

**ОБТЕКАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ ПОТОКОМ ГАЗОВОЙ  
ПОЛОСТИ**

**Н. И. ЛИХОМАНОВ, А. Г. ПЕТРОВ**

(Москва)

Стационарное движение газовой полости в идеальной несжимаемой жидкости с учетом поверхностного натяжения изучается при помощи вариационного уравнения. Получены приближенные аналитические зависимости безразмерных параметров от степени деформации полости. Показано, что вариационное уравнение допускает точное аналитическое решение. Доказана устойчивость движения, соответствующего точному решению, относительно произвольных возмущений формы полости. Дано решение задачи о стационарном движении эллиптической полости в тяжелой вязкой жидкости и исследуется задача устойчивости. Найдены зависимости скорости подъема полости, числа Рейнольдса и числа Фруда от размера полости.

**1. Движение полости в идеальной жидкости.** Рассматривается задача о стационарном обтекании полости, наполненной газом, плоскопараллельным потоком несжимаемой жидкости. Потенциал поля скорости  $\Phi$  находится из решения внешней задачи Неймана

$$(1.1) \quad \Delta\Phi=0, \quad \left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{\Gamma}=0, \quad \nabla\Phi \rightarrow v_{\infty} \quad (r \rightarrow \infty)$$

где  $v_{\infty}$  — вектор скорости потока на бесконечности.

Если  $v_{\infty}$  и уравнение границы полости  $\Gamma$  заданы, то поле скоростей  $v = \nabla\Phi$  определяется однозначно. Давление  $p$  находится из интеграла Бернулли

$$p + 1/2\rho v^2 = p_{\infty} + 1/2\rho v_{\infty}^2$$

На границе раздела двух фаз при наличии поверхностного натяжения  $\kappa$  должно выполняться следующее соотношение:

$$(1.2) \quad p_g - p|_{\Gamma} = \kappa/R$$

где  $p_g$  — давление газа внутри полости,  $R$  — радиус кривизны границы в соответствующей точке. Граничное условие (1.2) необходимо для определения уравнения границы полости  $\Gamma$ .

Пусть  $la^2$  — площадь полости,  $\chi$  — отношение диаметра полости, перпендикулярного  $v_{\infty}$  к диаметру, параллельному  $v_{\infty}$ . Из математической постановки задачи (1.1), (1.2) следует, что определяющими параметрами являются  $v_{\infty}$ ,  $\rho$ ,  $\kappa$ ,  $p_g - p_{\infty}$ . Эти параметры определяют и форму полости, в частности параметры  $a$  и  $\chi$ . На основании  $\Pi$  — теоремы [1] можно написать

$$F_1(W, P) = 0, \quad F_2(P, \chi) = 0, \quad W = \rho v_{\infty}^2 a / \kappa, \quad P = (p_g - p_{\infty}) / \rho v_{\infty}^2$$

Цель настоящей работы состоит в определении зависимостей  $W(\chi)$ ,  $P(\chi)$ .

Решение этой задачи будет проведено на основе вариационного уравнения, эквивалентного граничному условию (1.2)

$$(1.3) \quad \delta(-1/2 M v_{\infty}^2 + \kappa L + (p_{\infty} - p_g) S) = 0$$

где  $M$  — присоединенная масса полости,  $L$  и  $S$  — соответственно длина дуги  $\Gamma$  и площадь полости, ограниченной контуром  $\Gamma$ . Варьируется граница полости  $\Gamma$ . Вариация границы определяется ее нормальным смещением  $\delta n(s)$ , зависящим от точки  $s$  на границе  $\Gamma$ .

