Ω_{0n}	0.269	0.658	1.065	1.152
f_{0n}	−0.143	−0.025	−0.005	−0.002
Ω_{1n}	2.097	2.949	4.049	5.243
f_{1n}	0.669	−0.034	−0.080	−0.075
Ω_{2n}	4.919	5.338	6.015	6.876
f_{2n}	0.538	0.171	0.112	0.088
Ω_{3n}	7.980	8.243	8.697	9.315
f_{3n}	0.248	0.024	−0.006	−0.014

Разобранный пример соударения показывает, что характерная особенность постановки задачи этого рода в рамках механики сплошной среды состоит в необходимости вводить разрывные начальные условия. Механический смысл этих разрывов состоит в том, что до контакта соударяющиеся тела двигаются по независимым траекториям. Точные решения учитывают эти разрывы, в каких бы производных они ни присутствовали.

Поступила 24 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коненков Ю. К.* О постановке статистических задач взаимодействия упругих тел с окружающей средой. Докл. АН СССР, 1973, т. 206, № 6.
2. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1967.
3. *Коненков Ю. К.* К расчету фазовых скоростей нормальных волн при изгибных колебаниях упругой полосы. Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 2.
4. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.
5. *Григолюк Э. И., Горшков А. Г.* Определение гидродинамических нагрузок при взаимодействии слабых нестационарных волн давления с упругими оболочками. В сб.: Колебания, излучение и демпфирование упругих структур. М., «Наука», 1973.

УДК 532.51 : 532.135

УСТОЙЧИВОСТЬ ПУАЗЕЙЛЕВА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВОЗМУЩЕНИЯМ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

К. Б. ПАВЛОВ, А. С. РОМАНОВ, С. Л. СИМХОВИЧ

(Москва)

Исследование, выполненное в [1], показало, что пуазейлево течение вязкопластической жидкости устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. В то же время известно, что при больших числах Рейнольдса экспериментально наблюдается турбулентный режим течения вязкопластической жидкости [2]. Расхождение выводов линейной теории гидродинамической устойчивости и экспериментальных данных обусловливает проведение исследования устойчивости пуазейлева течения вязкопластической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды, которое составляет содержание настоящей работы.

Нестационарное течение несжимаемой вязкопластической жидкости описывается системой уравнений [3]

$$\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_i}=0 \tag{1.1}$$

$$\sigma_{ij}=2\left(\eta+\frac{\tau_0}{\sqrt{2f_{lm}f_{lm}}}\right)f_{ij}\quad \text{при}\quad \sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}}\geqslant\tau_0$$

$$f_{ij}=0\quad \text{при}\quad \sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}}\leqslant\tau_0$$

Здесь девиатор тензора напряжений σ_{ij} определен в соответствии с реологическим уравнением вязкопластической среды, $\mathbf{f}\equiv f_{ij}$ – тензор скоростей деформации, η – коэффициент динамической вязкости, τ_0 – предел текучести (предельный случай $\tau_0\to 0$ соответствует случаю ньютоновской вязкой жидкости).

В дальнейшем удобнее перейти к безразмерным величинам. При стационарном пуазейлевом течении в плоском канале $-1 \leqslant y \leqslant 1$ имеет место симметричное распределение безразмерной скорости

$$u(y) = \begin{cases} 1-2\zeta-2\zeta y-y^2 & (-1\leqslant y\leqslant -\zeta) \\ (1-\zeta)^2 & (-\zeta\leqslant y\leqslant 0) \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\zeta = \frac{\varkappa}{2} \quad (0\leqslant\varkappa\leqslant 2), \quad \varkappa = \frac{\tau_0 L}{\eta U^\circ}, \quad U^\circ = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{L^2}{2\eta}$$

Здесь U° — характерная скорость, L — характерный размер — полуширина канала. Распределение скорости (1.2) характеризуется наличием в центре канала зоны квазитвердого течения $-\zeta\leqslant y\leqslant\zeta$.

Предполагается, что на течение (1.2) накладываются безразмерные конечные возмущения функции тока

$$\psi(x, y, t) = \varphi_0(y) + \frac{a}{2}\{\varphi(y)\exp[i\alpha(x-ct)] + \tilde{\varphi}(y)\exp[-i\alpha(x-ct)]\} \tag{1.3}$$

Здесь α и αc — волновое число и комплексная частота возмущений, a — амплитуда нестационарной части возмущения, $\varphi_0(y)$ определяет стационарное искажение профиля основного течения за счет конечных возмущений, $\varphi(y)$ — определяет распределение нестационарной части возмущения поперек канала, знак $\sim$ тильда означает комплексно-сопряженную величину.

