МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975

УДК 536.25

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЙ ДРЕЙФ КАПЕЛЬКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. К. БРАТУХИН

(Пермь)

Рассмотрена задача о термокапиллярном дрейфе капли вязкой жидкости, заполняющей все пространство в другой жидкости при постоянном градиенте температуры на бесконечности, в отсутствие силы тяжести. В озееновском приближении получено распределение скоростей, температур и давлений в жидкостях, найдена скорость дрейфа капли и ее форма.

1. Пусть в заполняющую все пространство жидкость (первая среда) помещена капля другой жидкости (вторая среда). Если на бесконечности имеется постоянный градиент температуры $\nabla T=\mathbf{A}$, то из-за зависимости коэффициента поверхностного натяжения α от температуры на поверхности капли возникают касательные напряжения, вызывающие термокапиллярную конвекцию в обеих средах. Начинает перемещаться в жидкости и сама капля. Скорость этого движения в стационарных условиях постоянна и определяется в ходе решения.

Примем, что все параметры жидкостей (плотности ρ_i, кинематические и динамические коэффициенты вязкости ν_i и η_i, коэффициенты теплопроводности и температуропроводности $\varkappa_i$ и χ_i, $i=1, 2$, для первой и второй среды соответственно) постоянны, кроме коэффициента поверхностного натяжения α, который линейно убывает с температурой $\alpha(T)=\alpha(T_0)-|d\alpha/dT|(T-T_0)$; задача аксиально-симметрична; движение медленное, установившееся, дрейфовая скорость $\mathbf{u}$ капли постоянна; форма капли слабо отклоняется от сферической; на бесконечности жидкость неподвижна; сила тяжести отсутствует; жидкости нерастворимы одна в другой.

Пусть к начальному моменту времени $t=0$ движение уже установилось. Предположим для определенности, что капля дрейфует в сторону градиента температуры $\mathbf{A}$ со скоростью $\mathbf{u}$. Направим полярную ось z вдоль вектора $\mathbf{A}$ и совместим ее с траекторией центра масс капли. Будем считать, что в начальный момент центр капли проходит точку $z=0$. Температуру будем отсчитывать от невозмущенной температуры в начале координат. Тогда распределение скоростей $\mathbf{v}_i$, давлений p_i и температур T_i в обеих средах определится системой уравнений ($i=1, 2$)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}+(\mathbf{v}_i\nabla)\mathbf{v}_i=-\frac{\nabla p_i}{\rho_i}+\nu_i\Delta\mathbf{v}_i,\qquad \nabla\mathbf{v}_i=0,\qquad \frac{\partial T_i}{\partial t}+\mathbf{v}_i\nabla T_i=\chi_i\Delta T_i \tag{1.1}$$

Индекс i отмечает принадлежность функции к первой (безграничная жидкость) или второй (капля) среде.

На бесконечности $T_1=Az$, $p_1=0$, $\mathbf{v}_1=0$.

К этим уравнениям нужно присоединить граничные условия на поверхности капли [1]. Так как свободная поверхность раздела предполагается непроницаемой для жидкостей, то на поверхности исчезают нормальные составляющие скоростей. Касательные составляющие скоростей, а также температуры, нормальные составляющие теплопотоков и нормальные и касательные составляющие напряжений должны быть непрерывны.

Задачу (1.1) можно сформулировать как стационарную, если перейти к системе отсчета, связанной с дрейфующей каплей. Совместим начало сферической системы координат (r, ϑ, φ) с центром масс капли. Направление полярной оси z' оставим неизменным. Температуру будем отсчитывать от невозмущенной температуры точки $z=ut$, в которой находится центр масс капли в рассматриваемый момент времени. Тогда новые, «штрихованные» функции будут зависеть только от пространственных координат

$$z=z'+ut,\ \mathbf{v}_i(r, t)=\mathbf{v}_i'(\mathbf{r}')+\mathbf{u},\ T_i(\mathbf{r}, t)=Aut+T_i'(\mathbf{r}') \quad (i=1, 2) \tag{1.2}$$