Доказательство эквивалентности (1.2) и (1.3) следует из равенств

$$\delta \left( -\frac{Mv_{\infty}^2}{2} \right) = \int_{\Gamma} (p-p_{\infty}) \delta n ds, \quad \delta L = \int_{\Gamma} \frac{1}{R} \delta n ds, \quad \delta S = \int_{\Gamma} \delta n ds$$

которые получаются непосредственным варьированием функционалов. Вывод первого равенства для вариации присоединенной массы приводится в [2]. Из вариационного уравнения (1.3) следует, что частная производная от функционала, стоящего под знаком вариации, по всякому параметру, определяющему границу полости, равна нулю, например

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( -\frac{Mv_{\infty}^2}{2} + \kappa L + (p_{\infty} - p_g) S \right) = 0$$

Присоединенная масса  $M$  и площадь  $S$  пропорциональны  $a^2$ , длина контура  $L \sim a$ . Отсюда можно получить точное соотношение между кинетической энергией  $1/2 Mv_{\infty}^2$  и потенциальными энергиями  $\kappa L$ ,  $(p_{\infty} - p_g) S$  полости

$$Mv_{\infty}^2 - \kappa L + 2(p_g - p_{\infty}) S = 0$$

Попутно отметим, что аналогичное соотношение можно получить и для трехмерной задачи [3].

Безразмерная форма этого тождества имеет вид

$$(1.4) \quad P = l/2W - 1/2m, \quad l = L/\pi a, \quad m = M/\pi \rho a^2$$

Вариационное уравнение (1.3) совместно с (1.4) позволяет найти приближенный вид зависимостей  $W(\chi)$  и  $P(\chi)$ . Для этого достаточно выбрать семейство контуров  $\Gamma$ , зависящих от одного или нескольких параметров и определить  $M$ ,  $L$ ,  $S$  как функции этих параметров. Вариационное уравнение (1.3) при этом превратится в систему алгебраических уравнений. Для семейства эллипсов  $\Gamma(a, \chi)$

$$(1.5) \quad l = \frac{4}{\pi} \sqrt{\chi} E(k), \quad m = \chi, \quad k^2 = 1 - 1/\chi^2$$

$$W = 2 \frac{dl}{d\chi} / \frac{dm}{d\chi} = \frac{4[(\chi^2 + 1)E(k) - 2K(k)]}{\pi \sqrt{\chi}(\chi^2 - 1)}$$

где  $E(k)$ ,  $K(k)$  — полные эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода,  $\chi$  — отношение осей эллипса. Вид зависимости числа  $W$  от степени деформации  $\chi$  (1.5) найден в [4].

Равенство (1.4) при помощи (1.5) позволяет определить также и вторую зависимость

$$(1.6) \quad P = 2\sqrt{\chi} E(k) / (\pi W) - 1/2\chi$$

Вместо безразмерного числа  $P$  в работе [5] рассматривается

$$\Pi = (p_g - p_0) a^* / \kappa$$

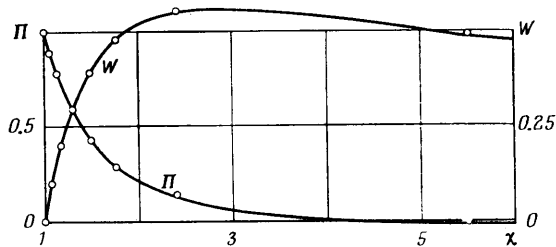
где  $p_0$  — давление в точке торможения при  $v=0$ ,  $a^*$  — половина диаметра полости, параллельного  $v_{\infty}$ , для эллипса  $a^* = a/\sqrt{\chi}$ . Из интеграла Бернулли легко установить связь между безразмерными членами  $P$  и  $\Pi$

$$(1.7) \quad \Pi = Wa^*(P^{-1/2})/a$$

На фиг. 1 сплошными линиями изображены графики зависимости  $W(\chi)$  и  $\Pi(\chi)$ , рассчитанных по формулам (1.5) и (1.7). Здесь же для сравнения кружочками представлены точки по данным численного решения [5].

В точке  $\chi=5.5$  безразмерные числа согласно приближенным формулам (1.5) и (1.7) соответственно равны  $W \approx 0.490$ ,  $\Pi \approx -0.014$ . Согласно результатам точного решения [5],  $W=0.495$ ,  $\Pi=0$ .

