МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1975

УДК 532.5.013.4:538.4

РАЗВИТИЕ ТЕЙЛОРОВСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СЖИМАЕМЫХ ПРОВОДЯЩИХ СРЕДАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

А. Д. ПОЛЯНИН

(Москва)

Исследованию устойчивости границы раздела вязких несжимаемых проводящих сред при наличии тока и магнитного поля при малом магнитном числе Рейнольдса посвящена работа [1]. В [2] рассматривается устойчивость контактного разрыва в сжимаемых средах. В этой работе при анализе случая длинноволновых колебаний в области $z<0$ неправильно удовлетворено граничное условие. Поэтому в этой части ее автор фактически рассмотрел задачу с массовой силой $\mathbf{f}=(0, 0, -g \operatorname{sign} z)$ вместо $\mathbf{f}=(0, 0, -g)$.

В данной работе рассматривается устойчивость границы раздела сжимаемых проводящих сред, находящихся в магнитном поле. Предполагается, что магнитная напряженность может терпеть разрыв вдоль этой границы. Приводится зависимость максимального инкремента нарастания неустойчивости от определяющих параметров. Анализируется устойчивость контактного разрыва в зависимости от углов, образованных волновым вектором и напряженностью магнитных полей. Показано стабилизирующее влияние стенок на устойчивость.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, состоящую из двух сжимаемых идеально проводящих сред и находящуюся в поле сил тяжести с массовой силой $\mathbf{f}=(0, 0, -g)$. Предполагается, что в начальный момент времени среды покоились, причем одна из них находилась в области $z>0$, другая — $z<0$. Вектор магнитной напряженности $\mathbf{H}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси z, и постоянен для каждой из сред. Начальные состояния сред считаются изэнтропическими с $\gamma=1$.

Исследуем устойчивость контактного разрыва по отношению к малым монохроматическим возмущениям с заданным волновым вектором $\mathbf{k}$. Линеаризованные уравнения, описывающие возмущенное состояние сред, будут следующими [3]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p'-\frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{h}, \mathbf{H}]-\frac{\rho'}{\rho}\mathbf{f}=0$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathbf{u}=0, \qquad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}-\operatorname{rot}[\mathbf{u}, \mathbf{H}]=0, \qquad \rho=\rho_0\exp(-gz/m) \tag{1.1}$$

На границе раздела нормальные составляющие скорости частиц среды должны быть равны нормальной скорости перемещения элемента границы. На контактном разрыве должно выполняться условие непрерывности полного давления. Пусть $a(x, t)$ — смещение границы раздела вдоль оси z. В линейном приближении $\partial a/\partial t$ характеризует нормальные составляющие вдоль граничной скорости частиц, т. е. при $z=0$ $\partial a/\partial t=u_{z_1}=u_{z_2}$. Граничные условия для давления имеют вид $[p+H^2/8\pi]=0$. Разлагаем в этом выражении $H(\mathbf{r}, a, t)$, $p(\mathbf{r}, a, t)$ в ряд по степеням амплитуды a, оставив лишь линейные члены. Получаем выражение

$$-ga[\rho]+[m\rho']+\frac{1}{4\pi}[H_xh_x+H_yh_y]=0 \tag{1.2}$$

Частные решения системы (1.1) ищем в виде $A(\mathbf{r}, a, t)=A(z)\times$ $\times\exp(i\mathbf{kr}+\omega t)$, где $\mathbf{k}=(k_x, k_y)$ — волновой вектор, $\mathbf{r}=(x, y)$. С учетом этого система (1.1) может быть переписана в виде

(1.3)
$$\rho\omega\mathbf{u}+\operatorname{grad}p'+i\mathbf{k}p'-\frac{1}{4\pi}[\operatorname{rot}\mathbf{h}, \mathbf{H}]+\frac{i}{4\pi}[[\mathbf{k}, \mathbf{h}], \mathbf{H}]-\rho'\mathbf{f}=0$$
$$\omega\rho'+i\rho(k_xu_x+k_yu_y)+\frac{d}{dz}(\rho u_z)=0$$
$$\omega\mathbf{h}-\operatorname{rot}[\mathbf{u}, \mathbf{H}]-i[\mathbf{k}, [\mathbf{u}, \mathbf{H}]]=0$$

Введем безразмерную координату $\xi=mz/g$ и безразмерные параметры по формулам $\alpha=g/km$, $\varepsilon=\omega^2/kg$, $\Delta=\varepsilon\alpha$, $\varkappa=H^2/4\pi\rho_0m$. Обозначим $\varkappa'=\varkappa\exp\xi$. Для удобства выбираем систему координат таким образом, чтобы волновой вектор был параллелен оси x. С учетом этих замечаний из системы (1.3) получаем следующее уравнение для u_z:

(1.4)
$$Lu_z=a(\xi, \alpha)u_z+\alpha^2b(\xi)\frac{du_z}{d\xi}+\alpha^2c(\xi)\frac{d^2u_z}{d\xi^2}=0$$
$$a(\xi, \alpha)=\Delta+\varkappa'\cos^2\varphi+\alpha^2\frac{\Delta\varkappa'\sin^2\varphi}{G}(\Delta+\varkappa'\cos^2\varphi+\Delta\varkappa')$$
$$b(\xi)=1+(1+\varkappa'\sin^2\varphi)\left(\frac{\varkappa'\Delta^3\sin^2\varphi}{G^2}-\frac{\Delta+\varkappa'\cos^2\varphi}{G}\right)+$$
$$+\frac{\varkappa'^2\sin^2 2\varphi}{G^2}[\Delta^2(1+\Delta)+G]$$
$$c(\xi)=-\varkappa'\cos^2\varphi-\frac{\Delta}{G}(\Delta+\varkappa'\cos^2\varphi+\Delta\varkappa'\sin^2\varphi)$$
$$G=\Delta(1+\Delta)+\varkappa'(\Delta+\cos^2\varphi)$$

Здесь φ — угол между волновым вектором и вектором магнитной напряженности. Граничные условия для непрерывности полного давления и нормальной составляющей скорости имеют вид

(1.5)
$$[u_z]=0, \qquad \left[\rho\left\{Bu_z+(-\varkappa\cos^2\varphi+\Delta B)\frac{du_z}{d\xi}\right\}\right]=0$$
$$B=\frac{\varkappa^2\sin^2 2\varphi}{4G}-(1+\varkappa\sin^2\varphi)\frac{\Delta+\varkappa\cos^2\varphi}{G}$$

В дальнейшем обозначаем знаком плюс все параметры, характеризующие среду, находящуюся в области $z>0$, а знаком минус — соответственно в области $z<0$. Пусть u_1 и u_2 — частные решения уравнения (1.4), тогда общим решением уравнения $Lu_z=0$ будет $u_z=A_1u_1+A_2u_2$. Пусть теперь при $\xi=l$ имеется стенка, на которой выполняется условие непроницаемости. В этом случае произвольное решение (1.4), удовлетворяющее этому условию, имеет вид

(1.6) $$u_z(\xi)=Au(\xi), \quad u(l)=0$$

Подставляя (1.6) в соотношения (1.5), получаем линейную однородную систему относительно коэффициентов A^+, A^-. Для существования нетривиального решения этой системы необходимо и достаточно обращения в нуль определителя этой системы. Удовлетворяя этому условию, получим дисперсионное уравнение, связывающее ω и k:

$$\left[\rho\left\{B+(-\varkappa\cos^2\varphi+\Delta B)\frac{1}{u}\frac{du_z}{d\xi}\right\}\right]=0 \tag{1.7}$$

В предположении малости магнитного поля ($\varkappa\ll1$) уравнение (1.7) записывается

$$\left[\frac{\rho}{1+\Delta}\left\{1+\frac{\varkappa\Delta\sin^2\varphi}{1+\Delta}+\left(\Delta+\varkappa\frac{F(\Delta,\varphi)}{1+\Delta}\right)\frac{1}{u}\frac{du}{d\xi}\right\}\right]=0 \tag{1.8}$$

$$F(\Delta,\varphi)=\Delta^2+2\Delta\cos^2\varphi+\cos^2\varphi$$

Так как частные решения уравнения (1.4) написать в удобном аналитическом виде не удается, то ограничимся рассмотрением некоторых предельных случаев.

2. Коротковолновые колебания ($\alpha\ll1$). Здесь решаем полубесконечную задачу, т. е. выставляем условия затухания на бесконечности для нормальной составляющей компоненты скорости. Применяя метод ВКБ [4], получаем асимптотические формулы для решений уравнения (1.4)

$$u(\xi)=\exp\left\{\alpha^{-1}\int_0^\xi\lambda(\tau)d\tau-\frac{1}{2}\int_0\left[n(\tau)+\frac{d}{d\tau}\ln\lambda(\tau)\right]d\tau\right\}(1+o(\alpha)) \tag{2.1}$$

$$\lambda(\xi)=\sqrt{-\frac{a(\xi,0)}{c(\xi)}},\qquad n(\xi)=\frac{b(\xi)}{c(\xi)}$$

