

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МГД-ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ КАВЕРНЕ

А. Т. ФЕДОРЧЕНКО

(Москва)

Рассматривается задача о двумерном течении вязкого, сжимаемого, проводящего газа с существенно неоднородными свойствами в области типа прямоугольной каверны. Изучается воздействие продольного магнитного поля на течение. Исследование задачи проводится на основе численного решения полной нестационарной системы уравнений Навье — Стокса и энергии. Предложена явная численная схема со вторым порядком пространственной аппроксимации, принадлежащая к классу «предиктор — корректор», применение которой позволило получить решения в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса ( $100 \leq Re \leq 5000$ ).

В большинстве решенных численных задач о плоских течениях в области типа прямоугольных каверн (например, работы [1, 2]) рассмотрена динамика вязкой несжимаемой жидкости с постоянными свойствами. Некоторые задачи включают рассмотрение теплопереноса [3] и воздействия поперечного магнитного поля [4] также без учета переменных свойств жидкости. При решении указанных задач, как правило, предполагалось существование стационарного режима течения во всех рассматриваемых диапазонах чисел  $Re$ .

В данной работе представлены результаты расчетов ряда дозвуковых течений как с наложенным продольным магнитным полем, так и без него. Рассмотрены тепловые потоки в стенки каверны. Отмечено появление с ростом  $Re$  существенно нестационарного течения, которое стабилизируется с наложением продольного магнитного поля.

1. В работе исследуется ламинарное течение вязкого, сжимаемого, проводящего газа в области  $Q$  (фиг. 1). Верхняя граница ( $y=b$ ) соответствует горячему, невозмущенному ядру потока. Задача решается при следующих предположениях: 1) магнитное число Рейнольдса считается равным нулю — внешнее магнитное поле не искажается течением; 2) не учитываются электрические поля и все токи перпендикулярны плоскости течения (модель кольцевого канала с изолированными стенками); 3) джоулево тепловыделение несущественно, рассматривается лишь силовое воздействие магнитного поля; 4) пренебрежимы эффекты вязкой диссипации энергии; 5) коэффициенты переноса и внутренняя энергия зависят лишь от температуры (при этом лучистый перенос учитывается путем введения эффективного коэффициента теплопроводности).

С учетом этих предположений система уравнений Навье — Стокса и энергии в безразмерной дивергентной форме имеет вид

$$(1.1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uU+p) + \frac{\partial}{\partial y}(vU) = \frac{1}{Re} D_1 + SF_1$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uV) + \frac{\partial}{\partial y}(vV+p) = \frac{1}{Re} D_2 + SF_2$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(E+p)] + \frac{\partial}{\partial y}[v(E+p)] = \frac{\gamma}{Pr Re} D_3$$

$$(1.5) \quad p=p(\rho, T), e=c_e T, \lambda=\lambda(T), \mu=\mu(T), \sigma=\sigma(T)$$

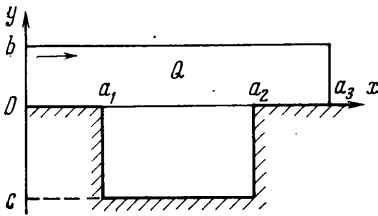
$$U=\rho u, V=\rho v, E=\rho[e+(u^2+v^2)/2]$$

$$D_1 = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$D_2 = \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

$$D_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial e}{\partial y} \right)$$

$F_1, F_2$  — компоненты лоренцовой силы  $\mathbf{F}=\sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$  (для случая продольного поля  $F_1=0; F_2=-\sigma v B_x^2$ );  $u, v$  — компоненты скорости, отнесенные к характерной величине  $u_0$ ;  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $e$  — внутренняя энергия,  $\mu$  — вязкость,  $\lambda$  — теплопроводность,  $\sigma$  — электропроводность, отнесенные соответственно к характерным величинам  $\rho_0, \rho_0 u_0^2, T_0, u_0^2, \mu_0, \lambda_0, \sigma_0$ ;  $\gamma$  — отношение теплоемкостей  $c_p/c_v$ ;  $Re=\rho_0 L u_0/\mu_0$  — число Рейнольдса,  $Pg=\mu_0 c_p/\lambda_0$  — число Прандтля,  $S=\sigma_0 B_{0x}^2 L/\rho_0 u_0$  — число Стюарта (параметр магнитного взаимодействия). В качестве характерных величин используются значения параметров на верхней границе ( $x=0, y=b$ ), характерная длина  $L=a_2-a_1, B_{0x}$  — величина продольного магнитного поля.



