

УДК 532.5.013.4 : 534.121/122

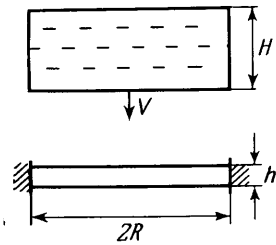
## О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ЖИДКОГО СЛОЯ С МЕМБРАНОЙ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ УДАРА

Ю. К. КОНЕНКОВ

(Москва)

Пусть жидкое тело, имеющее форму цилиндра высотой  $H$  и радиусом основания  $R$ , падает со скоростью  $V$  на круговую мембрану и приходит (в момент времени  $t=0$ ) в соприкосновение с ней своим плоским основанием. В данной работе удар рассматривается как внезапный контакт двух тел и их совместное движение.

Задача рассматривается в линейной постановке при малых значениях  $V/c_0$ , где  $c_0$  — скорость распространения звука в жидкости. Известно, что процесс удара сопровождается переходом кинетической энергии поступательного движения тела в волновую энергию деформаций. Образовавшаяся при внезапном торможении передних слоев жидкости волна при многократном отражении приводит к деформации цилиндра. Именно за счет волнового поля постепенно формируется и начинает нарастать радиальная составляющая скорости, которая до начала удара в слое отсутствовала. Это, в конечном счете, может привести к растрескиванию (разбрызгиванию) жидкого слоя, т. е. к явлению сугубо нелинейному, но наиболее интенсивное взаимодействие слоя с мембраной будет происходить именно на волновом этапе [1]. В данной работе изучается начальная стадия удара, когда волновые процессы являются преобладающими.



Фиг. 1

Направим ось  $z$ , как показано на фиг. 1, по оси симметрии в сторону движения слоя таким образом, чтобы плоскость  $z=H$  совпала с поверхностью слоя и мембраны в момент начала удара. Состояние слоя в процессе взаимодействия описываем потенциалом  $\Phi(t, r, z)$ , который найдем из волнового уравнения

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

Прогиб мембраны  $w(t, r)$  найдем из уравнения

$$(2) \quad T \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial w}{\partial r} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p(t, r, H)$$

где  $p(t, r, H)$  — давление в слое у поверхности мембраны при  $z=H$ ,  $T$ ,  $\rho$ ,  $h$  — параметры мембраны: натяжение, плотность, толщина. Эти уравнения дополняются граничными и начальными условиями, отражающими контакт пластины и жидкого слоя, условия закрепления мембраны, а также то обстоятельство, что в момент начала удара слой и мембрана имели различные скорости

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (z=H), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (r=R, z=0), \quad w=0 \quad (r=R)$$

$$(4) \quad \Phi(0, r, z) = -V(z-H) + V \int_0^z \int_0^{z_1} \delta(z_2 - H) dz_1 dz_2$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (t=0)$$

Решение задачи можно записать в виде

$$(5) \quad \Phi(t, r, z) = \sum_{n,m} a_{nm} \Phi_{nm}(z) I_0 \left( \alpha_n \frac{r}{R} \right) \cos \omega_{nm} t$$

$$\left( \omega_{nm}^2 = \frac{c_0^2 (\alpha_n^2 H^2 + \beta_{nm}^2 R^2)}{R^2 H^2} \right)$$

где  $\alpha_n$  — корни функций Бесселя  $I_0(\alpha) = 0$ . Прямой подстановкой можно убедиться, что решение, подобранное таким образом, обеспечивает выполнение части граничных и начальных условий. Остается удовлетворить граничное условие на свободной по-

верхности слоя при  $z=0$ , граничное условие на поверхности контакта при  $z=H$  и начальное условие, отражающее существование разрывов в распределении скорости в системе, образовавшейся вследствие контакта тел. Таким образом приходим к задаче о разложении некоторой функции  $f_n(z)$  в ряд по собственным формам  $\Phi_{nm}(z)$  следующей краевой задачи:

$$(6) \quad \frac{d^2}{dz^2} \Phi_{nm}(z) + \frac{\beta_{nm}^2}{H^2} \Phi_{nm}(z) = 0$$

$$\Phi_{nm}(0) = 0, \quad \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nk}^2 \right] \frac{d\Phi_{nm}}{dz} = \rho_0 \omega_{nm}^2 \Phi_{nm} \quad (z=H)$$

