c) при заданном значении Ha постоянно и равно минимальному числу Re , т. е. Re_c — это абсцисса точки, где $d Re/d \langle \varepsilon/\nu \rangle = 0$. Если же в начальном приближении $\langle \varepsilon/\nu \rangle < \langle \varepsilon/\nu \rangle_*$, то с уменьшением ε_0 величина Re_c возрастает и стремится к бесконечности при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$. При $Re < Re_{c, min}$ и любом уровне возмущений $\varepsilon = 0$. Кривые, приведенные на фиг. 1, имеют качественное сходство с кривыми устойчивости, полученными в работах [9, 10]. В этих работах устойчивость течения по отношению к конечным возмущениям изучалась на основе анализа уравнения баланса энергии турбулентности без учета диффузионного и конвективного членов.

Отметим, что, согласно решению уравнения (1.8), переход от ламинарного режима течения к турбулентному сопровождается скачком турбулентной вязкости ε (см. фиг. 1).

На фиг. 2 представлена связь чисел Re и Re_ε для двух случаев: $Ha=0$ и $Ha=98$. Кривая 1 соответствует ламинарному режиму течения $\varepsilon=0$, кривая 2 — устойчивому решению уравнения для турбулентной вязкости $\varepsilon \neq 0$ при большом уровне возмущений в канале, штриховая линия 3 (проведена схематично) — неустойчивому решению $\varepsilon \neq 0$ при малом уровне возмущений. Через точки A и B проведены вертикальная и горизонтальная ка-

сательные к кривой 3—2. Из фиг. 2 видно, что наряду с критическим числом Рейнольдса, определенным по средней скорости в сечении $Re_* = Re_B$, имеется также критическое число Рейнольдса, определенное по динамической скорости $Re_{w*} = Re_{wA}$. Действительно, при $Re_w < Re_{w*}$ и любом уровне возмущений существует только ламинарный режим течения; в диапазоне чисел Рейнольдса $\Delta = Re_A - Re_B$ при большом уровне возмущений и $Re_w > Re_{w*}$ имеет место турбулентный режим течения. Область Δ является областью неоднозначности решения уравнения для турбулентной вязкости при большом уровне возмущений. При уменьшении уровня возмущений ниже критического точка А будет перемещаться вверх по кривой 1 и



Фиг. 3

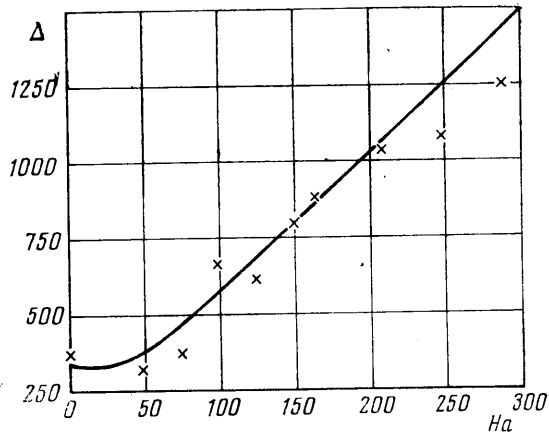
область неоднозначности будет располагаться между кривыми 1 и 2 ($\Delta' = Re_{A'} - Re_{B'}$). По некоторым приближенным оценкам, часть плоскости, заключенная между кривыми 1 и 2 на фиг. 2, соответствует режимам перехода от ламинарного течения к турбулентному, и наоборот. В дальнейшем интервал Δ при большом уровне возмущений будет сопоставляться с областью перемежаемости, которая наблюдается экспериментально при переходных числах Рейнольдса.

