МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975

УДК 532.135

МЕДЛЕННЫЕ НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ДВИЖЕНИЯ УПРУГОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В. А. ГОРОДЦОВ

(Москва)

По аналогии с теорией линейных наследственных сред в электродинамике [1] развита теория линейных упруговязких жидкостей.

При упрощенном описании снижения сопротивления турбулентного трения в упруговязких полимерных растворах важное место занимает задача о плоскости, движущейся параллельно самой себе [2–10]. Так, для определения затухания турбулентности у стенки по модели Ван Дриста рассматривают гармонические колебания пластины [2]. В модели Эйнштейна – Ли и в модели Данквертса – Ханратти используется решение задачи о течении около внезапно стартующей плоскости.

В данной работе в линейном приближении решается задача о сопротивлении трения неограниченной пластины, движущейся произвольным образом по границе полупространства, занятого упруговязкой жидкостью общего типа. Найдены следствия причинности исходных определяющих уравнений жидкости и показано, что сопротивление в упруговязких жидкостях меньше, чем в вязкой. Приведены результаты вычислений для простейших моделей жидкости.

1. Линейные определяющие уравнения упруговязкой жидкости. Определяющие уравнения несжимаемой[1] изотропной упруговязкой жидкости в линейном приближении можно записать в виде

$$\sigma_{ij}'(\mathbf{r},t)=2\int\limits_{-\infty}^{t}\eta(t-t')\,e_{ij}(\mathbf{r},t')\,dt' \tag{1.1}$$

Вводя компоненты Фурье девиатора напряжений $\sigma_{ij}'(\mathbf{r},\omega)$ и скоростей деформации, вместо (1.1) можно получить

$$\sigma_{ij}'(\mathbf{r},\omega)=2\eta_+(\omega)\,e_{ij}(\mathbf{r},\omega) \tag{1.2}$$

$$\eta_+(\omega)=\int\limits_{0}^{\infty}\eta(t)\,e^{i\omega t}dt \tag{1.3}$$

Напряжение в данный момент времени определяется предысторией деформации. Благодаря такому причинному характеру зависимости напряжений от скоростей интегрирование в формуле для $\eta_+(\omega)$ распространяется только на положительные времена. Из этого следует при довольно общем виде функции $\eta(+)$ аналитичность функции $\eta_+(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega>0$. С другой стороны, уравнение (1.1) можно переписать также в виде причинной зависимости $e_{ij}(\mathbf{r},t)$ от $\sigma_{ij}'(\mathbf{r},t)$, и потому функция $1/\eta_+(\omega)$ аналитична при $\operatorname{Im}\omega>0$. Таким образом, функция $\eta_+(\omega)$ не должна иметь особенностей и нулей в верхней полуплоскости комплексного переменного ω.

Из вещественности функции $\eta(t)$ при вещественных и комплексных ω следует (см. (1.3))

$$\eta_+(-\omega)=\bar\eta_+(\omega) \tag{1.4}$$

$$\bar\eta_+(\omega)=\eta_+(-\bar\omega) \tag{1.5}$$

[1] Более общий случай анализируется аналогично.

Здесь черта означает комплексное сопряжение. Из (1.4)–(1.5), в частности, следует вещественность $\eta_+(i\omega)$ при вещественных ω.

Соотношение (1.4) можно переписать также в виде

$$\text{(1.6)}\qquad \operatorname{Re}\eta_+(-\omega)=\operatorname{Re}\eta_+(\omega),\quad \operatorname{Im}\eta_+(-\omega)=-\operatorname{Im}\eta_+(\omega)$$

Аналитичность $\eta_+(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega>0$ позволяет выразить одну из этих функций через другую, например с помощью следующих дисперсионных соотношений Крамерса – Кронига:

$$\text{(1.7)}\qquad \operatorname{Re}\eta_+(\omega)-\eta_\infty=\frac{2}{\pi}\fint_0 \frac{x\operatorname{Im}\eta_+(x)}{x^2-\omega^2}\,dx$$

$$\text{(1.8)}\qquad \operatorname{Im}\eta_+(\omega)=-\frac{2\omega}{\pi}\fint_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\eta_+(x)}{x^2-\omega^2}\,dx$$

если $\lim\limits_{\omega\to\infty}\eta_+(\omega)=\eta_\infty<\infty$ (несложно написать подобные соотношения и в случае степенного роста $\eta_+(\omega)$). Перечеркнутые интегралы понимаются в смысле главного значения.