Легко показать, используя только уравнения и граничные условия (6), что функции  $\Phi_{nm}(z)$  в обычном смысле слова неортогональны, так как имеет место соотношение

$$(7) \quad \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nm}^2 \right] \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nk}^2 \right] \int_0^H \Phi_{nm}(z) \Phi_{nk}(z) dz +$$

$$+ \rho_0 c_0^2 \frac{T\alpha_n^2}{R^2} \Phi_{nm}(H) \Phi_{nk}(H) = 0$$

Но эти же соотношения позволяют найти все коэффициенты разложения функции  $f_n(z)$  в ряд по собственным формам задачи (6). Действительно, комбинируя ряд для второй производной функции  $f_n(z)$  с рядом для самой функции  $f_n(z)$ , приходим к следующему равенству

$$\rho h c_0^2 \frac{d^2 f_n}{dz^2} + \frac{\alpha_n^2}{R^2} [T - \rho h c_0^2] f_n = \sum_{nm} a_{nm} \times \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nm}^2 \right] \Phi_{nm}(z)$$

Умножая обе части этого равенства на  $[\frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nk}^2] \Phi_{nk}(z)$  и интегрируя по  $z$  в пределах от 0 до  $H$ , складывая затем получающееся соотношение с равенством

$$\frac{\rho_0 c_0^2 T \alpha_n^2}{R^2} f_n(H) \Phi_{nk}(H) = \sum_m \frac{\rho_0 c_0^2 T \alpha_n^2}{R^2} a_{nm} \times \Phi_{nm}(H) \Phi_{nk}(H)$$

приходим к соотношению

$$\int_0^H \left[ \rho h c_0^2 \frac{d^2 f_n}{dz^2} + \frac{\alpha_n^2}{R^2} (T - \rho h c_0^2) f_n \right] \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nk}^2 \right] \Phi_{nk}(z) dz +$$

$$+ \frac{\rho_0 c_0^2 T \alpha_n^2}{R^2} f_n(H) \Phi_{nk}(H) = \sum_m a_{nm} \times \left\{ \int_0^H \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nm}^2 \right] \times \right.$$

$$\times \left. \left[ \frac{T\alpha_n^2}{R^2} - \rho h \omega_{nk}^2 \right] \Phi_{nm}(z) \Phi_{nk}(z) dz + \frac{\rho_0 c_0^2 T \alpha_n^2}{R^2} \Phi_{nm}(H) \Phi_{nk}(H) \right\}$$

Легко заметить, что все члены ряда в правой части этого уравнения кроме одного при  $m=k$ , вследствие соотношения (7) обращаются в нуль. Отсюда сразу же следует

$$a_{mk} = \frac{\int_0^H [H^2 f_n'' + \theta_n^2 (\eta - 1) f_n] [\eta \theta_n^2 - \Omega_{nk}^2] \Phi_{nk} dz' + \mu \eta \theta_n^2 \varepsilon f_n(H) \Phi_{nk}(H)}{\int_0^1 [\eta \theta_n^2 - \Omega_{nk}^2]^2 \Phi_{nk}^2 dz' + \mu \eta \theta_n^2 \varepsilon \Phi_{nk}^2(H)}$$

$$\Omega_{nk} = \frac{\omega_{nk} H}{c_0}, \quad \eta = \frac{c^2}{c_0^2}, \quad \mu = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{H}{h},$$

$$\theta_n = \frac{\alpha_n H}{R}, \quad z' = \frac{z}{H}, \quad r' = \frac{r}{H}, \quad t' = \frac{tH}{c_0}$$