Фиг. 1

Определим граничные и начальные условия задачи.

На верхней границе ( $y=b$  на фиг. 1) задаются стационарные граничные условия:  $u=1, T=1, v=0$  — модель нагретой движущейся плоскости. На стенках задаются условия прилипания:  $u=v=0$  и постоянная температура стенки  $T_w$ . При  $x=0$  задаются: профиль температуры  $T_a(y)$ , соответствующий одномерному стационарному теплопереносу с заданной зависимостью  $\lambda(T)$ , входное давление  $p(y)=p_a=\text{const}$ , а также условия:  $v=0, \partial \rho u/\partial x=0$ . При  $x=a_3$  задается давление  $p_a=\text{const}$ , а также условия:  $v=0, \partial \rho u/\partial x=0, \partial T/\partial x=0$ .

В качестве достаточно произвольного начального условия при  $t=0$  во всей области  $Q$  задается температурное поле  $T_{in}(x, y)$ , являющееся результатом решения стационарной задачи теплопроводности (без учета динамики течения); в верхней части  $Q$  ( $0 \leq y \leq b$ ) — течение типа Куэтта; в области каверны ( $y < 0$ ) — покоящийся газ; во всей области  $Q$  — постоянное давление  $p_a$ .

2. Для решения задачи предложена явная численная схема, принадлежащая к классу «предиктор — корректор» с порядком аппроксимации  $O[\tau+h_1^2+h_2^2]$ , где  $\tau$  — временной шаг,  $h_1, h_2$  — пространственные шаги по осям  $x$  и  $y$ . Рассмотрим модельное уравнение

$$(2.1) \quad \partial u/\partial t = Lu = L^0 u + L^1 u + \beta L^2 u, \quad \beta \sim 1/Re$$

$L$  — оператор, содержащий функции ( $L^0$ ) и пространственные производные первого ( $L^1$ ) и второго ( $L^2$ ) порядков от  $u$ . Наряду с основной сеточной функцией  $u_{ij}^n$  ( $x=ih_1, y=jh_2, t=n\tau$ ) введем для промежуточного временного слоя вектор  $u^*$  значений соответствующих функций на серединах горизонтальных и вертикальных отрезков, соединяющих узлы сетки. Решение разностного аналога (2.1) проводится в два этапа:

а) находим значения  $u^*$  на промежуточном временном слое. Например, для точки  $D(x=ih_1, y=(j+1/2)h_2)$

$$(2.2) \quad [u_D^* - (u_{i,j}^n + u_{i,j+1}^n)/2]/\tau = L_D^0 \langle u^n \rangle + L_D^1 \langle u^n \rangle \quad (\text{для } \beta \ll 1)$$

б) вычисляем значения  $u^{n+1}$  на слое  $t=(n+1)\tau$

$$(2.3) \quad (u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n)/\tau = L_{ij}^0 \langle u^n \rangle + L_{ij}^1 \langle u^* \rangle + \beta L_{ij}^2 \langle u^n \rangle$$

При этом в разностных операторах используется симметричная аппроксимация пространственных производных порядка точности  $O[h^2]$ . По заданным условиям на стенках и на верхней границе плотность вычисляется на каждом временном слое из разностного аналога уравнения неразрывности

$$(2.4) \quad \frac{\rho_w^{n+1} - \rho_w^n}{\tau} = - \left\langle \frac{\partial \rho u}{\partial x} \right\rangle_w^{n+1} - \left\langle \frac{\partial \rho v}{\partial y} \right\rangle_w^{n+1}$$

Правая часть (2.4) аппроксимируется со вторым порядком точности по шагам  $h_1, h_2$ .

Анализ методом Фурье схемы (2.2), (2.3), примененной к линеаризованным уравнениям (1.1)–(1.5), приводит к локальному критерию устойчивости  $\tau \leq \tau_m(h, M, Re, Pr, S, \dots)$ , который по порядку близок к критериям, полученным для схем [5–7]. В данной серии расчетов величина  $\tau_m$  ограничивалась в основном числом Маха по формуле  $\tau_m \sim h/\sqrt{2}(|u|+c)$ , где  $c$  – скорость звука.