Переходя к пределу $\omega\to0$ в (1.7), получим

$$\text{(1.9)}\qquad \eta_0\equiv\eta_+(0)=\eta_\infty+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Im}\eta_+(\omega)}{\omega}\,d\omega$$

Зная $\operatorname{Re}\eta_+(\omega)$ или $\operatorname{Im}\eta_+(\omega)$, несложно найти $\eta_+(i\omega)$

$$\text{(1.10)}\qquad \eta_+(i\omega)=\eta_\infty+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\operatorname{Im}\eta_+(x)}{x^2+\omega^2}\,dx=\frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{Re}\eta_+(x)}{x^2+\omega^2}\,dx$$

Другое удобное представление функции памяти $\eta(t)$ дает преобразование Лапласа

$$\text{(1.11)}\qquad \eta(t)=\int_0^\infty \frac{n(\theta)}{\theta}e^{-t/\theta}\,d\theta$$

в котором $n(\theta)$ имеет смысл плотности распределения времен релаксации [11–13]. В частном случае дискретного спектра $n=\Sigma\eta_k\delta(\theta-\theta_k)$, и интеграл сводится к сумме элементарных релаксационных членов.

Из (1.3) и (1.11) следует

$$\text{(1.12)}\qquad \eta_+(\omega)=\int_0^\infty \frac{n(\theta)}{1-i\theta\omega}\,d\theta$$

Подставив сюда $\omega=-i/\theta\pm|\varepsilon|$ и переходя к пределу $\varepsilon\to0$, можно выразить $n(\theta)$ через $\eta_+(\omega)$

$$\text{(1.13)}\qquad \lim_{\varepsilon\to0}\eta_+\left(-\frac{i}{\theta}\pm|\varepsilon|\right)=\theta\fint_0^\infty \frac{n(x)}{x-\theta}\,dx\pm i\pi\theta n(\theta)$$

Выделив мнимую часть, имеем

$$\text{(1.14)}\qquad n(\theta)=\pm\frac{1}{\pi\theta}\lim_{\varepsilon\to0}\operatorname{Im}\eta_+\left(-\frac{i}{\theta}\pm|\varepsilon|\right)$$

В дальнейшем ограничимся простым типом наследственных сред — жидкостями с упругостью формоизменения, в которых запасаемая упругая энергия E и диссипация энергии при изотермическом течении (производство энтропии TP_s) описываются при помощи $n(\theta)$ формулами [11, 12]

$$(1.15)\qquad E=\int\limits_0^\infty \frac{n(\theta)}{\theta} s_{\alpha\beta}^2\, d\theta, \qquad TP_s=2\int\limits_0^\infty \frac{n(\theta)}{\theta^2} s_{\alpha\beta}^2\, d\theta$$

$$s_{ij}\equiv\int\limits_0^\infty e_{ij}(\mathbf{r}, t-t')\, e^{-t'/\theta}\, dt'$$

В случае гармонических колебаний жидкости осредненные за период колебаний выражения для энергии и диссипации примут вид

$$(1.16)\qquad \langle E\rangle=\frac{1}{2\omega}\operatorname{Im}\eta_+(\omega)\,|e_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\omega)|^2, \qquad T\langle P_s\rangle=\operatorname{Re}\eta_+(\omega)\,|e_{\alpha\beta}(\mathbf{r},\omega)|^2$$

Из положительной определенности этих величин следует

$$(1.17)\qquad \operatorname{Re}\eta_+(\omega)>0, \quad \operatorname{Im}\eta_+(\omega)>0 \quad (\omega>0)$$

Можно показать (см. [1]), используя эти и другие перечисленные свойства функции $\eta_+(\omega)$, что в полуплоскости $\operatorname{Im}\omega>0$ она вещественна лишь на мнимой полуоси, где монотонно меняется от η_0 до η_∞, и $\eta_0>\eta_\infty$ в соответствии с (1.9). Из этого опять следует отсутствие нулей у функции $\eta_+(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega>0$.

