

**ОДНА ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА
ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СМАЗКИ**

Ю. Я. БОЛДЫРЕВ, В. А. ТРОИЦКИЙ

(Ленинград)

В работах [1-3] найдены оптимальные формы зазора для одномерных аэродинамических подшипников скольжения. Оптимизируется коэффициент несущей способности при условии, что одномерное уравнение Рейнольдса газовой смазки используется для определения давления в подшипнике.

В данной работе рассматривается пространственная задача о нахождении оптимального профиля аэродинамического подшипника скольжения в случае малых чисел «сжимаемости». Задача решается методами вариационного исчисления. Проведено качественное исследование формы оптимального профиля, результаты которого подтверждаются численным решением системы уравнений Эйлера – Лагранжа. Результаты вычислений приведены для различных удлинений подшипника. На основе полученных профилей найдены более технологичные в изготовлении оптимальные профили с прямоугольным «карманом».

1. Постановка задачи. При малых числах «сжимаемости» уравнения газодинамической теории смазки [4] линеаризуются. Вводится избыточное давление p_1 с помощью соотношения

$$p = 1 + \Lambda p_1 + O(\Lambda^2), \quad \Lambda = 6\mu VL_0/h_0^2 p_0,$$

где p – безразмерное давление, p_1 – безразмерное избыточное давление, отнесенные к атмосферному p_0 ; Λ – число «сжимаемости»; h_0 – минимальная толщина зазора; V – скорость скольжения гладкой поверхности, лежащей в плоскости (xy) ; L_0 – продольная длина подшипника, μ – вязкость газа.

Линеаризованные уравнения для продольного Q^x и поперечного Q^y безразмерных массовых расходов смазки в области Ω , определяемой неравенствами $0 \leq x \leq 1$, $-0.5 \leq y \leq 0.5$ и уравнение неразрывности имеют вид

$$(1.1) \quad Q^x = H^3 \frac{\partial P_1}{\partial x} - H, \quad Q^y = \gamma H^3 \frac{\partial P_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q^x}{\partial y} + \gamma \frac{\partial Q^y}{\partial y} = 0$$

где H – безразмерный зазор, отнесенный к h_0 ; x и y безразмерные продольная и поперечная координаты, отнесенные к L_0 и полуширине подшипника L_1 соответственно; $\gamma = L_0/L_1$ – удлинение (обратное) подшипника.

Граничным условием к системе уравнений (1.1) служит равенство нулю избыточного давления p_1 на контуре $\partial\Omega$ области Ω

$$(1.2) \quad p_1|_{\partial\Omega} = 0$$

Далее индекс y избыточного давления опускаем.

Коэффициент несущей способности вычисляется по формуле

$$(1.3) \quad c_y = \Lambda \iint_{\Omega} p \, dx \, dy$$

На зазор $H(x, y)$ накладывается очевидное ограничение $H(x, y) \geq 1$.

Будет решаться следующая вариационная задача: среди кусочно-непрерывных функций, удовлетворяющих $H(x, y) \geq 1$, найти те, которые

реализуют максимум функционала (1.3), при условии, что допустимые функции p , Q^x , Q^y непрерывны и удовлетворяют уравнениям (1.1) с граничным условием (1.2).

Введем вспомогательную функцию v , которая обеспечит переход к открытой области для функции H , с помощью соотношения $H-1-v^2=0$. Вместо (1.3) введем функционал

$$(1.4) \quad J = -\frac{C_v}{\Lambda} = -\iint_{\Omega} p \, dx \, dy$$

Будем разыскивать его минимум. В сформулированной постановке имеем задачу Лагранжа для функций двух независимых переменных [5].