Оценка «вязкостных» свойств предложенной схемы (на примере простейшего модельного уравнения  $f_t = -uf_x$ ) показывает, что данная схема в отличие от некоторых схем близкого класса [5–7] (сравнительные исследования указанных схем проведены в работе [8]) обладает схемной вязкостью порядка  $u^2\tau$  как на нестационарном, так и на установившемся режимах течения. Следует отметить, что во всем рассмотренном диапазоне чисел  $Re$  ( $100 \leq Re \leq 5000$ ) и  $S$  ( $S=0; 5$ ) расчеты по данной численной схеме проводились без введения каких-либо дополнительных сглаживающих или стабилизирующих факторов.

3. В представленной серии расчетов моделируется течение совершенного газа ( $p = \rho RT$ ) с постоянными величинами  $R, c_v, c_p$ . Рассматривалось существенно дозвуковое течение ( $M < 1$ ) с характерным числом Эккерта

$$Ek = u_0^2/c_p T \ll 1$$

При этом в уравнении (1.4) можно положить  $E \sim \rho e$  и основными характерными критериями подобия будут  $S, M, Re, Pr, \gamma, T_w$ .

Безразмерные зависимости коэффициентов переноса от температуры задавались в виде

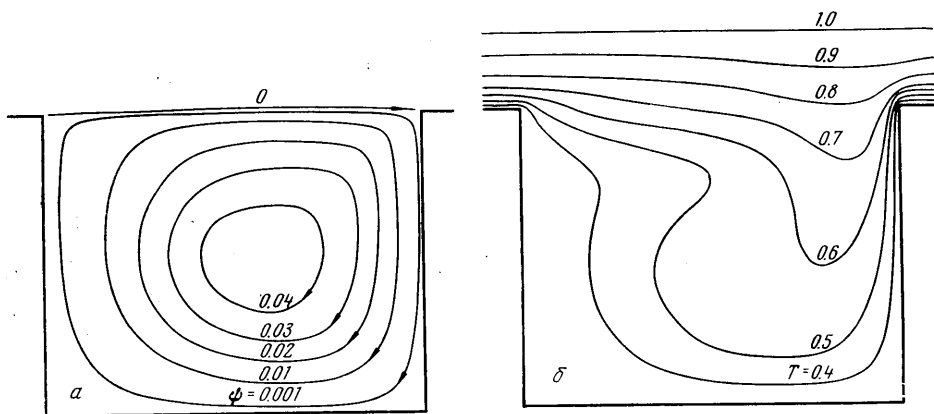
$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mu &= T \quad (\mu_w = T_w = 0.3) \\ \lambda &= 1.8(T - T_w)^2 - 0.118 \quad (\lambda_w = 0.118) \\ \sigma &= (4T - 1)^2/9 \quad (\sigma_w \sim 4 \cdot 10^{-3}) \end{aligned}$$

Во всей серии расчетов использовалось характерное эффективное (с учетом лучистой теплопроводности) число Прандтля  $Pr \sim 0.1$ ; число Маха полагалось равным  $\sim 0.5$ ; отношение теплоемкости  $\gamma \sim 1.2$ . Основными варьируемыми параметрами являлись числа  $Re, S$ . Серии расчетов из шести вариантов соответствовали следующие значения этих чисел:  $Re = 100; 500; 5000; S = 0; 5$ .

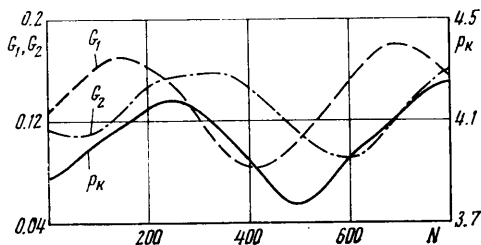
Размеры области  $Q$  задавались следующим образом:

$$b = 0.2, \quad c = -0.8, \quad a_1 = 0.2, \quad a_2 = 1.2, \quad a_3 = 1.4$$

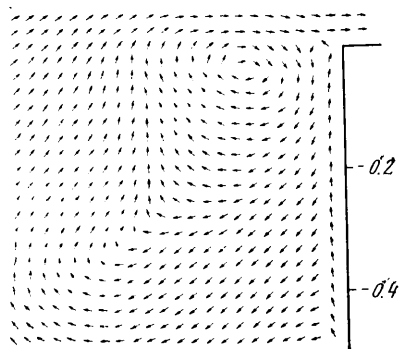
Расчеты (на ЭВМ БЭСМ-6) проводились с использованием равномерной пространственной сетки ( $h_1 = h_2 = h$ ). На первом этапе расчетов задавался шаг  $h = 0.05$ , для которого величина временного шага  $\tau$  ограничивалась в основном числом  $M$  и лежала в диапазоне  $0.007 - 0.01$ .