2. Течение около колеблющейся пластины. Рассмотрим задачу о сопротивлении пластины, гармонически колеблющейся в плоскости $z=0$ (жидкость при $z>0$).

В линейном приближении уравнения движения и определяющие уравнения (1.2) сводятся к одному уравнению

$$(2.1)\qquad -i\omega\rho u(z,\omega)=\eta_+(\omega)\frac{d^2}{dz^2}u(z,\omega)$$

$$u(0,\omega)=U(\omega),\ u(\infty,\omega)=0$$

решение которого

$$(2.2)\qquad u(z,\omega)=U(\omega)\,e^{-\lambda(\omega)z}$$

$$\lambda=\sqrt{-i\omega\rho/\eta_+(\omega)}, \quad \operatorname{Re}\lambda>0$$

Условие $\operatorname{Re}\lambda>0$ соответствует требованию неподвижности жидкости вдали от пластины.

Дифференцируя $u(z,\omega)$, получим формулу для комплексной амплитуды напряжения

$$(2.3)\qquad \sigma(z,\omega)=-\eta_+(\omega)\lambda(\omega)U(\omega)\,e^{-\lambda(\omega)z}$$

Таким образом, для колебания пластины со скоростью $\operatorname{Re}(Ue^{-i\omega t})$ нужно приложить к ней сдвиговое напряжение $\operatorname{Re}(-\eta_+\lambda Ue^{-i\omega t})$.

3. Течение около произвольно движущейся пластины. Чтобы перейти к общему случаю, нужно просуммировать по всем возможным частотам, составляющим данное движение.

Из (2.2) для скорости течения жидкости при произвольном движении плоскости, а из (2.3) — для сдвигового напряжения получим соответственно

$$(3.1)\qquad u(z,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)e^{-\lambda(\omega)z-i\omega t}d\omega$$

$$(3.2)\qquad \sigma(z,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_+(\omega)\lambda(\omega)U(\omega)e^{-\lambda(\omega)z-i\omega t}d\omega$$

Если теперь ввести функцию

$$(3.3)\qquad L(z,t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda(\omega)}e^{-\lambda(\omega)z-i\omega t}d\omega$$

то формулы для скорости и напряжения можно записать следующим образом:

$$(3.4)\qquad \sigma(z,t)=\rho\int_{-\infty}^{\infty}L(z,t-t')\frac{dU}{dt'}dt',\qquad u(z,t)=\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{\infty}L(z,t-t')U(t')dt'$$

При этом важные свойства функции памяти $L(z,t)$ можно выяснить при достаточно общих предположениях о поведении функции $\eta_+(\omega)$, не задаваясь ее конкретным видом.

Предположим, что $\eta_+(\omega)$ разложима при больших частотах в ряд по степеням $1/\omega$

$$(3.5)\qquad \operatorname{Re}\eta_+(\omega)\approx\eta_\infty+\frac{\eta_{\infty2}}{\omega^2}+\ldots,\quad \operatorname{Im}\eta_+(\omega)\approx\frac{\eta_{\infty1}}{\omega}+\frac{\eta_{\infty3}}{\omega^3}+\ldots\quad(\omega\gg1)$$

Если $\eta_\infty\neq0$, то в силу (1.17) $\eta_\infty>0$, и функция $e^{-\lambda(\omega)z}/\lambda(\omega)$ стремится к нулю при $\omega\to\infty$. Благодаря отсутствию особенностей и нулей у функции $\eta_+(\omega)$ при $\operatorname{Im}\omega>0$ функция $e^{-\lambda(\omega)z}/\lambda(\omega)$ аналитична в верхней полуплоскости (выбирается та ветвь, для которой имеет место (2.2)). Поэтому интеграл (3.3) при $t<0$ сводится к интегралу по бесконечной полуокружности, который равен нулю. Таким образом

$$(3.6)\qquad L(z,t)=0\quad(t<0,\ \eta_\infty>0)$$

и течение жидкости оказывается связанным лишь с предысторией движения плоскости.