Возмущение основного течения (1.2) приводит к деформации поверхности раздела зон квазитвердого и вязкого течений. Можно показать, что средний по длине канала градиент давления $\langle\partial p/\partial x\rangle$ const. Если положить его равным градиенту давления невозмущенного течения, то выражение деформации поверхности раздела зон может быть записано в виде

$$y = -\theta(x, t) = -\zeta + \frac{a}{2}\{h\exp[i\alpha(x-ct)] + \tilde{h}[-i\alpha(x-ct)]\}, \qquad h = \mathrm{const} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) в (1.1) с точностью до членов порядка a^2, но с учетом членов порядка $a^2\,\mathrm{Re}$ (число Re может быть большим) можно получить уравнение относительно функций $\varphi_0(y)$ и $\varphi(y)$

$$\frac{i}{4}\alpha a^2\,\mathrm{Re}(\varphi'\tilde{\varphi}-\varphi\tilde{\varphi}')' = \varphi_0''' \tag{1.5}$$

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi) - U''\varphi = \frac{1}{i\alpha\,\mathrm{Re}}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi) - \frac{4\alpha^2\varkappa}{i\alpha\,\mathrm{Re}}\left(\frac{\varphi'}{U'}\right)' \tag{1.6}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U^\circ L}{\eta}, \qquad U(y) = u(y) + \varphi_0'(y)$$

Здесь производная по y обозначается штрихом.

Функции $\varphi_0(y)$ и $\varphi(y)$ должны удовлетворять условиям прилипания на твердой поверхности канала $y=-1$

$$\varphi_0'(-1) = 0 \tag{1.7}$$

$$\varphi(-1) = \varphi'(-1) = 0 \tag{1.8}$$

На границе квазитвердой зоны обращаются в нуль возмущения скорости и тензор скоростей деформации $\mathrm{f}=0$. Эти условия, записанные на усредненной поверхности раздела зон $y=-\zeta$, имеют вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{\partial^k}{\partial y^k}\quad ' - \frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\Big|_{y=-\zeta}\Bigg]\frac{a^k}{2^k k!}\{h\exp[i\alpha(x-ct)] + \tag{1.9}$$

$$+\tilde{h}\exp[-i\alpha(x-ct)]\}^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial^k}{\partial y^k}\mathrm{f}|_{y=-\zeta}\frac{a^k}{2^k\,k!}\{h\exp[i\alpha(x-ct)] + \tilde{h}\exp[-i\alpha(x-ct)]\}^k = 0$$

С точностью до членов порядка a^2 условия (1.9) приобретают форму

$$\varphi_0''(-\zeta)=0 \tag{1.10}$$

$$\varphi(-\zeta)=\varphi'(-\zeta)=0 \tag{1.11}$$

В том же приближении величина h, определяющая деформацию поверхности раздела зон, записывается в виде [1]

$$h=-\varphi''(-\zeta)/U''(-\zeta) \tag{1.12}$$

Последующее рассмотрение удобно провести, вводя новую независимую переменную $z=(y+\zeta)/(1-\zeta)$ и одновременно заменив характерные длину L и скорость U^0 на величины $L(1-\zeta)$ и $U^0(1-\zeta)^2$. Отбрасывая несущественный последний член в правой части уравнения (1.6) [1], запишем уравнения (1.5) и (1.6) в виде

$$\frac{i}{4}\alpha a^2\,\mathrm{Re}(\varphi'\tilde{\varphi}-\varphi\tilde{\varphi}')'=\varphi_0''' \tag{1.13}$$

$$(U-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-U''\varphi=\frac{1}{i\alpha\,\mathrm{Re}}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi) \tag{1.14}$$

Функция $\varphi(z)$ должна быть определена из задачи (1.14), (1.11), (1.8). Первая пара независимых частных решений φ_1 и φ_2 («невязкие» интегралы [4]) может быть представлена в форме степенных рядов

$$\varphi_1=(z-z_c)\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_c)^k,\qquad \varphi_2=P_c\ln(z-z_c)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_c)^k \tag{1.15}$$

Здесь z_c точка, в которой $U(z_c)=c$, а величина $P_c=U_c''/U_c'$ будет рассматриваться как независимый параметр, определяющий выражения коэффициентов a_k, b_k в разложениях (1.15) [5]. Вторая пара независимых частных решений $\varphi_{3,4}$ («вязкие» интегралы [4]) определяется в виде

$$\varphi_{3,4}=\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}d\eta\int\limits_{\pm\infty}^{\eta}\sqrt{\eta}\,H_{1/3}^{(1,2)}\left[\frac{2}{3}(i\eta)^{3/2}\right]d\eta \tag{1.16}$$

$$\eta=(z-z_c)\varepsilon,\qquad \varepsilon=(\alpha\,\mathrm{Re}\,U_c')^{1/3}$$

Условие нетривиальности общего решения $\Phi=\sum_{i=1}^{4}c_i\varphi_i$, записанное с точностью до членов порядка $(\alpha\,\mathrm{Re})^{-1/2}$ [1], следующее из граничных условий (1.8), (1.11), приводит к вековому уравнению, совпадающему с вековым уравнением для течения Пуазейля ньютоновской вязкой жидкости в случае антисимметричных возмущений

$$\frac{\varphi_1(-1)\varphi_2(0)-\varphi_1(0)\varphi_2(-1)}{\varphi_1'(-1)\varphi_2(0)-\varphi_2'(-1)\varphi_1(0)}=\frac{\varphi_3(-1)}{\varphi_3'(-1)} \tag{1.17}$$