3. Влияние продольного магнитного поля на характеристики турбулентного течения в трубе. Наиболее полные экспериментальные данные о влиянии продольного магнитного поля на характеристики турбулентного течения жидкого металла в круглой трубе были получены в работе [2]. Авторам работы [3] удалось подтвердить эти результаты. В этих работах в отличие от предыдущих работ данного направления была выбрана достаточно большая длина начального участка ($l/d \sim 180 \div 220$), поэтому и при больших числах Re течение близко к развитому. Вследствие этого для определения функции r_0 в настоящей работе проводилось сравнение результатов расчетов с опытными данными работ [2, 3]. Эксперименты в работах [2, 3] проводились в условиях большого уровня возмущений, поэтому в расчетах для ϵ_0 принималось значение 0.1.

На фиг. 3 представлены зависимости коэффициента сопротивления λ от числа Re при нескольких значениях параметра Ha . Прямая I соответствует ламинарному режиму течения и определяется уравнением $\lambda = 64/Re$; кривая II представляет собой универсальный закон сопротивления Прандтля для обычного гидродинамического течения; расчетные кривые проведены сплошными линиями, экспериментальные точки обозначены соответ-

ствующими значками. Na : 1—0, 2—74,5, 3—124, 4—208, 5—248. Можно отметить хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных.

Вертикальными прямыми на фиг. 3 отмечены границы области неоднозначности решения Δ . Расчетная зависимость Δ от числа Na показана на фиг. 4 сплошной линией; здесь же нанесены экспериментальные данные. Разброс расчетных точек кривой — того же порядка, что и разброс опытных данных. Расчетные значения критических чисел Рейнольдса при $Na=0$ следующие: $Re_c=2300$, $Re_{w*}=73$. Для чисел $Na \neq 0$ выполняются



Фиг. 4

критериальные соотношения работы [2]: $Re_c/Re_{c,Na=0}=1+0.4N_*$, где $N_* = Na^2/Re_c$ — параметр магнитогидродинамического взаимодействия, и $Re_c=30 Na$ для случая $N_* \gg 1$. Из обработки результатов расчета получается аналогичное соотношение и для Re_{w*} :

$$Re_{w*}/Re_{w*,Na=0}=1+0.146 N_*$$

Наряду с интегральными характеристиками в расчетах определялись и локальные параметры течения ϵ и u . При фиксированном числе Re и увеличении числа Na профили скорости постепенно переходят от более наполненного турбулентного к менее наполненному параболическому профилю. Максимального значения скорость достигает на оси канала. Профили турбулентной вязкости при изменении чисел Na или N_* перестраиваются: при $Na=0$ максимум ϵ лежит вблизи оси канала, при возрастании Na (или N_*) он смещается к стенке. Так, например, при $Re=10^4$ и $Na=248$ ϵ достигает максимума на расстоянии $\sim 0.35 R$ от стенки трубы. Это связано с тем, что магнитное поле сильнее воздействует на течение в тех зонах, где уровень поперечных пульсаций выше. Отношение $\langle \epsilon/v \rangle$ убывает при увеличении Na (или N_*).

Профили скорости, построенные в универсальных координатах $\phi = u/u_*$, $\eta = yu_*/\nu$, при заданном достаточно большом числе Re расслаиваются по параметру Na . Универсальный логарифмический закон скорости $\phi = 5.75 \lg \eta + 5.5$ выполняется (с погрешностью $\sim 10\%$), когда все кривые при разных Na сливаются с кривой II на фиг. 3.

Расчеты показали, что процесс ламинаризации течения при увеличении параметра Na сопровождается увеличением толщины ламинарного подслоя ($\delta_l \sim 0.01$ при $Na=0$ и $\delta_l \sim 0.019$ при $Na=288$), а также увеличением толщины вытеснения δ^* и толщины потери импульса δ^{**} . Значение форм-параметра $N = \delta^*/\delta^{**}$ возрастает от 1.56 при $Na=0$ до 2.5 при $Na=288$.

(последнее значение соответствует ламинарному режиму течения). Все приведенные выше данные относятся к числу $Re=10^4$.

