

**ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ  
ПРИ ОПИСАНИИ ТЕЧЕНИЯ ВБЛИЗИ ШЕРОХОВАТОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ**

А. Б. ЛЕБЕДЕВ, А. Н. СЕКУНДОВ

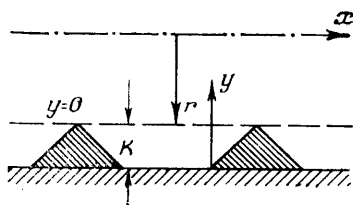
(Москва)

Исследование течения у шероховатой поверхности, а также в трубах и каналах с шероховатыми стенками является одной из важнейших задач прикладной гидродинамики. В работах [1-3] обобщены результаты классических исследований, в которых были выяснены важнейшие свойства течения вблизи шероховатой поверхности. Эти исследования послужили основой для построения многочисленных полуэмпирических теорий, использующих модель «пути смешения» Л. Прандтля (например, [4-6]). Однако эти методы расчета, несмотря на их простоту, обладают всеми недостатками, присущими теории Л. Прандтля — они не универсальны, плохо описывают переход от ламинарного режима течения к турбулентному, неприменимы для расчета сложных неавтомоделных течений.

Между тем анализ экспериментальных данных, полученных, например, в [7], указывает на чрезвычайно сложную структуру течения как в окрестности шероховатой поверхности, так и вдали от нее. В последнее время для описания турбулентного течения вблизи шероховатой поверхности стали разрабатываться модели, использующие дифференциальное уравнение баланса кинетической энергии турбулентности [8].

В данной работе на примере установившегося турбулентного течения несжимаемой жидкости в круглой трубе с шероховатыми стенками анализируются возможности применения модели, использующей для замыкания задачи дифференциальное уравнение для турбулентной вязкости [9].

Дифференциальные уравнения, описывающие установившееся течение несжимаемой жидкости в плоском канале или в трубе, сильно упрощаются за счет того, что в них все конвективные члены обращаются в нуль [10] и все параметры течения зависят только от поперечной координаты. В этом



Фиг. 1

случае уравнение движения может быть разрешено в квадратурах относительно скорости  $u$

(1)

$$u = \int_0^r \frac{r}{R} \frac{u^2}{\epsilon + \nu} dr, \quad u_* = \sqrt{-\frac{R}{\rho} \frac{dp}{dx}}$$

Здесь  $R$  — радиус трубы,  $u_*$  — скорость трения,  $dp/dx$  — градиент давления,  $\rho$  — плотность,  $\epsilon$  — турбулентная вязкость,  $\nu$  — молекулярная кинематическая вязкость. Ось  $x$  направлена вдоль потока, ось  $r$  — по радиусу трубы (фиг. 1).

Задача сводится к отысканию турбулентной вязкости  $\epsilon$ , которую можно определить из решения дифференциального уравнения для турбулентной вязкости [10]

$$(2) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r (\chi \epsilon + \nu) \frac{d\epsilon}{dr} \right\} + \alpha \epsilon \left| \frac{du}{dr} \right| - \frac{\gamma \epsilon (\beta \epsilon + \nu)}{s^2} = 0$$

Здесь  $s$  — кратчайшее расстояние до стенки. Значения коэффициентов  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  принимались равными  $\kappa=2$ ,  $\gamma=50$ ,  $\beta=0.06$ ,  $\alpha=0.2[(\varepsilon/8\nu)^2+1.4(\varepsilon/8\nu)+0.2][(\varepsilon/8\nu)^2-1.4(\varepsilon/8\nu)+1]^{-1}$

Отметим, что данные значения коэффициентов отличаются от предложенных в [9], так как при тех значениях коэффициентов  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , как указывалось в [10], неудовлетворительно описывается переход от ламинарного режима течения к турбулентному. Выбор новых значений коэффициентов позволяет преодолеть эти трудности.