Используя уравнение (1.13), граничные условия (1.7) и (1.10), а также определения P_c и ε, можно получить выражения

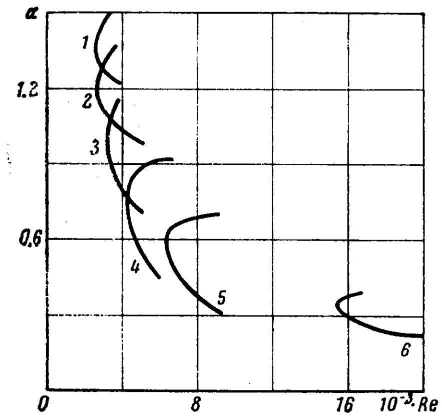
$$a^2=\varepsilon^{-3}\frac{2(P_cz_c-1)}{(P_c\tau_c-\tau_c')}\left[\frac{2(P_cz_c-1)}{(P_c\tau_c-\tau_c')}\tau_c-2z_c\right] \tag{1.18}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{1}{\alpha a^2}\frac{2(P_cz_c-1)}{(P_c\tau_c-\tau_c')} \tag{1.19}$$

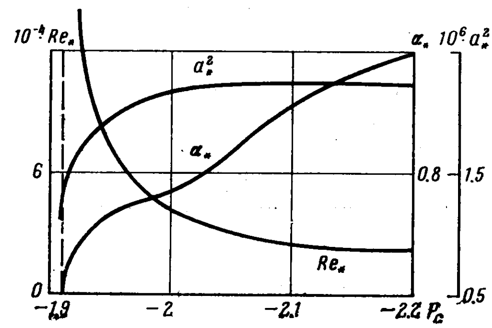
$$\tau_c=\frac{i}{4}[\varphi'(z_c)\tilde{\varphi}(z_c)-\tilde{\varphi}'(z_c)\varphi(z_c)]$$

Определяя из векового уравнения (1.17) при фиксированном P_c значения величин α, z_c, ε соответствующие нейтральным возмущениям ($\mathrm{Imag}\,c=0$), и подставляя их в (1.18) и (1.19), найдем зависимость $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}(\alpha)$, которая представляет кривую нейтральной устойчивости для заданного значения P_c. Результаты расчетов приводятся на фиг. 1, где кривым *1–6* соответствуют $P_c=-2.14$, -2.1, -2.06, -2, -1.96, -1.92.

Зависимости критических значений числа Рейнольдса Re_*, квадрата амплитуды возмущения a^2 и волнового числа α от параметра P_c представлены на фиг. 2. Результаты расчетов показывают, что при $P_c \geqslant P_c^* = -1.91$, $\mathrm{Re}_* = \infty$ при уменьшении P_c от значения P_c^*, значение Re_* выходит на асимптотическое значение $\mathrm{Re}_* = \mathrm{Re}_*^* \approx 2 \cdot 10^4$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Отметим, что отношение $\mathrm{Re}_*{}^\circ = \mathrm{Re}_*^* / (1-\zeta)$ определяет критическое значение числа Рейнольдса, если за характерный размер принять ширину канала, а за характерную скорость – скорость квазитвердой зоны.

В заключение авторы благодарят С. А. Регирера за обсуждение результатов работы.

Поступила 1 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Павлов К. Б., Романов А. С., Симхович С. Л.* Гидродинамическая устойчивость пуазейлева течения неньютоновской вязкопластической жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 6.
2. *Огибалов П. М., Мирзаджанзаде А. Х.* Нестационарные движения вязкопластических сред. М., Изд-во Моск. ун-та, 1970.
3. *Рейнер М.* Реология, М., «Наука», 1965.
4. *Линь Цзя-цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
5. *Meksyn D.* Stability of laminar flow between parallel planes for two- and three-dimensional finite disturbances. Z. Physik, 1964, Bd 178, 2.

УДК 532.516

О НЕСТАЦИОНАРНОМ ВНУТРЕННЕМ РАЗОГРЕВЕ ЛЕДНИКОВ

А. Н. БОЖИНСКИЙ

(Москва)

Стационарная задача о внутреннем разогреве холодных ледников рассмотрена в работах [1, 2]. Было показано, что в стационарном состоянии тепло, выделяемое внутри ледника за счет вязкой диссипации, при определенных условиях не успевает отводиться через граничные поверхности, и имеет место аналогия со стационарной теорией теплового взрыва [3]. Предполагалось, что вследствие нестационарного разогрева температура на ложе ледника может достигнуть точки плавления и будут созданы предпосылки для подвижки ледника.

Здесь исследуется нестационарная реакция ледника, обусловленная малыми отклонениями параметров системы от критических значений, отвечающих стационарному состоянию.