**2. Точное решение.** В работе [6] найдена точная форма полости в частном случае, когда давление газа внутри полости равно давлению жидкости в точке торможения. Результаты точного решения в этом случае приводятся также в работах [5] и [7]. Во всех указанных выше работах авторы исходили из сложных нелинейных уравнений.



Фиг. 1

Следуя [4], можно значительно упростить построение точного решения. Попутно будет найдено новое точное решение, отвечающее отрицательному числу Вебера. Кроме того, ниже приведенное исследование необходимо для доказательства устойчивости формы газовой полости, которое будет дано в следующем пункте.

Пусть  $\omega(\zeta)$  конформно отображает внешность единичного круга на комплексной плоскости  $\zeta$  на область потенциального течения (внешность полости). Функция  $\omega(\zeta)$  с условиями нормировки  $\omega(\infty)=\infty$ ,  $\text{Arg } \omega'(\infty)=0$  определяется единственным образом и в области  $|\zeta|>1$  представима в виде ряда Лорана

$$(2.1) \quad \omega(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{1-k}$$

Из условия нормировки следует, что  $a_0$  — действительное положительное число, а остальные коэффициенты — произвольные комплексные числа.

Без ограничения общности можно считать, что площадь полости равна  $\pi$ , откуда

$$(2.2) \quad a_0 \bar{a}_0 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a_n \bar{a}_n$$

Здесь и далее черта сверху означает знак сопряжения комплексного числа.

В силу постоянства площади (2.2) ее вариация равна нулю, и вариационное уравнение (1.3) в безразмерной форме принимает вид

$$(2.3) \quad \delta \left( \frac{m}{2} - \frac{l}{W} \right) = 0$$

$$(2.4) \quad m = 2a_0\bar{a}_0 - a_0\bar{a}_2 - \bar{a}_0a_2 - 1$$

$$\pi l = \oint \left| \frac{d\omega}{d\sigma} \right| \frac{d\sigma}{i\sigma}, \quad \sigma = e^{i\alpha}$$

где  $m$  и  $l$  — соответственно безразмерные присоединенная масса и длина контура.

Таким образом, для решения задачи необходимо найти функцию  $\omega(\zeta)$ , при которой удовлетворяется вариационное уравнение (2.3). Поскольку в области  $|\zeta| > 1$  функция  $d\omega/d\zeta$  аналитична и не обращается в нуль в силу конформности отображения, то она представима в виде квадрата аналитической функции

$$(2.5) \quad \frac{d\omega}{d\zeta} = \Omega^2(\zeta), \quad \Omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \zeta^{-n}, \quad q_1 = 0, \quad \text{Im } q_0 = 0$$

Из (2.1) и (2.5) находим

$$(2.6) \quad a_n = \frac{1}{1-n} \sum_{k=0}^{\infty} q_k q_{n-k}, \quad n \neq 1$$

Введение переменных  $q_n$  упрощает вычисление длины контура. Из (2.4) — (2.6) получим

$$(2.7) \quad m = 2q_0^4 + 4q_0^3 \text{Re } q_2 - 1, \quad l = 2 \text{Res}(\Omega(\zeta)\bar{\Omega}(1/\zeta)/\zeta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} q_n \bar{q}_n$$

Здесь  $\text{Res}$  — вычет соответствующей функции в точке  $\zeta = 0$ . Вычисляя вариации  $m$  и  $l$  и подставляя в (2.3), получим

$$(2.8) \quad \text{Re} \left\{ q_0 \left( \frac{1}{W} - q_0^2 - \frac{3}{2} q_0 q_2 \right) \delta q_0 + \left( \frac{\bar{q}_2}{W} - \frac{1}{2} q_0^3 \right) \delta q_2 \right\} +$$

$$+ \frac{1}{W} \text{Re} \sum_{n=3}^{\infty} \bar{q}_n \delta q_n = 0, \quad \text{Im } \delta q_0 = 0$$

Вариация  $\delta q_0$  — действительное число, остальные вариации в (2.8) — произвольные комплексные числа.