Введя ось  $y$ , направленную от стенки к оси трубы, и обезразмерив соотношение (1) и уравнение (2), получим

$$(3) \quad \frac{1}{1-y} \frac{d}{dy} \left\{ (1-y)(\kappa\varepsilon+\nu) \frac{d\varepsilon}{dy} \right\} + \alpha \frac{\varepsilon(1-y)}{\varepsilon+\nu} - \frac{\gamma\varepsilon(\gamma\varepsilon+\nu)}{s^2} = 0$$

$$y=Ry, \varepsilon=u.R\varepsilon, \nu=u.R\nu, u=u.u$$

Уравнение (3) в случае течения у гладкой поверхности решается при следующих граничных условиях:

$$(4) \quad y=0, \varepsilon=0$$

$$(5) \quad y=1, d\varepsilon/dy=0$$

Рассмотрим гладкую поверхность, к которой сверху «присоединены» элементы шероховатости, высотой  $k$  (фиг. 1). Внутри слоя, заполненного этими элементами, имеется сила, тормозящая поток (сопротивление формы и трения элементов шероховатости), которую необходимо определять из рассмотрения особенностей обтекания элементов шероховатости. Эта задача чрезвычайно сложна, однако при решении прикладных задач не требуется детальных знаний течения около элементов шероховатости. Поэтому естественный путь упрощения задачи сводится к осреднению всех параметров течения вблизи шероховатой поверхности и замене шероховатой стенки эквивалентной гладкой поверхностью ( $y=0$ ).

При осреднении на этой поверхности могут измениться обычные граничные условия и, что самое главное, из-за сопротивления формы элементов шероховатости должна появиться сосредоточенная сила, приложенная к этой эквивалентной поверхности. Учет этой силы усложнит не только уравнение движения, но и структуру замыкающего уравнения для турбулентной вязкости. Поэтому целесообразно рассмотреть такую модель осреднения, в которой эквивалентная плоскость  $y=0$  проходит в окрестности «верхушек» элементов шероховатости. В этом случае можно пренебречь гидродинамическим сопротивлением элементов шероховатости, так как эти элементы окажутся вне области рассмотрения течения. Возможность такого подхода указывается, например, в [11]. В этом случае, на линии  $y=0$  может быть отлична от нуля как осредненная скорость  $u_w$ , так и турбулентная вязкость  $\varepsilon_w$ .

Будем приближенно считать, что скорость  $u_w \approx 0$ , так как между элементами шероховатости, из-за их большого сопротивления скорость потока мала. В отличие от скорости турбулентная вязкость  $\varepsilon_w$  не равна нулю, поскольку, по опытным данным [1], увеличение трения при тении у шероховатой поверхности в основном и происходит из-за роста вязкости вблизи стенки. Примем, что между элементами шероховатости турбулентная вязкость по высоте приблизительно постоянна. Некоторым основанием для этого служит аналогия между течением за элементами шероховатости и течением в следах и струях [3], где турбулентная вязкость  $\varepsilon$  слабо изменяется поперек потока. Тогда естественно принять вместо граничного

условия (5) другое граничное условие

$$(6) \quad y=0, \quad d\varepsilon/dy=0$$

Это условие не противоречит и случаю течения в канале с гладкими стенками. Как было показано в [10], вблизи стенки турбулентная вязкость изменяется по закону  $\varepsilon \sim y^n$ , где  $n=1/2 + \sqrt{\gamma+1}/4 > 1$ . Отсюда ясно, что условие  $y=0, d\varepsilon/dy=0$  выполняется и на гладкой стенке. Такое граничное условие в случае шероховатой стенки позволяет автоматически получить возрастание вязкости на стенке (случай  $\varepsilon_w \neq 0$ ). В работе [8] при анализе уравнения для кинетической энергии турбулентности использовалось аналогичное граничное условие.

Естественно, что при такой модели введения плоскости  $y=0$  в уравнении для турбулентной вязкости (4) может измениться диссипативный член  $-\gamma\varepsilon(\beta\varepsilon+\nu)s^{-2}$ , содержащий расстояние  $s$  до стенки. Так как в данной модели эквивалентная гладкая поверхность  $y=0$  расположена вблизи «верхушек» элементов шероховатости, то в отличие от случая течения около гладкой поверхности  $s \neq y$ . Простейшим способом учета этого обстоятельства является введение вместо  $s$  выражения, учитывающего смещение плоскости  $y$

$$(7) \quad s=y+\xi k$$

Здесь эмпирический коэффициент  $\xi$  подбирался на основании сопоставления расчетных и экспериментальных данных. Известно [1], что геометрически подобная шероховатость может быть приведена к эквивалентной песочной шероховатости, которая детально изучена в очень широком диапазоне чисел Рейнольдса и отношений  $k_s/R$ , где  $k_s$  эквивалентный размер песочной шероховатости. При сравнении с экспериментальными данными будем считать, что  $k=k_s$ .