Еще более сильное ограничение получается при $\eta_\infty=0$. Тогда $\eta_{\infty1}>0$, $\eta_{\infty2}>0$, согласно (1.17), и при больших частотах $e^{-\lambda z}/\lambda\approx e^{i\omega t_z}/(-i\omega\sqrt{\rho/\eta_{\infty1}})$. Аналогично предыдущему будем иметь

$$(3.7)\qquad L(z,t)=0\quad(t<t_z\equiv z\sqrt{\rho/\eta_{\infty1}},\quad \eta_\infty=0)$$

что также отражает причинный характер возбуждаемого течения. Скорость распространения возмущений здесь конечна и равна $\sqrt{\eta_{\infty1}/\rho}$. В жидкости с одним временем релаксации $\eta_{\infty1}=\eta_0/\theta$.

Условия (3.6), (3.7) совпадают на поверхности пластины, и для напряжения трения имеем

$$\sigma(0,t)=\rho\int_{-\infty}^{t}L(0,t-t')\frac{dU}{dt'}dt'$$

4. Средние характеристики течения. При описании турбулентности [2–10] и колебаний жидкости интерес представляет вычисление средних характеристик типа

$$\langle f\rangle=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,\qquad \langle\!\langle f\rangle\!\rangle=\frac{1}{T}\int_0^\infty f(t)\,e^{-t/T}\,dt \tag{4.1}$$

При осреднении выражений (3.1), (3.2) весовой множитель $e^{-i\omega t}$ заменяется на $(1-e^{-i\omega T})/(i\omega T)$ или на $(1+i\omega T)^{-1}$ в зависимости от типа среднего.

При осреднении соотношений (3.4), предполагая для упрощения $U(t)=0$ при $t<0$, получим для средних одного и другого типа соответственно

$$\langle u\rangle=\frac{\partial}{\partial z}\int_0^{T-t_z} U(t)\,\varphi(T-t)\,dt \tag{4.2}$$

$$\langle\sigma\rangle=\rho\int_0^{T-t_z}\frac{dU}{dt}\varphi(T-t)\,dt$$

$$\varphi(t)=\frac{1}{T}\int_{t_z}^{t} L(z,t')\,dt'$$

$$\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle=\frac{\rho}{T^2}U^\circ\left(\frac{1}{T}\right)L^\circ\left(z,\frac{1}{T}\right),\qquad \langle\!\langle u\rangle\!\rangle=\frac{T}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\langle\!\langle\sigma\rangle\!\rangle \tag{4.3}$$

Здесь U°, L°, $\partial L^\circ/\partial z$ являются преобразованиями Лапласа соответствующих величин.

Формулы (4.2) написаны для случая, когда имеет место ограничение (3.7). Вид их при выполнении (3.6) остается таким же с заменой t_z на нуль. Преобразования Лапласа $U^\circ\left(\frac{1}{T}\right)$, $L^\circ\left(z,\frac{1}{T}\right)$ здесь можно получить без дополнительных вычислений из преобразований Фурье $U(\omega)$, $L(z,\omega)$ с помощью формальной замены ω на i/T. Поэтому анализ средних «u», «σ» особенно прост. Согласно (3.3) можно написать

$$L^\circ\left(0,\frac{1}{T}\right)=L(0,\omega)\,|_{\omega=i/T}=-\sqrt{\frac{T}{\rho}\eta_+\left(\frac{i}{T}\right)}$$

и из соотношения (4.3) благодаря монотонности функции $\eta_+(i/T)$ (см. п. 1) следует, что при одинаковых T и U среднее напряжение сдвига на пластине в жидкости с постоянной вязкостью η_0 всегда превышает по величине напряжение в упруговязкой жидкости.