Полное решение (2.8) следует искать при условии, когда между вариациями  $\delta q_n$  имеется связь, выражающая постоянство площади. Однако частное решение можно найти, считая  $\delta q_n$  независимыми, тогда (2.8) дает

$$(2.9) \quad \frac{1}{W} = q_0^2 + \frac{3}{2} q_0 \text{Re } q_2 = \frac{q_0^3}{2\bar{q}_2}, \quad q_n = 0, \quad n = 3, 4, \dots$$

Второе уравнение (2.9) имеет решения  $q_2/q_0 = 1/3$ ,  $q_2/q_0 = -1$ .

Окончательно коэффициенты  $q_n$  и  $a_n$  можно найти из (2.2) и (2.6). Таким образом, коэффициенты  $q_n$ , число Вебера и функция  $\omega(\zeta)$ , соответствующие точному решению, равны

$$(2.10) \quad q_0 = 3a^{-1/2}, \quad q_2 = a^{-1/2}, \quad W = {}^2/_{27}a \approx 0.495$$

$$\omega(\zeta) = 1/a(9\zeta - 6\zeta^{-1} - 1/3\zeta^{-3}), \quad a = ({}^{134}/_3)^{1/2}$$

Из (2.7) и (2.10) определяются  $l$  и  $m$ , а затем по формулам (1.4) и (1.7) можно определить безразмерные числа  $P$  и  $\Pi$

$$l = 20a^{-1}, \quad m = 5 + 2a^{-1}, \quad P = 1/2, \quad \Pi = 0$$

Полученные формулы согласуются с результатами работы [5].

Решение  $q_2/q_0 = -1$  соответствует отрицательному числу Вебера, равному  $W = -2^{(10/3)^{1/2}}$ .

Задача о течении жидкости с отрицательной капиллярностью математически эквивалентна задаче о движении жидкости, отделенной от окружающего ее газа тонкой струйкой другой жидкости плотности  $\rho_1$  и рассматривалась в работе [8] и в ряде работ румынских авторов [9]. На границе потока должно выполняться условие  $p|_r - p_e = \rho_1 v_1^2 \delta / R$ , где  $v_1$  — усредненная скорость струйки,  $\delta$  — толщина струйки. Если  $\kappa = -\rho_1 v_1^2 \delta$ , то это граничное условие совпадает с (1.2).

Таким образом, для задачи об обтекании потоком несжимаемой идеальной жидкости газовой полости, ограниченной тонкой струйкой, найдено точное решение

$$\omega(\xi) = (3/10)^{1/2} (\xi + 2\xi^{-1} - 1/3\xi^{-3})$$

**3. Устойчивость точного решения.** Задача устойчивости стационарного движения полости с постоянным импульсом относительно произвольных возмущений формы полости сводится к исследованию второй вариации функционала  $U$

$$(3.1) \quad U = 1/2 m_0^2 / m + l/W$$

где  $m_0$  — значение присоединенной массы, соответствующей точному решению.

Первая вариация функционала (3.1) с точностью до знака совпадает с левой частью вариационного уравнения (2.3). Для второй вариации получим

$$(3.2) \quad \delta^2 U = (\delta m)^2 / m_0 - \delta^2 m / 2 - \delta^2 l / W$$

При расчете второй вариации функционала  $U$  в стационарной точке, соответствующей точному решению, все вариации  $\delta q_n$  можно считать независимыми. С учетом этого замечания получим

$$(3.3) \quad \delta^2 U = \delta_s^2 U + \frac{4}{W} \sum_{n=2}^{\infty} (\text{Im } \delta q_n)^2$$

$$\delta_s^2 U = \frac{16}{m_0} q_0^4 [(2q_0 + 3q_2) \delta q_0 + q_0 \text{Re } \delta q_2]^2 -$$

$$- 12q_0 [(q_0 + q_2) (\delta q_0)^2 + q_0 \delta q_0 \text{Re } \delta q_2] + \frac{4}{W} \sum_{n=0}^{\infty} (\text{Re } \delta q_n)^2$$

Здесь  $\delta_s^2 U$  соответствует второй вариации при симметричном возмущении формы.