Фиг. 2.



Фиг. 3



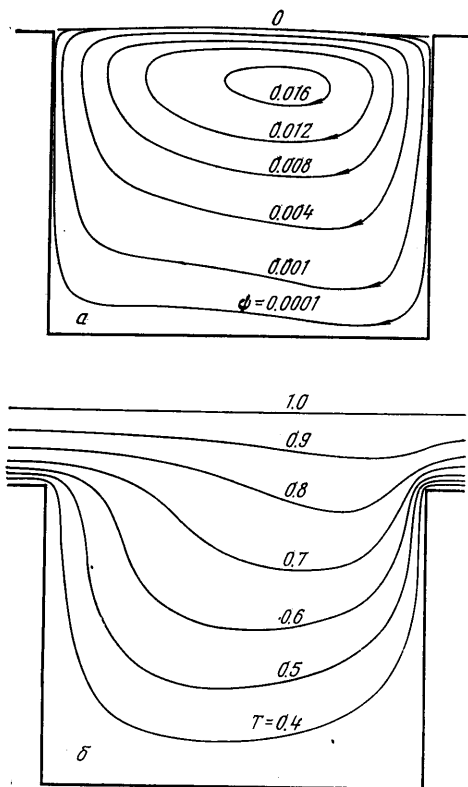
Фиг. 4

Установление стационарного режима течения фиксировалось, если максимальные отличия в полях параметров (при сравнении их через 100–200 итераций) не превышали величины  $\epsilon \sim 0.1\%$ . Число временных итераций, необходимое для выхода на стационарный режим (при переходе от  $Re_1$  к  $Re_2 > Re_1$ ), в различных вариантах находилось в пределах 1000–3000.

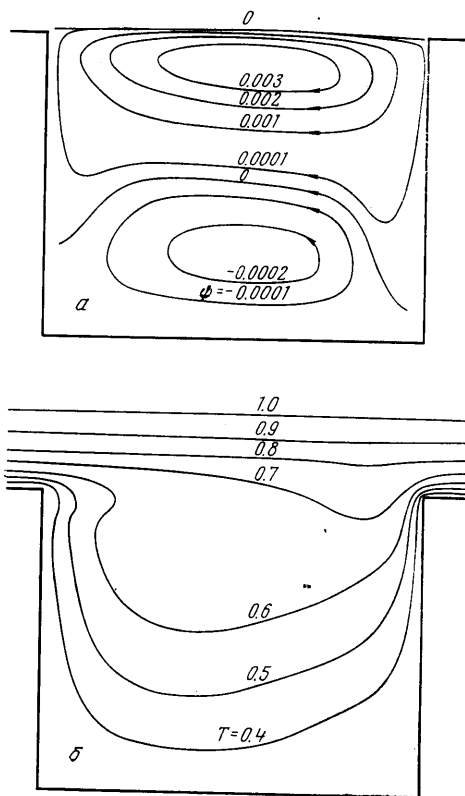
На втором этапе проводилось уточнение полученных решений путем «дробления» сетки, т. е. задания  $h=0.025$ . Погрешности интерполяции параметров при дроблении сетки ликвидировались в процессе выхода на новый стационарный режим. Нестационарное течение ( $Re=5000$ ,  $S=0$ ) уточнялось, начиная с некоего «среднего» момента времени. Применение метода ступенчатого уменьшения пространственного шага позволило повысить точность решения при относительной экономии машинного времени.

Следует отметить, что существенные отличия в вариантах на разных сетках наблюдались лишь в расчетах нестационарного режима ( $Re=5000$ ,  $S=0$ ). В данном случае выявление формы вторичного срывного вихря возможно только с помощью достаточно мелких сеток.