Удобной характеристикой размера области течения около пластины является толщина вытеснения $\delta^*(t)$

$$U(t)\,\delta^*(t)=\int_0^\infty dz\,u(z,t)$$

Ее вычисление можно связать, используя (3.1), (3.2), с вычислением силы сопротивления $\sigma(0,t)$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\delta^*(t)\,U(t)]=\frac{\sigma(0,t)}{\rho} \tag{4.4}$$

Осреднение этого соотношения приводит к формуле

$$\langle\sigma(0,t)\rangle=\frac{\rho}{T}U(T)\delta^*(T) \tag{4.5}$$

Наконец, в достаточно общем виде можно определить асимптотическое поведение рассматриваемых характеристик и, в частности, силы сопротивления. Поскольку главные вклады в функцию памяти силы сопротивления $L(0,t)$ при больших (малых) временах дают малые (большие) частоты (см. (3.3)), то, используя (3.5) и $\eta_+(\omega)\approx\eta_0+i\eta_{01}\omega+\ldots$ при $\omega\ll1$, получим

$$-\sqrt{\pi\rho t}\,L(0,t)=\begin{cases}\sqrt{\eta_\infty}\left(1+\dfrac{\eta_{\infty1}}{\eta_\infty}t+\ldots\right), & \eta_\infty\neq0, \quad t\ll1\\ \sqrt{\pi\eta_{\infty1}t}\left(1-\dfrac{\eta_{\infty2}}{2\eta_{\infty1}}t+\ldots\right), & \eta_\infty=0, \quad t\ll1\\ \sqrt{\eta_0}\left(1+\dfrac{\eta_{01}}{4\eta_0}t^{-1}+\ldots\right), & t\gg1\end{cases}$$

Здесь в силу (1.17) имеет место $\eta_0>0$, $\eta_{01}>0$.

5. Простейшие модели жидкости. Приведем теперь результаты вычислений для некоторых моделей жидкостей.

Пример 1. Вязкая жидкость. В этом случае

$$\eta(t)=\eta_0\delta(t),\qquad \eta_+(\omega)=\eta_0,\qquad n(\theta)=\eta_0\delta(\theta) \tag{5.1}$$

$$L(z,t)=-\sqrt{\frac{\nu_0}{\pi t}}\,e^{-z^2/4\nu_0 t}h(t),\qquad \nu_0\equiv\eta_0/\rho \tag{5.2}$$

Здесь $h(t)$ – функция Хевисайда, равная единице при $t>0$ и нулю при $t<0$. Среднее сопротивление равно

$$\langle\langle\sigma(0,t)\rangle\rangle=-\frac{\rho}{T}\sqrt{\frac{\nu_0}{T}}\,U^\circ\left(\frac{1}{T}\right) \tag{5.3}$$

Пример 2. В жидкости с одним временем релаксации (максвелловская жидкость)

$$\eta(t)=\frac{\eta_0}{\theta}e^{-t/\theta}h(t),\qquad \eta_t(\omega)=\frac{\eta_0}{1-i\omega\theta},\qquad n(\theta')=\eta_0\delta(\theta'-\theta) \tag{5.4}$$

$$L(z,t)=-\sqrt{\frac{\nu_0}{\theta}}\,e^{-t/2\theta}I_0\left(\frac{1}{2\theta}\sqrt{t^2-z^2\frac{\theta}{\nu_0}}\right)h\left(t-z\sqrt{\frac{\theta}{\nu_0}}\right) \tag{5.5}$$

$$\langle\langle\sigma(0,t)\rangle\rangle=-\frac{\rho}{T}\sqrt{\frac{\nu_0}{T+\theta}}\,U^\circ\left(\frac{1}{T}\right) \tag{5.6}$$

Здесь I_0 – модифицированная функция Бесселя.