2. Необходимые условия экстремума вариационной задачи. Введем расширенную функцию F и новый функционал I , равный J при удовлетворении ограничений (1.1)

$$\begin{aligned} F = & -p + \lambda_1 \left(\frac{\partial Q^x}{\partial x} + \gamma \frac{\partial Q^y}{\partial y} \right) + \lambda_2 \left(H - H^3 \frac{\partial p}{\partial x} + Q^x \right) + \\ & + \lambda_3 \left(Q^y - H^3 \gamma \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \lambda_4 (H - 1 - v^2) \\ I = & \iint_{\Omega} F \, dx \, dy \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_i(x, y)$ — неопределенные множители Лагранжа. Уравнения Эйлера — Лагранжа для определения функций Q^x , Q^y , p , H и v имеют вид [5]

$$F_{z_k} - \frac{\partial F_{t_k}}{\partial x} - \frac{\partial F_{q_k}}{\partial y} = 0$$

где z_k ($k=1, 2, \dots, 5$) — система искомых функций, и введены обозначения $t_k = \partial z_k / \partial x$, $q_k = \partial z_k / \partial y$ для частных производных по независимым переменным. Подставив в эти уравнения F , получим

$$-1 + \frac{\partial}{\partial x} (H^3 \lambda_2) + \gamma \frac{\partial}{\partial y} (H^3 \lambda_3) = 0$$

(2.1)

$$\lambda_2 - \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = 0 \quad \lambda_3 - \gamma \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} = 0$$

$$(2.2) \quad \lambda_2 + \lambda_4 - 3H^2 \left(\lambda_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \lambda_3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

$$-2\lambda_4 v = 0$$

Контур области фиксирован и давление на нем задано. Поэтому $\delta p = \delta x = \delta y = 0$ на $\partial\Omega$ и контурный интеграл в вариации функционала I , остающийся после взятия по частям двойного интеграла, запишется в форме

$$\oint_{\partial\Omega} (\lambda_1 \dot{y} \delta Q^x - \lambda_1 \delta Q^y) \, dx$$

где \dot{y} — угловой коэффициент контура. Положим

$$(2.3) \quad \lambda_1|_{\partial\Omega} = 0$$

Вместе с (1.2) это равенство составляет систему граничных условий к уравнениям (1.1) и Эйлера — Лагранжа (2.1) — (2.2). Условие Эрдманна — Вейерштрасса, которое должно выполняться для любой системы вариаций δx , δy , δz_k , согласующихся с требованиями, наложенными на положение линии разрыва функции $H(x, y)$, имеет вид

$$(2.4) \quad \Delta X \delta x + \Delta Y \delta y + \sum_{k=1}^5 \Delta Z_k \delta z_k = 0$$

$$(2.5) \quad \Delta X = \Delta \left(\sum_{k=1}^5 t_k F_{q_k} \right) + \dot{y} \Delta \left(F - \sum_{k=1}^5 t_k F_{t_k} \right)$$

$$(2.6) \quad \Delta Y = -\Delta \left(F - \sum_{k=1}^5 q_k F_{q_k} \right) - \dot{y} \Delta \left(\sum_{k=1}^5 q_k F_{t_k} \right)$$

$$(2.7) \quad \Delta Z_k = -\Delta F_{q_k} + \dot{y} \Delta F_{t_k} \quad k=1, 2, \dots, 5$$

Здесь \dot{y} — наклон касательной к контуру проекции линии разрыва на плоскость (xy) , Δ — обозначение разности величины справа и слева от линии разрыва. Далее будет показано, что на положение линии разрыва функции $H(x, y)$ необходимо наложить некоторое ограничение, так что вариации δx и δy не будут независимыми, в то время как δp , δH , δQ^x , δQ^y и δv произвольны в окрестности линии разрыва. Тогда (2.4) примет вид

$$(2.8) \quad \Delta X \delta x + \Delta Y \delta y = 0$$

а из (2.7) получаем следующую систему уравнений:

$$(2.9) \quad \Delta \lambda_3 \gamma H^3 - \dot{y} \Delta \lambda_2 H^3 = 0 \quad \dot{y} \Delta \lambda_1 = 0 \quad \gamma \Delta \lambda_1 = 0$$