Перейдем к безразмерным величинам. Для этого в качестве единицы измерения расстояния выберем средний радиус капли a, скорости — $|d\alpha/dT|aA/\eta_1$, давления — $|d\alpha/dT|A$, температуры — aA. Обозначая безразмерные переменные теми же буквами, но без штрихов, получим с помощью (1.1) и (1.2) уравнения для безразмерных величин в системе отсчета, в которой капля неподвижна

$$M(\mathbf{v}_1\nabla)\mathbf{v}_1=-\nabla p_1+\Delta\mathbf{v}_1,\ \nabla\mathbf{v}_1=0,\ PM(u+\mathbf{v}_1\nabla T_1)=\Delta T_1 \tag{1.3}$$

$$M(\mathbf{v}_2\nabla)\mathbf{v}_2=-\frac{\nabla\rho_2}{\rho}+\nu\Delta\mathbf{v}_2,\qquad \nabla\mathbf{v}_2=0,\qquad PM(u+\mathbf{v}_2\nabla T_2)=\chi\Delta T_2$$

$$M=\left|\frac{d\alpha}{dT}\right|\frac{A\rho_1a^2}{\eta_1^2},\qquad \rho=\frac{\rho_2}{\rho_1},\qquad \nu=\frac{\nu_2}{\nu_1},\qquad \chi=\frac{\chi_2}{\chi_1},\qquad P=\frac{\nu_1}{\chi_1}$$

На бесконечности задан однородный натекающий на каплю поток, скорость которого определяется в результате решения; заданы также температура и давление

$$v_1=-u\cos\theta\mathbf{r}_1+u\sin\theta\boldsymbol{\theta}_1,\ T_1=r\cos\theta,\ p_1=0 \tag{1.4}$$

Здесь $\mathbf{r}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_1$ — единичные векторы полярной системы координат.

Запишем граничные условия на поверхности раздела жидкостей. Будем считать каплю телом вращения с осью симметрии, направленной вдоль z. Поверхность капли зададим уравнением $r=R(\theta)$. Функция $R(\theta)$ определяется в ходе решения задачи. Введем в рассмотрение угол ε между внешней нормалью к поверхности $\mathbf{n}$ и радиус-вектором. Тогда единичные векторы нормали $\mathbf{n}$ и касательной к меридиональному сечению $\boldsymbol{\tau}$

$$\mathbf{n}=\mathbf{r}_1\cos\varepsilon-\boldsymbol{\theta}_1\sin\varepsilon,\quad \boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}_1\sin\varepsilon+\boldsymbol{\theta}_1\cos\varepsilon,\quad \operatorname{tg}\varepsilon=\frac{R'}{R},\quad R'=\frac{dR}{d\theta}$$

С помощью этих формул можно записать указанные выше условия для скоростей, температур и теплопотоков на границе $r=R(\theta)$ в сферической системе координат. После деления каждого уравнения на $\cos\varepsilon$ получим

$$\begin{gathered} v_{r1}-\frac{R'}{R}v_{\theta1}=0,\qquad v_{r2}-\frac{R'}{R}v_{\theta2}=0,\qquad T_1=T_2 \\ \frac{R^1}{R}v_{r1}+v_{\theta1}=\frac{R'}{R}v_{r2}+v_{\theta2},\qquad \frac{\partial T_1}{\partial r}-\frac{R'}{R^2}\frac{\partial T_1}{\partial\theta}=\varkappa\left(\frac{\partial T_2}{\partial r}-\frac{R'}{R^2}\frac{\partial T_2}{\partial\theta}\right) \end{gathered} \tag{1.5}$$

Здесь v_{ri} и $v_{\theta i}$ — компоненты скорости i-й среды в сферической системе координат; безразмерный параметр $\varkappa=\varkappa_2/\varkappa_i$.