Пример 3. В жидкости с одним временем релаксации θ и одним временем последействия $\tau<\theta$

$$\eta(t)=\eta_0\frac{\tau}{\theta}\delta(t)+\frac{\eta_0}{\theta}\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)e^{-t/\theta}h(t),\qquad \eta_+(\omega)=\eta_0\frac{1-i\tau\omega}{1-i\theta\omega} \tag{5.7}$$

$$n(\theta')=\eta_0\frac{\tau}{\theta}\delta(\theta')+\eta_0\left(1-\frac{\tau}{\theta}\right)\delta(\theta'-\theta)$$

$$(5.8)\qquad -\pi L(z,t)=\int\limits_0^1 \frac{\cos\mu_1 z}{\theta\mu_1}e^{-\xi t/\theta}\,d\xi+\int\limits_1^\infty \frac{\cos\mu_2 z}{\tau\mu_2}e^{-\xi t/\tau}\,d\xi,$$

$$\mu_1{}^2=\frac{\xi(1-\xi)}{\nu_0(\theta-\tau\xi)},\qquad \tau^2\mu_2{}^2=\frac{\xi(\theta\xi-\tau)}{\nu_0(\xi-1)}$$

$$(5.9)\qquad \langle\!\langle\sigma(0,t)\rangle\!\rangle=-\frac{\rho}{T}\sqrt{\frac{\nu_0(T+\tau)}{T(T+\theta)}}\,U^\circ\left(\frac{1}{T}\right)$$

Сопоставление формул (5.3), (5.6), (5.9) подтверждает общее заключение предыдущего параграфа о снижении сопротивления в упруговязких жидкостях по сравнению с сопротивлением в вязкой жидкости. Кроме того, из (5.9) видно, что наличие времени последействия у жидкости ослабляет эффект.

Поступила 25 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
2. *Mizushina T., Usui H., Yoshida T.* Turbulent pipe flow of dilute polymer solutions. J. Chem. Eng. Japan, 1974, vol. 7, No. 3.
3. *Meek R. L., Baer A. D.* The periodic viscous sublayer model and heat transfer to drag-reducing solutions. AIChE Jourhal, 1970, vol. 16, No. 6.
4. *Meek R. L., Baer A. D.* Turbulent heat transfer and the periodic viscous sublayer. Int. J. Heat Mass Transfer, 1973, vol. 16, No. 7.
5. *Black T. J.* An analytical study of the measured wall pressure field under supersonic turbulent boundary layers. NASA Contrib. Rept., 1968, No. 888.
6. *Ruckenstein E.* On the mechanism of drag reduction in turbulent flow of viscoelastic liquids. Chem. Eng. Sci., 1971, vol. 26, No. 7.
7. *Ruckenstein E., Popadic V.* Physical model for drag reduction in turbulent pipe flow. Nature. Phys. Sci., 1971, vol. 233, No. 38.
8. *Ruckenstein E.* Momentum and heat transfer in turbulent pipe flow of solutions of macromolecules. Chem. Eng. J., 1972, vol. 4, No. 2.
9. *Городцов В. А., Леонов А. И.* Описание снижения сопротивления турбулентного трения в упруговязких жидкостях. Инж.-физ. ж., 1973, т. 25, № 6.
10. *Городцов В. А., Леонов А. И.* Модель динамического слоя в пристеночной турбулентности жидкости с релаксирующим напряжением. Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 1.
11. *Городцов В. А., Леонов А. И.* О кинетике, неравновесной термодинамике и реологических соотношениях в нелинейной теории вязкоупругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
12. *Городцов В. А., Леонов А. И.* О роли скалярного структурного параметра в описании реологического поведения упруговязких жидкостей. Механика полимеров, 1969, № 6.
13. *Gross B.* Mathematical structure of the theories of viscoelasticity. Paris, Hermann, 1953.