Экстремальная поверхность H будет оптимальной относительно сильных вариаций, если функция Вейерштрасса строго положительна для любой системы сильных вариаций t_k и q_k

$$E = \Delta F - \delta F > 0$$

$$\Delta F = F(p, H^*, t_k^*, q_k^*) - F(p, H, t_k, q_k)$$

$$\delta F = \sum_{k=1}^5 [F_{t_k}(z_k, \lambda_k, t_k, q_k) \delta t_k + F_{q_k}(z_k, \lambda_k, t_k, q_k) \delta q_k]$$

Здесь E — функция Вейерштрасса, ΔF — полная вариация расширенной функции, δF — первая вариация. Вариации вычисляются при постоянных значениях независимых переменных, звездочкой отмечены проварьированные функции.

Вычисления дают следующее выражение:

$$(2.10) \quad H^3 \left(\lambda_2 \frac{\partial p^*}{\partial x} + \gamma \lambda_3 \frac{\partial p^*}{\partial y} \right) > H^3 \left(\lambda_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \lambda_3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \varphi H^3$$

3. Качественное исследование формы оптимального профиля. Объединяя уравнения (1.1) и уравнения (2.1) получим уравнение Рейнольдса газовой смазки при малых числах «сжимаемости» и уравнение для множителя λ_1 в следующей форме:

$$(3.1) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(H^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$(3.2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(H^3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \right) + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(H^3 \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right) = 1$$

Займемся исследованием качественного характера решений эллиптических уравнений (3.1) и (3.2) с граничными условиями (1.2) и (2.3). Коэффициенты этих уравнений непрерывны и ограничены (на это указывают физические соображения) всюду в Ω , за исключением линии разрыва H . Причем на самой линии разрыва решения непрерывны, давление p — по предположению, а λ_1 — из условий Эрдманна — Вейерштрасса (2.9). Тогда принцип Хопфа [6] применим во всей области Ω .

Будем разыскивать давление $p(x, y)$ в классе неотрицательных в Ω функций, так как появление разрежений приводит к увеличению минимизируемого функционала (1.4). Из принципа Хопфа следует, что решение уравнения (3.1) с граничным условием (1.2) выпукло вверх (неотрицательно), когда $\partial H / \partial x \leq 0$. Таким образом, в области имеет место «смазочный клин».

Уравнение (3.2) с граничным условием (2.3), согласно принципу Хопфа, имеет решение выпуклое вниз (отрицательное) всюду в Ω .

Соотношение (2.10) показывает, что функция φ достигает минимума на оптимальном профиле H . Определим знак функции φ на контуре $\partial\Omega$. Воспользуемся принципом Заремба — Жиро [6], согласно которому для уравнения (3.1) с граничным условием (1.2) и для уравнения (3.2) с граничным условием (2.3) имеют место соответственно на $\partial\Omega$ условия

$$(3.3) \quad \frac{\partial p}{\partial l} > 0, \quad \frac{\partial \lambda_1}{\partial l} < 0 \quad (\text{на } \partial\Omega)$$

где l — любое направление, выходящее из произвольной точки контура и удовлетворяющее условию $\cos(l, N) < 0$, N — направление внешней нормали к контуру $\partial\Omega$. Отметим, что здесь предполагается непрерывность коэффициентов уравнений (3.1) и (3.2) почти всюду на контуре $\partial\Omega$. Иначе, считаем, что разрыв H не совпадает с континуумом точек контура. Тогда из (3.3) определяем, что на контуре $\partial\Omega$ функция $\varphi < 0$.