При записи уравнений для касательных и нормальных компонент тензора напряжений нужно иметь в виду, что коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры и, следовательно, кроме нормального

создает еще добавочное касательное напряжение, направленное в сторону убывания температуры. После деления уравнений на $\cos\varepsilon$ получим

$$
\begin{gathered}
p_1-p_2+\left(\frac{\alpha_0}{M}-T\right)2H=-\left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_{r1}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{\theta1}}{\partial r}-\frac{v_{\theta1}}{R}\right)-\right.\\
\left.-\eta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_{r2}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{\theta2}}{\partial r}-\frac{v_{\theta2}}{R}\right)\right]\frac{R'}{R}+\left(2\frac{\partial v_{r1}}{\partial r}-\eta2\frac{\partial v_{r2}}{\partial r}\right)-\\
-\left(R'\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)\frac{R'}{R}(R^2+R'^2)^{-1/2}\\
\left[p_1-p_2+\left(\frac{\alpha_0}{M}-T\right)2H\right]\frac{R'}{R}=-\left[\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_{r1}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{\theta1}}{\partial r}-\frac{v_{\theta1}}{R}\right)-\right.\\
\left.-\eta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v_{r2}}{\partial\theta}+\frac{\partial v_{\theta2}}{\partial r}-\frac{v_{\theta2}}{R}\right)\right]+\left[2\left(\frac{\partial v_{\theta1}}{\partial\theta}+v_{r1}\right)-\right.\\
\left.-\eta2\left(\frac{\partial v_{\theta2}}{\partial\theta}+v_{r2}\right)\right]\frac{R'}{R}+\left(R'\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)(R^2+R'^2)^{-1/2}\\
H=\frac{1}{2}\left[\frac{2R^2+3R'^2-RR''}{(R^2+R'^2)^{3/2}}-\operatorname{ctg}\theta\frac{R'}{R(R^2+R'^2)^{1/2}}\right]
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

Здесь H — средняя кривизна поверхности [2], $\eta=\eta_2/\eta_1$, $\alpha_0=\alpha\rho_1 a/\eta_1$ — безразмерные параметры системы. Индекс у температур можно опустить, так как на поверхности температуры одинаковы.

Кроме условий (1.4)–(1.6) требуется ограниченность функций в начале координат.

2. В задаче (1.3)–(1.6) только один контролируемый параметр M. Все остальные параметры определяют физические свойства гетерогенной системы.

Будем искать решение краевой задачи (1.3)–(1.6) в виде разложения по степеням M

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i^{(0)}+M\mathbf{v}_i^{(1)}+\ldots,\qquad p_i=p_i^{(0)}+Mp_i^{(1)}+\ldots\\
T_i=T_i^{(0)}+MT_i^{(1)}+\ldots\qquad (i=1,2)\\
u=U+Mu^{(1)}+\ldots,\ R(\theta)=1+Mf_1(\theta)+M^2f_2(\theta)+\ldots
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Подставив (2.1) в (1.3)–(1.6), можно получить

$$
\begin{gathered}
\mathbf{v}_1^{(0)}=U\left[\left(-1+\frac{1}{r^3}\right)P_1\mathbf{r}_1+\left(-1-\frac{1}{2r^3}\right)r\nabla P_1\right]\\
\mathbf{v}_2^{(0)}=U\frac{3}{2}[(1-r^2)P_1\mathbf{r}_1+(1-2r^2)r\nabla P_1]\\
T_1^{(0)}=\left(r+\frac{c_6}{r^2}\right)P_1,\qquad T_2^{(0)}=c_7rP_1\\
p_1^{(0)}=0,\qquad p_2^{(0)}=-r15U\eta P_1+\frac{2\alpha_0}{M},\qquad U=\frac{2}{(2+\varkappa)(2+3\eta)}
\end{gathered}
\tag{2.2}
$$