Подставляя найденные значения  $q_n$  из (2.10), можно показать, что квадратичная форма  $\delta_s^2 U$  является положительно определенной, а значит стационарное движение полости устойчиво.

**4. Движение эллиптической полости в вязкой жидкости.** Согласно [4], движение деформирующейся полости в вязкой жидкости описывается системой уравнений Лагранжа с диссипативной функцией

$$(4.1) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tau}{\partial a_1} = \frac{1}{F} - \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial a_1}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \tau}{\partial \chi} - \frac{\partial \tau}{\partial \chi} = -\frac{1}{W} \frac{\partial l}{\partial \chi} - \frac{1}{R} \frac{\partial e}{\partial \chi}$$

$$\tau = \tau_0 a_1^{*2} + \tau_1 \chi^{*2}, \quad e = e_0 a_1^{*2} + e_1 \chi^{*2}, \quad \tau_0 = 1/2 \chi, \quad \tau_1 = \frac{1}{16} \chi^{-2}$$

$$(4.2) \quad e_0 = (\chi + 1)^2, \quad e_1 = 1/4(\chi^{-1} + 4\chi^{-2} + \chi^{-3})$$

$$R = \frac{av_\infty}{\nu}, \quad F = \frac{v_\infty^2}{ag}$$

Здесь  $\tau$  и  $e$  – безразмерные кинетическая энергия и диссипация энергии жидкости,  $R$  и  $F$  – соответственно число Рейнольдса и квадрат числа Фруда,  $v_\infty$  – скорость подъема полости, точка означает знак дифференцирования по времени.

Следует отметить, что в работе [4] была допущена ошибка при вычислении диссипации энергии. Ниже приводится уточнение некоторых выводов, касающихся движения эллиптической полости в вязкой жидкости.

Рассмотрим стационарное движение эллиптической полости. В этом случае  $\dot{\chi} = 0$ ,  $\dot{a}_1 = 1$  и второе уравнение системы (4.1) определяет зависимость  $W(\chi)$ , в точности совпадающей с (1.5). Первое уравнение системы устанавливает связь между числами  $F$  и  $R$ , выражающей равенство силы вязкого сопротивления и выталкивающей силы Архимеда

$$(4.3) \quad RF^{-1} = 2e_0(\chi), \quad W = W(\chi)$$

Кроме того, из определения безразмерных чисел  $W$ ,  $R$  и  $F$  можно получить соотношение

$$(4.4) \quad W^3 R^{-4} F^{-1} = N, \quad N = \rho^3 g \nu^4 / \kappa^3$$

где  $N$  зависит только от свойств жидкости.

Для воды при нормальных условиях  $N \approx 2.80 \cdot 10^{-11}$ .

Из системы уравнений (4.3), (4.4) нетрудно получить зависимость чисел  $R$  и  $F$  от  $\chi$

$$(4.5) \quad R(\chi) = RN^{1/5} = (2e_0 W^3)^{1/5}, \quad F(\chi) = FN^{1/5} = (2e_0)^{-1/5} W^{3/5}$$

Первые две зависимости (4.5) можно рассматривать как систему двух уравнений относительно  $a$ ,  $v_\infty$ , откуда

$$(4.6) \quad v_+(a_+) = (W^2 / 2e_0)^{1/5}, \quad a_+(a_+) = (4e_0^2 W)^{1/5}$$

$$v_+ = \frac{v_\infty}{v_0}, \quad a_+ = \frac{a}{l_0}, \quad v_0^5 = \frac{\kappa^2 g}{\rho^2 \nu}, \quad l_0^5 = \frac{\kappa \nu^2}{\rho g^2}$$