Форма оптимального профиля определяется из соотношений (2.2) последнее из которых дает

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0, \quad \nu \neq 0, \quad H > 1 \\ \lambda_1 &\neq 0, \quad \nu = 0, \quad H = 1 \\ \lambda_1 &= 0, \quad \nu = 0, \quad H = 1 \end{aligned}$$

Рассматривая случай первой группы условий (3.4), из (2.2) получим выражение для $H(x, y)$

$$(3.5) \quad H^2 = {}^1/\lambda_2 \left(\lambda_2 \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma \lambda_3 \frac{\partial p}{\partial y} \right)^{-1}$$

откуда следует, что $H > 1$ в той области, где знаки λ_2 и φ совпадают. Учитывая, что λ_1 отрицательно, из (3.3) можно сделать вывод, что в части передней, сжимающей газ, области подшипника $H > 1$. На боковых границах $y = \pm 0.5$, $\lambda_2 = 0$ и в силу $\varphi < 0$ соотношение (3.5) не выполняется. Тогда $\lambda_1 \neq 0$ и $H = 1$ при $y = \pm 0.5$. Аналогично в кормовой части, согласно второму из условий (3.3), соотношение (3.5) не описывает форму оптимального профиля и здесь также $\lambda_1 \neq 0$ и $H = 1$.

Покажем, что линия разрыва H является линией максимума давлений. Действительно, в передней части подшипника, согласно (3.5) и исходя из ограниченности H , нет ни одной точки, где $\partial p / \partial x$ и $\partial p / \partial y$ обращались бы в нуль одновременно. В области же, где $H = 1$, уравнение (3.1)

вырождается в уравнение типа Лапласа, решение которого, согласно принципу экстремума [6], достигает максимум только на границе области ($H=1$). Таким образом, давление достигает максимальных значений на линии разрыва H , которая служит линией перемены знака $\partial p/\partial x$. Отсюда же следует естественность разыскания одной линии разрыва в настоящей задаче.

Остановимся на свойствах линии разрыва. Из (2.9) получим уравнение для определения проекции линии разрыва на плоскости (xy)

$$\dot{y} = \gamma \Delta \lambda_3 H^3 / \Delta \lambda_2 H^3$$

Заметим, что правую часть уравнения необходимо рассматривать как предел, так как (2.1) требует непрерывности $\lambda_2 H^3$ и $\lambda_3 H^3$.

Выше было получено, что $H=1$ на боковых границах $y=\pm 0.5$. Появление таких «стенок» в передней части подшипника легко объяснимо — они уменьшают поперечный расход Q^y , что приводит к повышению давления газа в подшипнике. С другой стороны, появление «стенок» (в зависимости от их ширины) приводит к тому, что течение газа в их окрестности может не описываться уравнением Рейнольдса. Последнее получают при условии, что характерный продольный размер области течения (в данном случае местная толщина стенки a) относится к толщине зазора (в данном случае h_0) как 10^3-10^4 . Минимальная возможная толщина стенки может быть получена из следующих соображений. Пусть $h_0/a=10^{-3}$,

$h_0/L_0=10^{-4}$, тогда $a/L_0=a/\gamma L_1=10^{-1}$ или, окончательно, относительная толщина стенки $a/L_1=\gamma 10^{-1}$.

Таким образом, возможная линия разрыва H не может подходить к боковым границам $y=\pm 0.5$ ближе, чем на величину $\gamma \cdot 10^{-1}$. Это и есть то ограничение, о котором упоминалось в связи с условием Эрдманна — Вейерштрасса (2.4). Ограничение касается отсутствия произвола в выборе вариации δy в случае совпадения проекции линии разрыва с ограничивающей линией, определяемой из $a/L_1=\gamma \cdot 10^{-1}$. Из (2.8) имеем здесь $\Delta X=0$, так как $\delta y=0$, а δx произвольно и так как в рассматриваемых частях линии разрыва $\dot{y}=0$, получим

$$\Delta X = \left(\lambda_1 \frac{\partial Q^y}{\partial x} + \lambda_3 H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0$$