Течение в каверне без воздействия на него магнитного поля ( $S=0$ ) рассчитывалось для  $Re=100$ , 500, 5000. При  $Re=100$  температурное поле на стационарном режиме довольно слабо отличается от начального  $T_{in}(x, y)$ , соответствующего  $Re \sim 0$ , ввиду относительно высокой теплопроводности газа ( $Pr \sim 0.1$ ). При  $Re=500$  (фиг. 2, а, б) интенсивное вихревое движение в каверне существенно деформирует начальное симметричное поле  $T_{in}(x, y)$  и приводит к росту тепловых потоков на правой стенке ( $x=a_3$ ), что связано с усилением конвективного переноса тепла при увеличении  $Re$  ( $Pr = \text{const}$ ).



Фиг. 5



Фиг. 6

При переходе к  $Re=5000$  (от варианта  $Re=500$  как начального) течение принимает существенно нестационарный, периодический характер с амплитудой колебаний параметров, слабо возрастающей со временем. Период течения подробно рассмотрен с момента времени  $t_1=t_0+3000 \times 0.007$  (во время  $t_0$  начинался процесс счета с  $Re=5000$  от стационарного поля с  $Re=500$ ). На фиг. 3 представлены зависимости потоков массы  $G_1$  и  $G_2$  соответственно в сечениях  $x=0$  и  $x=a_3$ , а также характерного давления  $p_k$  на дне каверны (в точке  $x=a_1, y=c$ ) от числа  $N \cdot (t=N \times 0.007)$ , начиная со времени  $t_1$ . Среднее значение  $\langle p_k(t) \rangle \sim p_a$ .

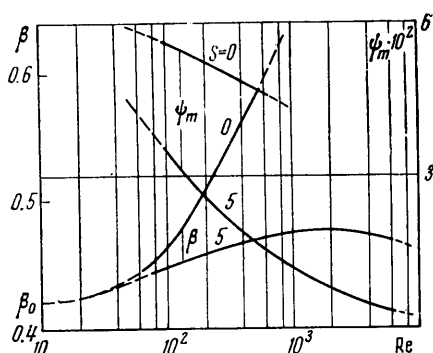
На данном режиме течения наряду с наличием основного вихря, заполняющего большую часть каверны, с левого угла ( $x=a_1, y=0$ ) происходит периодический срыв «дополнительного» вихря, движение которого вдоль линии  $y=0$  завершается выбросом из каверны. На фиг. 4 показана мгновенная картина течения в правой верхней части каверны, соответствующая моменту времени  $N=350$  (фиг. 3). Отметим, что процессы срыва вихрей и развития резонансных колебаний давления во всей зоне каверны взаимосвязаны и имеют равные периоды. Из фиг. 3 можно определить характерное число Струхала  $St=L/(t_p u_0) \approx 0.27$  ( $t_p$  — время периода).

Общая картина нестационарного течения в каверне качественно достаточно хорошо согласуется с экспериментальными результатами работы [9], хотя условия эксперимента были несколько иными — исследовались более высокие числа  $Re$ , отсутствовали большие градиенты температур и т. п. Рассчитанное число  $St$  по порядку величины близко к  $St_m \sim 0,3$  (для

минимальной частоты при акустическом резонансе в плоской каверне, по форме близкой к квадратной, с  $M \sim 0,5$ ), которое было получено экспериментально в работе [9] и оценено аналитически в работах [10, 11].

При наложении на область  $Q$  однородного продольного магнитного поля с  $S=5$  во всех вариантах с  $Re=100; 500; 5000$  были получены стационарные режимы течения, что указывает на существенную стабилизирующую роль продольного магнитного поля в рассмотренном диапазоне параметров.

Рассматривая процесс достаточно сильного воздействия продольного магнитного поля на течение в каверне, можно полагать, что основным характерным критерием подобия, определяющим динамику течения, является произведение  $S Re$ . В первую очередь от этого комплекса зависит соотношение между работой вязких сил (на линии  $y \sim 0$ ), раскручивающих вихрь в каверне и работой магнитных сил, воздействующих на поперечную составляющую скорости и препятствующих тем самым вихревому движению. Естественно ожидать, что увеличение  $S Re$  (например, с ростом  $Re$  при  $S = \text{const} \neq 0$ ) должно приводить к эффекту динамического «запирания» каверны.