На фиг. 2 представлены графики зависимостей  $R'$ ,  $F'$ ,  $v_+$  от  $a_+$ , рассчитанные по формулам (4.5), (4.6). Функция  $F'(a_+)$  достигает максимального значения, равного 0.077 в точке  $a_+ = 2.26$ ,  $\chi = 1.47$ . Максимальное значение функции  $v_+(a_+)$  равно 0.434 в точке  $a_+ = 2.65$ ,  $\chi = 1.84$ . Число Рейнольдса монотонно возрастает.

Рассмотрим малые колебания эллипса вблизи «положения равновесия»

$$\chi = \chi_0 + \xi, \quad \dot{a}_1 = 1 + \eta, \quad |\xi| \ll 1, \quad |\eta| \ll 1$$

Линеаризованная система уравнений (4.1) имеет вид

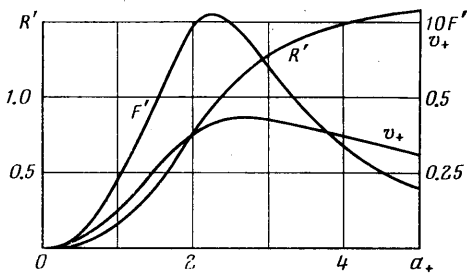
$$\frac{d\tau_0}{d\chi} \xi + \frac{1}{R} \frac{de_0}{d\chi} \xi + \tau_0 \eta + \frac{1}{R} e_0 \eta = 0$$

$$\tau_1 \xi + \frac{1}{R} e_1 \xi + \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\chi^2} \left( \frac{l}{W} - \tau_0 \right) \xi - \frac{d\tau_0}{d\chi} \eta = 0$$

Характеристическое уравнение этой системы имеет три корня, один действительный и два комплексно сопряженных

$$\lambda_k = i\omega_k - \mu_k R, \quad (k=1, 2, 3), \quad \omega_{1,2} = \pm \sqrt{\tau_0' f_1 / 2\tau_1}, \quad \omega_3 = 0$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{e_1}{2\tau_1} - \frac{e_0 f}{\tau_0 f_1}, \quad \mu_3 = \frac{e_0}{\tau_0} \left( 1 + \frac{2f}{f_1} \right)$$



Фиг. 2

$$f_1 = \frac{d}{d\chi} \ln \frac{l' \tau_0^2}{\tau_0'}, \quad f = \frac{d}{d\chi} \ln \frac{e_0}{\tau_0}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по  $\chi$ . Расчеты по этим формулам показывают, что все  $\mu_k$  положительны при всех  $\chi$ , т. е. стационарное движение полости устойчиво.

Поступила 31 III 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1972.
2. Биркгоф Г., Сарангонелло Э. Струи, следы и каверны. М., «Мир», 1964.
3. Петров А. Г. Устойчивость фигуры равновесия газового пузыря в однородном потоке идеальной жидкости. ПМТФ, 1974, № 5.
4. Петров А. Г. Динамика плоской полости в жидкости малой вязкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5.
5. Киселев О. М. К задаче о газовом пузыре в плоском потоке идеальной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
6. McLeod E. B. The explicit Solution of a free boundary problem involving surface tension. J. Rational Mech. and Analysis, 1955, vol. 4, № 4.
7. Петрова С. И. Форма равновесия полости, ограниченной упругой пленкой, в однородном потоке жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
8. Киселев О. М. О форме каверны, ограниченной струйной пленкой. Тр. семинара по краевым задачам. Вып. 6. Казань, Изд-во Казанск. ун-та, 1969.
9. Гуревич М. И. Теория течений со свободными поверхностями. Итоги науки. Гидромеханика, т. 5, М. (ВИНИТИ), 1971.