Здесь штрихи у  $f_n$  означают производную. Решение вспомогательной задачи о разложении по неортогональным собственным формам, таким образом, найдено. Применительно к начальным условиям нашей задачи, выраженным формулой (4), полученное выражение позволяет записать решение даже без квадратур

$$\Phi = \sum_{n,m} \frac{4V\alpha_n(\eta-1)H^3}{R^2 I_1(\alpha_n)\beta_{nm}^2} (\eta\theta_n^2 - \Omega_{nm}^2) I_0(\theta_n r') \sin(\beta_{nm} z') \cos \Omega_{nm} t' \times \\ \times \frac{\{\beta_{nm} + [-1 + \beta_{nm}^2 \theta_n^{-2} (\eta-1)^{-1}] \sin \beta_{nm}\}}{\{(\eta\theta_n^2 - \Omega_{nm}^2)^2 (1 - 2^{-1} \beta_{nm}^{-1} \sin 2\beta_{nm}) + 2\mu\eta\theta_n^2 \varepsilon \sin^2 \beta_{nm}\}}$$

Здесь через  $\beta_{nm}$  обозначены собственные значения задачи (6). Уравнение для собственных значений получается, как обычно, исключением из решения краевой задачи постоянных интегрирования. Таким образом, получаем

$$(8) \quad \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \frac{[\theta_n^2(\eta-1) - \beta^2]}{[\theta_n^2 + \beta^2]}$$

В работах [2, 3] были разработаны методы решения аналогичных уравнений. Использование этих методов показывает, что в данном случае существуют условия, при выполнении которых имеются чисто мнимые ветви. При выполнении одной из групп неравенств  $\eta < 1$  или  $\eta > 1$ ,  $\mu\varepsilon(\eta-1)^{-1} > 1$  уравнение (8) имеет чисто мнимые корни, а задача (6) имеет в качестве решений соответствующие собственные формы. При выполнении этих условий взаимодействие между упругой системой и средой является сильным. В этом случае упругость системы, образованной вследствие контакта, обусловлена в основном упругими свойствами мембраны, а инерциальные параметры в основном определяются присоединенной массой жидкости.

Таким образом, само существование этих форм обусловлено взаимодействием, так как соответствующих аналогов в невзаимодействующих подсистемах (т. е. в слое и в мембране) нет. Анализ показывает, что если эти условия не выполняются, то серия собственных значений (соответственно и собственных функций) распадается приблизительно на две последовательности, одна из которых для высоких номеров близка к собственным значениям слоя, прилегающего к жесткой стенке, а другая — к собственным значениям мембраны.

$\theta_n$	$M_0/M=0.5$	1.0	2.0	$\theta_n$	$M_0/M=0.5$	1.0	2.0
0.2	659	745	830	5.4	533	572	632
0.6	650	733	820	5.8	531	567	625
1.0	632	714	801	6.2	528	563	618
1.4	615	691	779	6.6	525	559	612
1.8	599	670	756	7.0	524	556	606
2.2	585	652	734	7.4	522	552	601
2.6	574	635	715	7.8	520	549	597
3.0	564	621	699	8.2	518	546	593
3.4	555	608	683	8.6	517	544	589
3.8	550	599	671	9.0	516	541	585
4.2	546	591	659	9.4	515	539	582
4.6	540	583	649	9.8	514	537	579
5.0	536	577	640	$\infty$	487	487	487

Проведенный качественный анализ особенностей корней уравнения (8) позволил провести расчет для широкого диапазона параметров. Ниже приводятся некоторые результаты расчета. В таблице представлена величина  $y_0(\eta, \theta_n)$ , позволяющая определить мнимый корень (8) при  $\eta=0.1$  и при различных значениях  $\mu\varepsilon$  (0.5, 1, 2). Определение  $\beta_{n0}$  по значениям  $y_0$  осуществляется по формуле  $\beta_{n0} = \theta_n (0.9 + 10^{-4} y_0)$ . Как видно, при этих значениях  $\eta=c^2/c_0^2$  чисто мнимый корень зависит почти линейно от параметров  $n$  и  $H/R$ . Остальные корни можно определить по формуле  $\beta_{nm} = \beta_{0m} + 10^{-3} y_m(\mu\varepsilon)$ , где величины  $y_m(\mu\varepsilon)$  можно взять из графика на фиг. 2, а величины  $\beta_{0m}$  приведены ниже.