Фиг. 7

Этот процесс подавления продольным магнитным полем вихревого движения в каверне (и, как следствие, уменьшения конвективных тепловых потоков по сравнению с течениями без магнитного поля) наглядно иллюстрируется фиг. 5 ( $Re=500$ ) и 6 ( $Re=5000$ ). Наряду с ослаблением «главного» верхнего вихря, в варианте с  $Re=5000$  наблюдается образование вторичного вихря в нижней части каверны. Эффект «затекания» верхнего вихря в участки нижних углов каверны объясняется низким пристеночным значением проводимости  $\sigma_w \ll 1$ , ввиду чего газ имеет тенденцию пересекать магнитные силовые линии вблизи холодных стенок.

На фиг. 7 представлены зависимости величин  $\beta$  и  $\Psi_m$  от чисел  $Re$  и  $S$ . Величина  $\Psi_m$  определяется как «интенсивность» основного вихря в каверне, т. е., значение  $\Psi$  — функции в центре вихря (относительно  $\Psi=0$  на стенке). Параметр  $\beta$  определяет безразмерный интегральный тепловой поток в три стенки каверны по формуле

$$(3.2) \quad \beta = \frac{1}{q_a(a_2 - a_1)} \int_{l_1}^{l_2} \lambda_w \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_w dl_w \quad q_a = \lambda_w \left( \frac{\partial T_a(y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=0}$$

где  $q_a \sim 1.3$ . Интеграл берется вдоль стенок каверны от точки  $l_1 \{x=a_1, y=0\}$  до  $l_2 \{x=a_2, y=0\}$ . Очевидно, в условиях данной задачи при  $c \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$ . Величина  $\beta_0 \sim 0.42$  соответствует решению стационарной задачи теплопроводности для области  $Q$  (т. е. при  $Re \sim 0$ ). Из фиг. 6 видно, что для всех вариантов  $\beta < 1$ . При  $S=0$  кривая  $\beta(Re)$  монотонно возрастает с увеличением  $Re$  и в условиях нестационарного течения с  $Re=5000$  лежит в пределах  $0.7-0.8$ .

При  $S=5$  кривая  $\beta(Re)$  обладает слабо выраженным максимумом при  $Re_m \sim 10^3$ . Такой вид зависимости  $\beta(Re)$  объясняется ослаблением роста конвективного переноса тепла (с увеличением  $Re < Re_m$  и  $Pr = \text{const}$ ), а за-

тем и его уменьшением из-за сильного подавления магнитным полем вихревого движения в каверне.

Очевидно, при  $S > 5$  будет наблюдаться еще более крутое уменьшение  $\Psi_m$  с ростом  $Re$  и максимум  $\beta(Re)$  будет сдвигаться в сторону меньших  $Re_m$ . Следует ожидать, что с дальнейшим ростом  $Re$  при  $S = \text{const} \neq 0$  (или, вообще говоря, с ростом произведения  $S \cdot Re$ ) в результате почти полного подавления полем вихревого течения ( $\Psi_m \rightarrow 0$ ) величина  $\beta$  будет асимптотически стремиться к  $\beta_0$ .

Автор благодарит Л. А. Чудова, У. Г. Пирумова и В. Н. Крылова за ценные советы и обсуждение результатов.

Поступила 6 X 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Симуни Л. М. Численное решение задачи движения жидкости в прямоугольной яме. ПМТФ, 1965, № 6.
2. Кускова Т. В. Разностный метод расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. В сб. Вычислительные методы и программирование, вып. 7. М., Изд-во Моск. ун-та, 1967.
3. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М., «Мир», 1972.
4. Калис Х. Э., Цинобер А. Б. Плоскопараллельное течение вязкой несжимаемой жидкости в каналах под влиянием поперечного магнитного поля. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, № 8, вып. 2.
5. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье – Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
6. Thomten H. U. Numerical Integration of Navier – Stokes Equations, ZAMP, 1966, vol. 17, No. 3.
7. Рихтмайер Р. Д., Морган К. Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
8. Roache P. J. On artificial viscosity. J. Comput. Phys., 1972, vol. 10, No. 2.
9. Rossiter J. E. Wind-tunnel experiments on the flow over rectangular cavities at subsonic and transonic speeds. Aeronaut. Res. Council, 1966, Repts and mem. 3438.
10. Covert E. E. An approximate calculation of the onset velocity of Cavity oscillations. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 12.
11. Bilanin A. J., Covert E. E. Estimation of possible excitation frequencies for shallow rectangular cavities. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 3.