Уравнение (3) с граничными условиями (4) и (6) решалось численно по методу, изложенному в [10]. В результате расчетов определялись распределения скорости и турбулентной вязкости, максимальная и средняя по сечению скорости  $u_m, u_c$  и рассчитывались величины  $\lambda, Re_m=2u_m R\nu^{-1}$  и  $Re_c=2u_c R\nu^{-1}$ . Величина  $\lambda=8(u_c)^{-2}$  — коэффициент сопротивления, рассчитанный по скорости  $u_c$ , а величины  $Re_m$  и  $Re_c$  представляют собой числа Рейнольдса, определенные по максимальной и средней скоростям соответственно. Значения постоянной  $\xi$  в (7) выбирались в диапазоне  $0.05 \leq \xi \leq 0.2$ . Наилучшее совпадение результатов расчета с экспериментальными данными Никурадзе из [1] дало значение  $\xi=0.1$ . Однако для переходного режима течения различие между опытными данными достигало 50%. Поэтому вместо  $s=y+\xi k_s$  была выбрана несколько более сложная зависимость

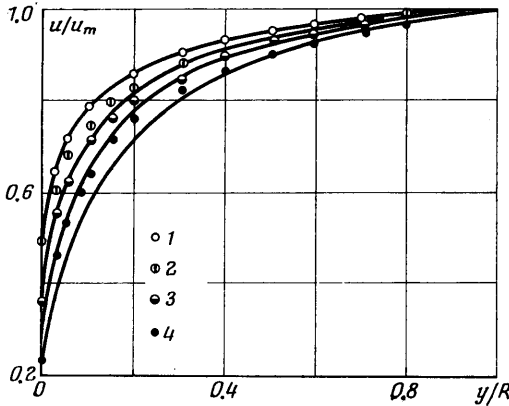
$$(8) \quad s^2=y^2+\xi k_s y+\eta k_s^2, \quad \varepsilon=0.4, \quad \eta=0.004$$

Приведем результаты расчетов установившегося течения в круглой трубе.

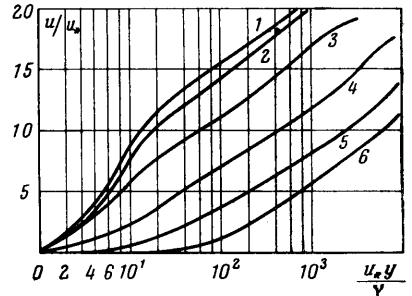
Известно, что профиль скорости в шероховатой трубе вблизи стенки менее наполненный, чем в гладкой трубе [1].

На фиг. 2 приведены результаты расчета (сплошные линии) относительной скорости  $u/u_m$  для гладкой (кривая 1) и шероховатой трубы при числе  $Re_c=10^6$  и значениях относительной шероховатости  $k_s/R$ , равных 1/500, 1/120 и 1/30 (кривые 2—4 соответственно). По мере увеличения параметра  $k_s/R$  профиль скорости в соответствии с экспериментальными данными из [1] (1 — гладкая поверхность, 2 —  $k_s/R=1/500$ , 3 —  $k_s/R=1/120$ , 4 —  $k_s/R=1/30$ ) становится менее наполненным.

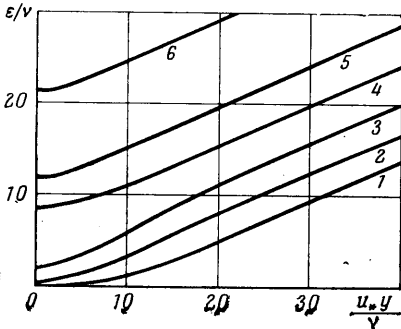
Этот же результат подтверждается расчетным пристеночным распределением относительной скорости, приведенным на фиг. 3. Здесь кривая 1 соответствует гладкой поверхности ( $u_*k_s/\nu=0$ ), кривые 2–6 – параметру шероховатости  $u_*k_s/\nu$ , равному соответственно 8, 32, 80, 400, 1700. Видно, что при увеличении параметра  $u_*k_s/\nu$  относительная скорость вблизи стенки убывает, а логарифмический участок профиля скорости, практически не