4. Расчет конвективного теплообмена при постоянном тепловом потоке в стенку. Зная распределения u и ϵ , нетрудно рассчитать теплообмен при течении жидкого металла по трубе, на некотором участке которой подводится тепловой поток постоянной интенсивности q_w . Как и раньше, течение может происходить в продольном магнитном поле. В этом случае магнитное поле не взаимодействует с осредненным течением, поэтому в уравнении энергии Джоулеву диссипацию можно не учитывать. В предположении, что теплопроводность вдоль оси мала по сравнению с радиальной, получим уравнение энергии для несжимаемой жидкости в следующем виде:

$$(4.1) \quad \rho c u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Здесь c — удельная теплоемкость, T — температура, λ — коэффициент теплопроводности. Уравнение (4.1) должно удовлетворять условию симметрии $\partial T / \partial r = 0$ при $r=0$. Решая (4.1), в случае осесимметричного течения можно получить следующее выражение для параметра Нуссельта Nu

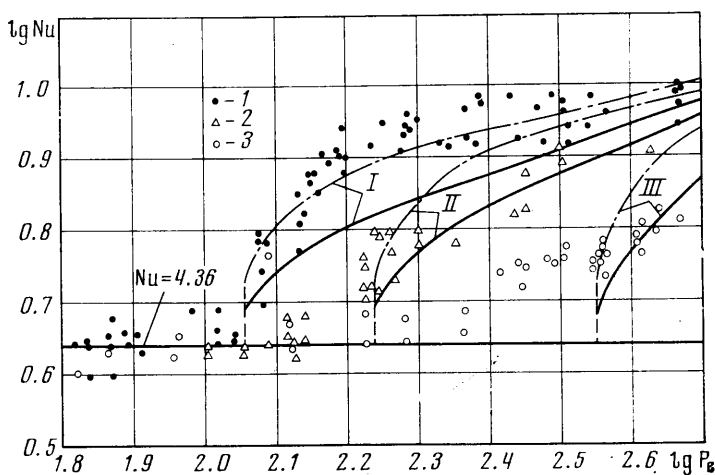
$$(4.2) \quad Nu = \frac{U^2 R^4}{2} \left\{ \int_0^R \frac{\left(\int_0^r r u dr \right)^2}{r [1 + (\epsilon/\nu) (Pr/Pr_t)]} dr \right\}^{-1}$$

где числа Прандтля Pr и Pr_t представляют собой отношения кинематической вязкости ν к ламинарному коэффициенту температуропроводности и турбулентной вязкости ϵ к турбулентному коэффициенту температуропроводности соответственно. Выражение (4.2) впервые было получено Р. Н. Лайоном в работе [14].

Теплообмен жидких металлов в трубах исследовался в ряде работ. Почти во всех экспериментальных работах длина начального участка была достаточна для установления полностью развитого профиля температуры ($l/d \sim 10 \div 20$), однако гидродинамической стабилизации потока в этих условиях не было. Только в выполненной недавно работе [5] длина начального участка была достаточна ($l/d \sim 220$) для установления развитого профиля скорости. В этой работе изучался теплообмен сплава индий — галлий — олово в присутствии однородного продольного магнитного поля. Здесь впервые было получено резкое изменение зависимости $Nu=f(Re)$ ($Re=Pr Re$ — критерий Пекле) при переходе от ламинарного течения к турбулентному. Экспериментальные данные сопоставлялись с результатами расчетов, полученных с помощью модифицированной формулы Ван-Дрифта, в которой учитывалось влияние магнитного поля. Как указывалось в начале статьи, недостатком таких расчетов является необходимость знания Re в каждом конкретном случае.

На фиг. 5 расчетные данные настоящей работы (сплошные и штрихпунктирные линии) сравниваются с опытными данными работы [5]. Здесь I и I' — соответствуют значению $Na=0$, II и 2 — 70, III и 3 — 200. При $Na=200$ длина начального участка, по-видимому, мала: переход от ламинарного режима ($Nu=4.36$) к турбулентному размазан. В расчетах принимались следующие значения параметров: $Pr=0.05$, $Pr_t=0.87$ (сплошные кривые). В области развитой турбулентности расчетные данные хорошо согласуются с интерполяционной формулой Р. Н. Лайона $Nu=7+0.025 Re^{0.8}$. Штриховые линии на фиг. 5 проведены в связи с тем, что расчет перехода

от ламинарного режима течения к турбулентному приводит к разрыву в значениях числа Nu . Протяженность области неоднозначности по координате $\lg Re$ очень мала и не отмечена на графике. Можно отметить, что расчетные данные удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Максимальное отличие результатов расчета от опытных данных имеет место в области чисел Re , примыкающей к переходной, и составляет 20%.