$$
(2.3)\quad
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1^{(1)} &= \left(-\frac{3c_2}{r^4}+\frac{6c_1}{r^2}\right)P_2\mathbf{r}_1+\frac{c_2}{r^4}r\nabla P_2\\
\mathbf{v}_2^{(1)} &= \frac{1}{\nu}\left(\frac{6}{5}c_3r^3+2c_4r\right)P_2\mathbf{r}_1+\frac{1}{\nu}(c_3r^3+c_4r)r\nabla P_2\\
p_1^{(1)} &= -\frac{U^2}{4r^6}+\left(\frac{U^2}{r^3}-\frac{U^2}{4r^6}+\frac{12c_1}{r^3}\right)P_2\\
p_2^{(1)} &= \rho\left[\frac{3}{8}U^2r^4+c_5+\left(\frac{9}{4}U^2r^2-\frac{3}{2}U^2r^4+\frac{42}{5}c_3r^2\right)P_2\right]\\
T_1^{(1)} &= P\left[\frac{c_{10}}{r}+\frac{Uc_6}{12r^4}+\left(\frac{c_{11}}{r^3}-\frac{2Uc_6-U}{6r}-\frac{Uc_6}{6r^4}\right)P_2\right]\\
T_2^{(1)} &= \frac{P}{\chi}\left[\left(\frac{Uc_7}{4}+\frac{U}{6}\right)r^2+c_8-\frac{c_7U}{8}r^4+\left(c_9r^2+\frac{U}{14}c_7r^4\right)P_2\right]
\end{aligned}
$$

Здесь $P_1=\cos\theta$ и $P_2={}^1/_2(3\cos\theta-1)$ — полиномы Лежандра

$$
(2.4)\quad
\begin{aligned}
c_1 &= \frac{c_2}{2}=\frac{c_3}{5\nu}=-\frac{c_4}{3\nu}=\frac{3}{8}\frac{U^2(\rho-1)}{(4+\eta)}\\
c_5 &= -\frac{1}{\rho}\left[\frac{U^2}{8}(2+3\rho)+\frac{PU}{6}\left(3\frac{1-\varkappa}{2+\varkappa}-\frac{4\varkappa}{\chi}\right)\right]\\
c_6 &= \frac{1-\varkappa}{2+\varkappa},\qquad c_7=\frac{3}{2+\varkappa},\qquad c_8=U\frac{6\chi-6\varkappa\chi-20\varkappa-8\varkappa^2-17}{24(2+\varkappa)}\\
c_9 &= -\frac{U}{42}\frac{49\chi-7\chi\varkappa+36\varkappa+27}{(3+2\varkappa)(2+\varkappa)},\qquad c_{10}=\frac{U}{3}\left(\frac{1-\varkappa}{2+\varkappa}+\frac{\varkappa}{\chi}\right)\\
c_{11} &= \frac{U}{42\chi}\frac{56\chi+35\chi\varkappa-18\varkappa-28\chi\varkappa^2}{(3+2\varkappa)(2+\varkappa)},\qquad u^{(1)}=0\\
f_2(\theta) &= s_2P_2,\qquad s_2=-\frac{3}{4\alpha_0}\left[\frac{5}{2}U^2\frac{(1-\rho)(1+\eta)}{4+\eta}+\right.\\
&\left.+\frac{PU}{63\chi}\frac{49\chi-7\chi\varkappa+18\varkappa}{(3+2\varkappa)(2+\varkappa)}\right]
\end{aligned}
$$

Функция $f_1(\theta)$ в разложении $R(\theta)$ тоже определяется в ходе решения и оказывается равной $s_1\cos\theta$, где s_1 любое: коэффициент при s_1 в уравнениях исчезает. Поскольку центр масс капли выбран за начало отсчета, то s_1 следует положить равным нулю, так как найденная зависимость $f_1(\theta)$ от полярного угла θ означает сдвиг капли по оси z' на расстояние s_1.

Из (2.2) и (2.4) видно, что поправка к скорости дрейфа $u^{(1)}$ равна нулю, а скорость в нулевом приближении U всегда положительна, т. е. капля движется в сторону нагретых слоев жидкости. Подобное поведение капель описано в [3, 4]. Скорость дрейфа в выбранном приближении определяется только двумя безразмерными параметрами $\varkappa$ и η, с ростом которых U убывает. Физически это понятно. С увеличением вязкости капли

затрудняется развитие термокапиллярной конвекции и в пределе при $\eta\to\infty$ движение затухает. С ростом теплопроводности второй среды уменьшается градиент температуры вдоль поверхности. В пределе при $\varkappa\to\infty$ температура капли постоянна и конвекция отсутствует. В другом предельном случае — пузырек газа в вязкой среде ($\eta\to 0$ и $\varkappa\to 0$) — безразмерная скорость дрейфа равна $^1/_2$.