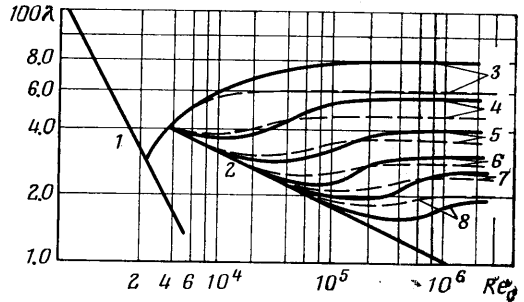
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

меняя наклона, смещается вниз от универсального закона  $u/u_* = 2.5 \ln(yu_*/\nu) + 5.1$ , что также соответствует известным экспериментальным данным [1–3]. Увеличение параметра шероховатости  $u_*k_s/\nu$  приводит к возрастанию у стенки турбулентной вязкости  $\epsilon$ . На фиг. 4 представлены результаты расчета относительной турбулентной вязкости  $\epsilon/\nu$  при различных значениях параметра шероховатости  $u_*k_s/\nu$  (кривые 1–6 соответствуют  $u_*k_s/\nu$  равным 8, 42, 83, 167, 250, 410).

Оказывается, что на шероховатой стенке значение  $\epsilon_w \neq 0$  и увеличивается с возрастанием  $u_*k_s/\nu$ . При увеличении параметра шероховатости расчетное значение турбулентной вязкости на стенке  $\epsilon_w/u_*k_s$  возрастает и при  $u_*k_s/\nu > 1000$  стремится к постоянному значению, равному приблизительно 0.06.

На фиг. 5 представлены зависимости коэффициента сопротивления от  $Re_c$  при различных значениях параметра  $k_s/R$ . Сплошные линии представляют результаты расчета при значениях параметра относительной шероховатости: 3 –  $k_s/R=1/15$ , 4 –  $1/30$ , 5 –  $1/60$ , 6 –  $1/120$ , 7 –  $1/240$ , 8 –  $k_s/R=1/500$ . Здесь же приведены экспериментальные данные Никурадзе

из [1] (пунктирные линии). Линии 1 и 2 соответствуют расчетным законам сопротивления при ламинарном и турбулентном режимах течения на гладкой стенке. Неоднозначность коэффициента сопротивления  $\lambda$  от числа Рейнольдса в диапазоне от 2500 до 5000 объясняется различным уровнем начальной турбулентной вязкости.

Из приведенного сравнения расчетных и экспериментальных данных видно, что предложенная модель не только удовлетворительно описывает все режимы течения в трубе с шероховатыми стенками (без проявления шероховатости, переходный режим и режим с полным проявлением шероховатости), но описывает также ламинарный режим течения и переход от ламинарного режима течения к турбулентному.

Поступила 9 I 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1974.
2. Ротга И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
3. Хинце И. О. Турбулентность. М., Физматгиз, 1963.
4. Миллиончиков М. Д. Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М., «Наука», 1969.
5. Васецкая Н. Г., Иоселевич В. А. О построении полуэмпирической теории турбулентности слабых растворов полимеров. Изв. АН СССР. МЖГ, 1970, № 2.
6. Dvorak F. A. Calculation of compressible turbulent boundary layers with roughness and heat transfer. AIAA Journal, 1972, vol. 10, No. 11.
7. Powe R. E., Townes H. W. Turbulence structure for fully developed flow in rough pipes. Trans. ASME, 1973, vol. 95, No. 2.
8. Taylor P. A. Some comparisons between mixing-length and turbulent energy equation models of flow above a change in surface roughness. Lect. Notes Phys., 1973, No. 19.
9. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомоделных течений. Изв. АН СССР. МЖГ, 1971, № 5.
10. Лебедев А. Б., Секундов А. Н. Анализ уравнения для турбулентной вязкости в области переходных чисел Рейнольдса. Науч. тр. Ин-та мех. Моск. ун-та, 1974, № 32.
11. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1973.