$M_0/M$	0.5	1.0	2.0
$\beta_{01}$	1.8366	2.0287	2.2889
$\beta_{02}$	4.8159	4.9135	5.0870
$\beta_{03}$	7.9171	7.9787	8.0962

На фиг. 3 представлены для примера чисто мнимые корни для параметра  $\eta=1$  и для различных значений  $\mu\varepsilon=0.5$ ,  $\mu\varepsilon=1$  и  $\mu\varepsilon=2$ . Интересно отметить, что  $\beta_{0n}$ , представленные выше, являются точными нижними границами для соответствующих множеств  $\beta_{nm}(\mu\varepsilon, \eta)$  при любых значениях  $n$  и  $\eta$ .

Таким образом, поведение различных корней (8) исследовано, и можно перейти к определению взаимодействия. Зная потенциал, можно, например, найти давление на поверхности пластины и среды, а затем и силу взаимодействия  $F$ , которую удобно записать в виде

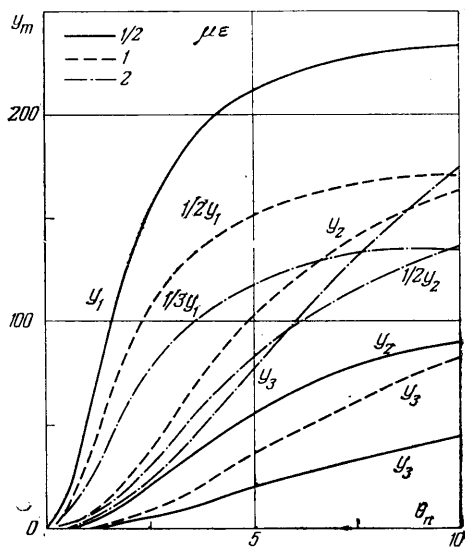
$$(9) \quad F = 4\pi H^2 V \rho_0 c_0 \left( \frac{c^2}{c_0^2} - 1 \right) f \left( \frac{c^2}{c_0^2}, \frac{H}{R}, \frac{\rho_0}{\rho}, \frac{h}{H}, \frac{c_0 t}{H} \right)$$

$$f = \sum_{n,m} \frac{[\theta_n^2(\eta-1) - \beta_{nm}^2] \sqrt{\theta_n^2 + \beta_{nm}^2} \sin \beta_{nm}}{\{[\theta_n^2(\eta-1) - \beta_{nm}^2]^2 (1 - 2^{-1} \beta_{nm}^{-1} \sin 2\beta_{nm}) - 2\mu\eta\theta_n^2 \varepsilon \sin^2 \beta_{nm}\}} \times$$

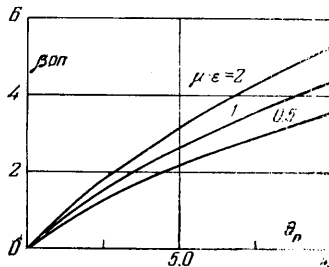
$$\times \frac{2}{\beta_{nm}} \left\{ 1 - \frac{\sin \beta_{nm}}{\beta_{nm}} \left[ 1 - \frac{\beta_{nm}^2}{\theta_n^2(\eta-1)} \right] \right\} \sin \Omega_{nm} t'$$

Отметим попутно, что хотя соотношение (9) следует из самых общих соображений, основанных на размерности [4] и, следовательно, пригодных для любых видов взаимодействия как волнового, так и нелинейного гидродинамического характера, существуют работы (например, [5]), где утверждается, что силу взаимодействия упругой системы со средой можно аппроксимировать соотношением типа

$$F \left( \frac{c_0 t}{R} \right) = \exp \left( - \frac{c_0 t}{2R} \right) \cos \left( \frac{c_0 t}{2R} \right)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Совершенно очевидно, что такого типа аппроксимации по существу заменяют трудную задачу о взаимодействии тривиальной задачей о вынужденных колебаниях.