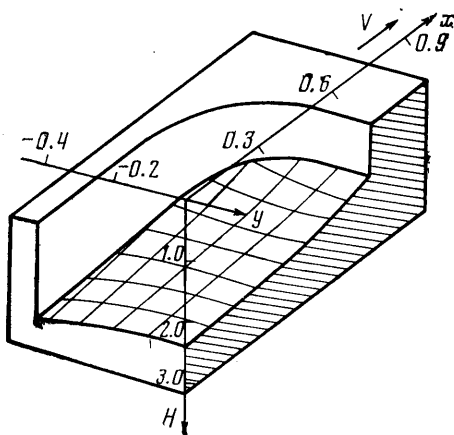
В центральной части линии разрыва вариации δx и δy произвольны, и поэтому из (2.8) $\Delta X=\Delta Y=0$ или, с учетом непрерывности p ,

$$\gamma \Delta \left(\lambda_1 \frac{\partial Q^y}{\partial x} - \lambda_3 H^3 \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \dot{y} \Delta \left[\lambda_1 \frac{\partial Q^x}{\partial x} - \lambda_2 (Q^x - H) \right] = 0$$

$$\gamma \Delta \left(\lambda_3 Q^y + \lambda_1 \frac{\partial Q^y}{\partial y} \right) - \dot{y} \Delta \left(\lambda_1 \frac{\partial Q^x}{\partial y} - \lambda_2 H^3 \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 0$$

4. Обсуждение результатов. Задача решалась численно градиентным методом первого порядка [7]. Интегрирование уравнений (3.1) и (3.2) проводилось с помощью дивергентной разностной схемы [8] на сетке 17×17 узлов, сгущаемой в окрестности линии разрыва.

Вычисления были проведены для трех значений обратного удлинения $\gamma=0.1, 0.5, 1.0$. Результаты расчетов (c_{y0}) представлены ниже в сравнении с оптимальными кли-



новидными (c_{y1}) и ступенчатыми профилями (c_{y2}), используемыми на практике.

γ	0	0.1	0.5	1.0
c_{y0}	0.0344	0.0328	0.0266	0.0199
c_{y1}	—	0.0246	0.0186	0.0120
c_{y2}	—	0.0314	0.0214	0.0122

Естественно ожидать, что оптимальная форма профиля в центральной части подшипника плоскости (xz) при больших удлинениях будет совпадать с оптимальным профилем одномерной задачи [1]. Действительно, при $\gamma=0.1$ профили двумерной и одномерной задачи практически совпадают, весьма близки и несущие способности. Уменьшение удлинения приводит к появлению «смазочного клина» в центральной части, угол наклона которого растет с убыванием удлинения.

Линия разрыва H выходит на ограничение у боковых границ, а в центральной части подшипника перпендикулярна оси x . На фигуре показана перевернутая половина подшипника (случай $\gamma=1.0$).

Так как полученные оптимальные профили достаточно трудны в изготовлении, найдены оптимальные параметры профиля с прямоугольным «вырезом». Здесь для рассматриваемых удлинений варьировались высота «выреза» H_0 и его длина c . Результаты расчетов следующие: $c_y=0.0326, 0.0261, 0.0194$; $H_0=1.90, 2.04, 2.10$; $c=0.73, 0.74, 0.74$ для значений $\gamma=0.1, 0.5, 1.0$ соответственно.

Поступила 8 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Мэдей. Применение метода ограниченных переменных к расчету оптимального плоского подшипника скольжения. Тр. американского о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 1968, т. 90, № 4.
2. Мэдей. Решение одномерной задачи об определении оптимальной конфигурации аэродинамического плоского подшипника скольжения с газовой смазкой. Тр. амер. о-ва инж.-мех. Сер. Ф. Проблемы трения и смазки, 1968, т. 90, № 4.
3. Завьялов Г. А., Левина Г. А., Улицкий Р. Я. Основные принципы газовой смазки и проблема оптимизации опор. В сб. Проблемы развития газовой смазки, ч. 1. М., «Наука», 1972.
4. Констангинеску В. Н. Газовая смазка. М., «Машиностроение», 1968.
5. Теория оптимальных аэродинамических форм. Ред. А. Миеле. М., «Мир», 1969.
6. Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966.
7. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
8. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.