Форма капли $r=1+s_2P_2M^2$ определяется многими параметрами. Можно, однако, сказать, что капля стремится сплюснуться, если дрейфует менее плотная жидкость, например пузырек газа ($\rho<1$). При дрейфе более плотной жидкости ($\rho>1$) капля стремится вытянуться по движению. Эти эффекты могут быть незаметными из-за положительного члена, пропорционального числу Прандтля P, в формуле для s_2 в (2.4). Именно, с ростом P, определенного по параметрам первой среды, капля стремится сплюснуться. Амплитуда деформации s_2 обратно пропорциональна безразмерному коэффициенту поверхностного натяжения α_0. Поэтому при значительном коэффициенте поверхностного натяжения эффекты деформации, которые появляются только в третьем приближении, будут очень слабы. Влияние остальных параметров на форму капли довольно сложно.

3. Остановимся на вопросе о сходимости разложений (2.1). Функция тока ψ, определенная по формулам (2.1), (2.2), равна

$$\psi=U\left(-r^2+\frac{1}{r}\right)\frac{\sin^2\theta}{2}+M\left(-\frac{3c_2}{r^2}+6c_1\right)\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{2} \tag{3.1}$$

Нулевое приближение в (3.1) содержит только два члена. Первый соответствует равномерному потоку на бесконечности, а второй — диполю в центре капли. «Стокслета» в разложении нет. А как известно [5], именно из-за стокслета отсутствует второе приближение к задаче Стокса (парадокс Уайтхеда). В рассматриваемой же задаче в области неоднородности, где отношение конвективных членов к вязким порядка $Mr\gg 1$, скорость достигает своего значения в набегающем потоке, так что оказывается возможным наложить граничные условия на бесконечности. Поэтому разложение (2.1) содержит только целые степени M. Членов же, пропорциональных $\ln M$, которые получаются при решении такого рода задач методами сращиваемых асимптотических разложений [6], здесь нет.

Функция тока ψ, определенная формулой (3.1), обращается в нуль не только на поверхности капли и вдоль оси симметрии, но и вдоль кривой

$$\cos\theta=\frac{4(4+\eta)(r^3+r^2+r)}{9MU(\rho-1)(r+1)} \tag{3.2}$$

Это уравнение приближенно описывает границу вихревой зоны. Вихрь должен появиться за каплей, начиная с такого M_*, при котором нижний по потоку ($\cos\theta=1$) конец вихря r будет равен радиусу капли $r\approx 1$. Для пузырька газа в вязкой жидкости ($\rho=\varkappa=\eta=0$) $M_*={}^{16}/_3$. За более плотной, чем окружающая жидкость, каплей в этом приближении вихрь вообще не образуется. Для такого большого значения M_* разложение (2.1) непригодно. Однако известно [5], что озееновское приближение для задачи Стокса хорошо согласуется с экспериментальными данными вплоть до чисел Рейнольдса порядка 60. Поэтому можно надеяться, что как оценочное значение величина M_* имеет смысл.

Автор благодарит И. М. Кирко, обратившего его внимание на эту задачу, а также участников семинара, руководимого Г. З. Гершуни, и особенно В. Д. Зимина, А. Ф. Пшеничникова и М. И. Шлиомиса за полезные обсуждения.

Поступила 24 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике, для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1970.
3. *Левич В. Г., Кузнецов А. М.* О движении капель в жидкостях под действием поверхностно-активных веществ. Докл. АН СССР, 1962, т. 146, № 1.
4. *Иванова С. В., Попель А. С.* О движении капли в вязкой жидкости под действием нерастворимого поверхностно-активного вещества. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 2.
5. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
6. *Праундман И., Пирсон Дж.* Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра. Механика. Период. сб. перев. иностр. статей, 1958, № 2.