Фиг. 5

Это расхождение можно значительно уменьшить, если считать Pr_t не константой, а функцией параметра ϵ/ν . Штрихпунктирные кривые на фиг. 5 рассчитаны для случая $Pr_t=1$ при $\epsilon/(15\nu) \geq 1$ и

$$Pr_t = 0.1 + 0.9\epsilon/(15\nu) \text{ при } \epsilon/(15\nu) < 1$$

При использовании последней зависимости расчетные значения Nu в области развитой турбулентности с погрешностью 5–10% совпадают со значениями, полученными по интерполяционной формуле $Nu = 5 + 0.025 Re^{0.8}$, которую в ряде работ предлагают использовать для расчетов при низких числах Pr ($Pr \leq 0.1$).

Таким образом, уравнение для турбулентной вязкости (1.2) с эмпирическими коэффициентами (1.10) позволяет рассчитывать течения в каналах в присутствии продольного магнитного поля с достаточно хорошей точностью. Возможность применения этого уравнения для расчетов течений в поперечном поле или в струйных магнитогидродинамических течениях требует дополнительной проверки.

В заключение автор благодарит А. Б. Ватажина и А. Н. Секундова за полезные обсуждения и В. Г. Лущика за ценную информацию.

Поступила 20 IX 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. М., «Наука», 1970.
2. Fraim F. W., Heiser W. H. The effect of a strong longitudinal magnetic field on the flow of mercury in a circular tube. J. Fluid Mech., 1968, vol. 33, pt. 2.
3. Красильников Е. Ю., Лущик В. Г., Николаенко В. С., Паневин И. Г. Экспериментальное исследование течения электропроводной жидкости в круглой трубе в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 2.

4. Абрамович Г. Н., Ковнер Д. С., Луцки В. Г. О воздействии магнитного поля на турбулентность в течении со сдвигом. Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4.
5. *Baushev V. N., Krasil'nikov E. Yu., Lushchik V. G., Panevin I. G.* Investigation of convective heat transfer when liquid metal flows in a pipe in a longitudinal magnetic field Proceeding 5-th International Heat Transfer Conference, Tokyo, 1974, vol. 2, p. 284—288.
6. *Тананаев А. В.* Гидравлика магнитогидродинамических машин. М., Атомиздат, 1970.
7. *Ковнер Д. С., Луцки В. Г.* О турбулентном течении проводящей жидкости в продольном магнитном поле. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 1.
8. *Тульверт В. Ф.* Использование уравнения баланса пульсационной энергии в теории МГД-течений в каналах и трубах. Магнитная гидродинамика, 1973, № 1.
9. *Левин В. Б.* О переходе к турбулентности в магнитогидродинамических течениях при конечных возмущениях. Магнитная гидродинамика, 1970, № 3.
10. *Луцки В. Г.* Об устойчивости потока с поперечным сдвигом по отношению к конечным возмущениям. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
11. *Секундов А. Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
12. *Лебедев А. Б., Секундов А. Н.* Анализ уравнения для турбулентной вязкости в области переходных чисел Рейнольдса. В сб. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 32, стр. 171—177.
13. *Алавидзе Г. Р., Ватажин А. Б.* Описание турбулентных магнитогидродинамических течений с помощью дополнительного дифференциального уравнения для турбулентной вязкости. В сб. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 32, стр. 158—170.
14. *Lyon R. N.* Liquid metal heat — transfer coefficients. Chem. Engng Progr. Sympos. Series, 1951, vol. 47, No. 2.