Дальнейшие расчеты связаны с суммированием ряда (9), сходимость которого легко установить с помощью признака Дирихле. Например, для конкретного набора параметров  $\eta=0.1$ ,  $\mu\varepsilon=0.5$ ,  $\theta_1=1$  с помощью таблицы и графиков на фиг. 2 легко найдем соответствующие собственные значения  $\beta_{nm}$ :

$\alpha_n$	2.405	5.520	8.654	11.79
$\beta_{n0}$	0.963	2.199	3.437	4.676
$\beta_{n1}$	1.842	1.851	1.855	1.858
$\beta_{n2}$	4.817	4.819	4.820	4.821
$\beta_{n3}$	7.917	7.917	7.918	7.920

Каждому члену этой таблицы соответствует член ряда (9). В данном примере ограничиваемся удержанием 16 членов в спектре удара. Амплитуды и частоты гармоник приведены ниже:

$\Omega_{0n}$	0.269	0.658	1.065	1.152
$f_{0n}$	-0.143	-0.025	-0.005	-0.002
$\Omega_{1n}$	2.097	2.949	4.049	5.243
$f_{1n}$	0.669	-0.034	-0.080	-0.075
$\Omega_{2n}$	4.919	5.338	6.015	6.876
$f_{2n}$	0.538	0.171	0.112	0.088
$\Omega_{3n}$	7.980	8.243	8.697	9.315
$f_{3n}$	0.248	0.024	-0.006	-0.014

Разобранный пример соударения показывает, что характерная особенность постановки задачи этого рода в рамках механики сплошной среды состоит в необходимости вводить разрывные начальные условия. Механический смысл этих разрывов состоит в том, что до контакта соударяющиеся тела двигаются по независимым траекториям. Точные решения учитывают эти разрывы, в каких бы производных они ни присутствовали.

Поступила 24 VIII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Коненков Ю. К. О постановке статистических задач взаимодействия упругих тел с окружающей средой. Докл. АН СССР, 1973, т. 206, № 6.
2. Брезовских Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1967.
3. Коненков Ю. К. К расчету фазовых скоростей нормальных волн при изгибных колебаниях упругой полосы. Акуст. ж., 1962, т. 8, вып. 2.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., Гостехиздат, 1954.
5. Григорюк Э. И., Горшков А. Г. Определение гидродинамических нагрузок при взаимодействии слабых нестационарных волн давления с упругими оболочками. В сб.: Колебания, излучение и демпфирование упругих структур. М., «Наука», 1973.

УДК 532.51 : 532.135

### УСТОЙЧИВОСТЬ ПУАЗЕЙЛЕВА ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ВОЗМУЩЕНИЯМ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

К. Б. ПАВЛОВ, А. С. РОМАНОВ, С. Л. СИМХОВИЧ

(Москва)

Исследование, выполненное в [1], показало, что пуазейлево течение вязкопластической жидкости устойчиво по отношению к бесконечно малым возмущениям. В то же время известно, что при больших числах Рейнольдса экспериментально наблюдается турбулентный режим течения вязкопластической жидкости [2]. Расхождение выводов линейной теории гидродинамической устойчивости и экспериментальных данных обуславливает проведение исследования устойчивости пуазейлево течения вязкопластической жидкости по отношению к возмущениям конечной амплитуды, которое составляет содержание настоящей работы.

Нестационарное течение несжимаемой вязкопластической жидкости описывается системой уравнений [3]

$$(1.1) \quad \rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\sigma_{ij} = 2 \left( \eta + \frac{\tau_0}{\sqrt{2f_{lm}f_{lm}}} \right) f_{ij} \quad \text{при} \quad \sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}} \geq \tau_0$$

$$f_{ij} = 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{2\sigma_{lm}\sigma_{lm}} \leq \tau_0$$

Здесь девиатор тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  определен в соответствии с реологическим уравнением вязкопластической среды,  $\mathbf{f} = f_{ij}$  — тензор скоростей деформации,  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $\tau_0$  — предел текучести (предельный случай  $\tau_0 \rightarrow 0$  соответствует случаю ньютоновской вязкой жидкости).