Рассмотрим частный случай, когда вектор магнитной напряженности непрерывен на контактном разрыве и параллелен волновому вектору $\varkappa^+=\varkappa^-$, $\varphi^+=\varphi^-$. Подставляя u в дисперсионное уравнение (1.7) и решая его относительно ε, получаем

$$\varepsilon=\frac{\sigma-1}{\sigma+1}+\frac{1}{2}(\sigma\alpha^+\alpha^-)^{-1/2}\left[-(\sigma+1)+\sqrt{(\sigma+1)^2-\frac{8\varkappa\sigma}{1+\varkappa}}\right],\qquad \sigma=\frac{\rho_0^+}{\rho_0^-} \tag{2.2}$$

Для слабых магнитных полей (2.2) записывается

$$\varepsilon=\frac{\sigma-1}{\sigma+1}-2(\alpha^+\alpha^-)^{-1/2}\frac{\sqrt{\sigma}\varkappa}{\sigma+1} \tag{2.3}$$

Эта формула в точности совпадает с формулой, полученной в [2]. Из (2.2) и (2.3) видно, что наличие магнитного поля стабилизирует контактный разрыв. Аналогично можно рассмотреть случай, когда вектор магнитной напряженности и волновой вектор перпендикулярны: $\varepsilon=(\sigma-1)/(\sigma+1)$. Видно, что в этом случае магнитное поле не воздействует на контактный разрыв.

Для произвольного угла дисперсионное уравнение получается сложным, поэтому в дальнейшем везде предполагается, что магнитные поля малы $\varkappa\ll1$. Решения уравнения (1.4) будут определяться (2.1)

$$\lambda=1+\frac{1}{2}\frac{\Delta}{G},\qquad n=-\frac{1}{G^2}\left[\Delta(\Delta+\varkappa'\cos^2\varphi)+\frac{3}{4}(\varkappa')^2\sin^2 2\varphi\right] \tag{2.4}$$

Подставляя u в дисперсионное уравнение (1.8) и решая его, получаем

$$\varepsilon=\frac{\sigma-1}{\sigma+1}-(\alpha^+\alpha^-)^{-1/2}\frac{\sqrt{\sigma}}{\sigma+1}(\varkappa^+\cos^2\varphi^++\varkappa^-\cos^2\varphi^-) \tag{2.5}$$

В газодинамическом случае ($\varkappa=0$) при $\sigma>1$ контактный разрыв неустойчив, а при $\sigma\leqslant1$ устойчив. Второй член в выражении для ε при любых значениях углов имеет отрицательный знак. Поэтому при малых значениях α этот член будет преобладать независимо от соотношения плотностей, т. е. при фиксированных магнитных полях волны малой длины, начиная с $k\geqslant k_*$, будут устойчивы

$$k_*=(\sigma m^+m^-)^{-1/2}\frac{g(\sigma-1)}{\varkappa^+\cos^2\varphi^++\varkappa^-\cos^2\varphi^-} \tag{2.6}$$

С другой стороны, $\omega=0$ при $k=0$, т. е. существует k° такое, что $0<k^\circ<k_*$ и при котором неустойчивость будет максимальна. Дифференцируя выражение (2.5) по k, получаем, что максимальный инкремент неустойчивости $k^\circ=k_*/2$, причем скорость роста возмущений определяется

$$\omega^\circ=\left(\frac{1}{2}k^\circ g\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Из формулы (2.6) видно, что наиболее сильно магнитное поле будет воздействовать на контактный разрыв в случае параллельности вектора магнитной напряженности и волнового вектора. Если в формуле (2.6) положить $\varphi^+=\varphi^-=0$, $\varkappa^+=\varkappa^-$, то она переходит в (2.3).

3. Длинноволновые колебания ($\alpha\gg1$). Здесь будем рассматривать задачу со стенками, т. е. выставим условие $u(\xi=l)=0$. Дифференциальный оператор, соответствующий этому случаю, имеет вид

$$\begin{gathered}Lu_z=(L_0+\varkappa e^\xi L_1)u_z=0\\ L_0=\Delta\left(\alpha^{-2}+\frac{1}{1+\Delta}\frac{d}{d\xi}-\frac{1}{1+\Delta}\frac{d^2}{d\xi^2}\right),\qquad L_1=\frac{\Delta\sin^2\varphi}{(1+\Delta)^2}-\frac{F(\Delta,\varphi)}{(1+\Delta)^2}\frac{d^2}{d\xi^2}\end{gathered} \tag{3.1}$$

Удовлетворяя граничному условию на стенке с точностью до $o(\varkappa)$, получаем

$$\begin{gathered}u_z(\xi)=A(e^{\xi-l}-1+v_1e^l(1-e^{\xi-l})-v_2e^l(1-e^{2(\xi-l)}))\\ v_j=-\frac{\varkappa P_1(\lambda_j)}{P_0(\lambda_j+1)},\qquad P_i(\lambda)=e^{-\lambda\xi}L_i(e^{\lambda\xi}),\qquad P_0(\lambda_j)=0\end{gathered} \tag{3.2}$$

Все приведенные формулы справедливы лишь при $\varkappa\exp l\ll1$. Подставляя u_z в соотношение (1.8), получим дисперсионное уравнение. Уравнение для этого случая является трансцендентным и дает целый счетный набор для частоты $\omega_n(k)$ с предельной нулевой точкой. Можно показать, что наиболее «опасным» корнем является корень, соответствующий $\alpha^{-2}=0$ в уравнении (3.1). В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{gathered}\Psi=\Psi_0+\Psi_\varkappa+\Psi_{v_1}+\Psi_{v_2},\qquad \Psi_0=\left[\frac{\rho}{1+\Delta}\{1-\Delta\zeta\}\right]\\ \Psi_\varkappa=\left[\frac{\rho\varkappa}{1+\Delta}\{\sin^2\varphi-F(\Delta,\varphi)\zeta\}\right],\qquad \Psi_{v_1}=-\Psi_0\{v_1^+e^{l^+}+v_1^-e^{l^-}\}\\ \Psi_{v_2}=\Psi_{+,-}+\Psi_{-,+},\qquad \Psi_{+,-}=-v_2^-(1+e^l\ )(-1+\Delta^+\zeta^+)+\\ +v_2^+(1+e^l\ -2\Delta^+\zeta^+),\qquad \zeta=\frac{e^{-l}}{1-e^{-l}}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь газодинамический случай, что соответствует $\varkappa=0$, $v_i=0$. В этом случае получается следующее уравнение относительно $t=\omega^2/k^2$:

$$(3.4)\qquad (\sigma\zeta^+-\zeta^-)t^2+(\sigma\zeta^+m^+-\zeta^-m^-)t+m^+m^-(1-\sigma)=0$$

Так как $\zeta^+>0$, $\zeta^-<0$, то из уравнения (3.4) видно, что при $\sigma>1$ один корень будет положительным, а это дает неустойчивость. При $\sigma<1$ оба корня отрицательные, т. е. это соответствует устойчивому случаю. Для упрощения выкладок в дальнейшем везде будет предполагаться, что $\sigma\sim1$. Максимальным корнем уравнения (3.4) будет $t_0=m^-(\sigma-1)/(\zeta^+-\zeta^-)$. Найдем добавку к газовой динамике, которая появляется при наличии слабого магнитного поля: $t=t_0+m^-\mu$, $\mu\ll1$. Подставляя это выражение в (3.3) и разлагая в ряд Тейлора по μ, получаем

$$(3.5)\qquad \mu=-\varkappa^+\cos^2\varphi^+\left\{\frac{\zeta^+}{\zeta^+-\zeta^-}+\frac{1}{2}(\zeta^+-\zeta^-)(1+e^{l^+})\right\}+$$
$$+\varkappa^-\cos^2\varphi^-\left\{\frac{\zeta^-}{\zeta^+-\zeta^-}-\frac{1}{2}(\zeta^+-\zeta^-)(1+e^{l^-})\right\}$$

Знак у μ всегда отрицательный, а это означает, что наличие магнитного поля и в случае длинноволновых колебаний стабилизирует контактный разрыв. Зависимость от углов аналогична случаю коротковолновых колебаний, т. е. поле оказывает максимальное воздействие в случае параллельности вектора магнитной напряженности и волнового вектора и минимальное — в случае перпендикулярности. Из формулы (3.5) видно, что при приближении какой-либо стенки к контактному разрыву абсолютная величина μ быстро растет, а это говорит о том, что наличие стенок, так же как и поля, ведет к стабилизации контактного разрыва.

Как в случае коротковолновых, так и в случае длинноволновых колебаний на частоту влияет лишь проекция вектора магнитной напряженности на направление волнового вектора. Из сравнения формул для частоты видно, что наличие магнитного поля наиболее сильное воздействие оказывает на коротковолновые возмущения.

Автор благодарит А. Г. Куликовского за помощь в постановке задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила 10 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зимин Э. П., Эйсмонт О. А.* О неустойчивости Рэлея – Тейлора в магнитной гидродинамике в гальваническом приближении. ПМТФ, 1970, № 5.
2. *Николаев Ю. М.* Влияние магнитного поля на развитие тейлоровской неустойчивости сжимаемых проводящих жидкостей. Вестн. Моск. ун-та. Физ. астрон., 1967, № 5.
3. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
4. *Хединг Дж.* Введение в метод фазовых интегралов. М., «Мир», 1962.